Onor. Asociațiunea pentru cultura și Literatura Poporului Român
Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1925.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. † Membrii decedaţi.
3. Treizeci de ani . . . . . *G. Ţiţeica.*
4. Din Corespondent, Membru in Societatea „Gazeta Matematică" . . . . . *G. Nichifor.*
5. Proprietăţi ale triunghiului . *N. Blaha.*
6. † Alexandru Stoica . . . . . *† Sub-Locot. Vintilă Grigorescu.*
7. Localul Societăţii „Gazeta Matematică" . . . . . *I. Ionescu.*
8. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice".
9. Note Matematice: 1—4.
10. Bibliografii.
11. Cereri: 128.
12. Probleme rezolvate: 2651, 3126, 3144.
13. Exerciţii: 1—6.
14. Probleme propuse: 3331—3340.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE-FILARET
1925

F. T. — 127

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 92, 94, 208, 15, 20, 30, 38, 40, 49, 55, 57, 60, 69, 76, 78, 79, 88, 92, 96, 98, 300, 02, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Costul abonamentului la Revista „Gazeta Matematică“ pe anul XXXI, este de lei 75.

Pentru a primi No. 2 și următoarele ale Revistei, D-nii abonați sunt rugați să trimită costul integral ai abonamentului sau, dacă au trimis numai o parte din acest cost, a-l completă.

Cu tot acest spor „Gazeta Matematică“ nu se vinde decât cu de zece ori costul abonamentului dinnainte de războiu.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXI *SUPLIMENT* No. 1

RECREAŢIUNI

1. **Calcul rapid.** Dictaţi repede versurile următoare şi cereţi îndată rezultatul:

„Pune *zece* la *cincisprece* şi *cinzeci* la *două-zeci* şi încă *două* lângă *nouă* şi apoi tai-le în *două;* spune repede cât fac?".

C. C. POPESCU.

* * *

2. **Statistică paradoxală.** La o conferinţă, am auzit: „... D-lor, oamenii cărora le plac să se ocupe în mod serios de viaţa popoarelor, au stabilit cu preciziune că cea mai mare parte din viaţa lor, popoarele au fost în războaie şi a ajuns la concluzia că *trei părţi şi jumătate* din viaţa lor sunt în războaie şi *numai o optime* au perioade de pace".

Statisticianul nu prea cunoaşte împărţirea!

G. B.

* * *

3. **10 kg. radiu!** Un colonel, intrând în laboratorul de chimie, găseşte pe profesor vorbind despre *radium,* fără să-l arate elevilor. Supărat de neglijenţa profesorului, care nu a cerut din timp cantitatea de *radium* necesară pe un an, chemă pe ofiţerul cu aprovizionarea şi-i ordonă să se ducă imediat în piaţă, să cumpere *10 kg. de radium,* din care 5 kg. să le dea la laborator, iar 5 kg. să le păstreze în magazia aprovizionării, ca rezervă!

Dar vai, cu toată stăruinţa depusă, bietul ofiţer a fost rău notat la memoriu, căci nici până azi n'a executat ordinul cu radium!

GR. Z. şi V. A. C.

* * *

4. **Totul nu este egal cu suma părţilor sale.** In *„Istoria literaturii române"* de GH. ADAMESCU, pag. 26 este scris:

„După numărătoarea lui CIHAC (in *Dicţionarul* său *etimologic,* 2 vol. 1870 şi 1879) ar fi în româneşte 1/6 elemente latine, 1/5 turceşti, 2/3 slavone şi 1/5 elemente diverse".

Vai de numărătoarea lui CIHAC!

M. M. CONSTANTINESCU.

* * *

5. **Ziaristica matematică.** In ziarul *Adevărul* din 13/VIII 1924 ediția de provincie, se poate citi la rubrica *Cărți noi*, critica D-lui I. SUCHIANU asupra romanului *„Le perroquet vert"* par *La Princesse Bibesco.*

„Ce zice I al unei *aritmetici întregi* de incesturi, în lăuntru unei familii de boeri ruși cari, bine înțeles, seamănă tot timpul între ei. Ba chiar se și *identifică doi câte doi.* Nepoate *duble*, veri cari *coincid*, mătuși cari *se suprapun*, iată lumea pitorească a romanului.....

„Cu o *algebrică* rigoare, personagiile ce nu s'au născut încă își așteaptă Sosie-ul să moară, pentru a puteà *să treacă în celălalt membru al ecuației*".

P. BLEIWEISS.

* * *

6. **Greutăți negative.** In *„Pe Drumuri de Munte"* de C. HOGAȘ, găsim la pag. 114:

„Sunt în lumea aceasta, dragă cuconiță, și *greutăți negative*, care adică, în loc să te atârne spre pământ, te ridică spre cer; s'ar părea atunci că, întocmai ca zeităților antice, ți-au răsărit aripi, la umere și că ai puteà să străbați văzduhul spre...."

C. C. POPESCU.

* * *

7. **Infinitul.** In nuvela *„Făclia de Paște"* a lui CARAGIALE găsim următoarele:

„.... Unelta, învârtindu-se creștea la *infinit*".

I. I. GEORGESCU-RACOVIȚĂ.

* * *

8. **Cațavencu geometru.** Matematicile erau un domeniu absolut inaccesibil lui CAȚAVENCU. După războiu, se pare că ar vrea să intre și acolo, unde nu va aveà sorți de izbândă, de sigur. A încercat, de exemplu, să intre în Școala politecnică din Timișoara. Din trei chestiuni puse la geometrie, a rezolvat una, și anume pe aceasta:

Razele OA *și* OB *ale cercului* O *fac între ele un unghiu de 45°. Bisectoara unghiului* AOB *taie tangenta dusă în* B *la cerc în punctul* C. *Perpendiculara dusă din* A *pe* OB *taie cercul* O *în* D, *iar paralela dusă din* C *la* BD *taie pe* AD *în* E. *Să se arate că triunghiul* AOE *este isoscel.*

Iată soluția lui CAȚAVENCU, copiată întocmai cu stilul și cu ortografia cu care a scris-o el:

„Că triunghiul AOE este isoscel este foarte evident fiindcă punctul E trebuie să cază pe dreapta AD din motivele:

1°. Δ AOE are un unghiu de 45°.

2°. Δ AOE trebuie să aibă încă un unghiu de 45°, fiindcă numai astfel poate fi isoscel? S'ar puteà să fie isoscel și în cazul, când unghiul de 45° ar fi luat ca opus cu baza și atunci celelalte două unghiuri ar face total 3.45^0 sau în particular $\frac{1}{2}\ 3.45^0$, dar atunci în baza teoremei că într'un triunghiu la

unghiuri egale se opun laturi egale, latura OE ar trebui să aibă dimensiunea OB ceeace la noi nu se verifică. Prin urmare Δ AOE este isoscel având unghiul din E de 90°, unghiurile dela O şi A respectiv 45°, de unde rezultă că şi AE = EO,

Q. E. D.

In baza acestei demonstraţii, CAŢAVENCU a reuşit primul între cei căzuţi. Ar fi de făcut unele reflexiuni asupra tezelor şi temelor scrise pe care le-a făcut acest CAŢAVENCU în liceu şi la examenul de capacitate (!) dar.... tăcerea este de aur.

G. B.

* * *

9. **Poezia punctului.** Iată aci versurile D-lui AURELIAN PĂUNESCU publicate în revista *Flacăra*:

La inceput am fost un . , Un . anemic Şi banal, O *intersecţie de linii* Intr'un moment fatal.

— Eram un . *material* Şi trivial Ca un defunct.

— E dureros Şi trivial Ca să rămâi un simplu .

— Cum stam aşă, plângându-mi soarta, Văzui de odată o lumină, Ce străluceă ispititoare.

— Se aprinse în mine o torţă Strălucitoare Şi divină.

Ah! torţa Torţa salvatoare! 'Naintea mea pluteau de-acuma Nemărginiri încântătoare, Cu orizonturi largi de mare; Cu ţărmuri calde, Parfumate; Cu faruri ademenitoare Şi lumi civilizate

— Ademenit de frumuseţea Mirajului fermecător, Simţiam că nu mai pot de-acuma Să stau nepăsător Şi iată atuncia cum *o forţă Acţionează asupra mea*

— O clipă doar Şi ce miracol Nu mai sunt *fix* Şi n'am obstacol...

Atins de o forţă unitară, Imi schimb poziţia mereu Faţă de tot ce mă'nconjoară.

— Sunt eu, Dar veşnic în mişcare Ce fericită constatare Pentru un . !

— Ah! . , . în mişcare, Ce splendidă manifestare A vieţii noastre sbuciumate Stam un . neinsufleţit Dar prins de *forţe* creatoare In dorul meu de ∞ Mă mişc mereu Fără 'ncetare.

— Ah! . , . ce s'agită Pe o *suprafaţă* ∞, Lăsând în urmă *mii* de *linii*, Care îşi exercită menirea In *mii* şi *sute* de *direcţii*, Cu *mii* şi *mii* de *intersecţii*, Ca să menţină omenirea!

GH. VASILIU şi I. I. IOAN.

* * *

10. **Elipsa.** La o şcoală de fete, din Capitală:

— *Profesoara.* „Ce se numeşte *elipsă*, Domnişoară?"

— *Eleva: „Elipsă... Elipsă"* (apoi ca inspirată) „... este atunci când soarele este ascuns de lună".

Se va zice poate că eleva a avut o *eclipsă*. Cazul însă nu este izolat, şi ceeace se poate spune cu certitudine, este că *e lipsă* de noţiunile cele mai elementare la absolventele noastre de liceu.

N. I. C.

Şi la absolvenţi, cum s'a demonstrat la No. 8.

I. I.

* * *

11. **Matematica în literatură.** In *Cuvântul liber* No. 7 Anul 1925 pag. 12 găsim :

„Aceşti doi critici, fireşte *diametral opuşi unul altuia* ca temperament, au isbutit totuşi să formeze cele *două* capete ale aceluiaş lanus şi să se *echivaleze* după *identitatea omoloagelor* într'o *ecuaţie*".

G. G. Ciuca.

* * *

12. **Boală matematică.** Sub titlul „*Examenele*" ziarul „*Universul*" din 22 Iunie scrie :

„Toţi copiii şi adolescenţii sunt scuturaţi în momentul de faţă de friguri le examenelor. Grozavă boală! Medicina infantilă dacă nu ar fi o ştiinţă prea gravă ca să-şi permită jocuri de cuvinte, ar puteà să o numească febră *examentematică*, sau chiar *examenmatematică*, de oarece aceasta este materia unde simptomele morbide se prezintă sub o formă mai gravă la majoritatea pacienţilor".

I. I.

* * *

13. $0 \times \infty$. Fie triunghiul ABC şi transversala P, M, N. Teorema lui Menelaus ne dă :

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1,$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{MA}{MB} \times \frac{NB}{NC}.$$

Să presupunem că transversala trece prin A ; atunci M şi N vin în A şi avem :

$$\frac{PA}{PC} = \frac{BA}{0} \times \frac{0}{BC} = 0 \times \infty.$$

Poziţia lui P este nedeterminată pe AC, deşi punctul a fost dat!

G. Simionescu.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE SI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XXXI

15 SEPTEMBRIE 1925 — 15 AUGUST 1926

BUCUREŞTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE-FILARET

1925

LISTA MEMBRILOR
SOCIETAŢII „GAZETA MATEMATICA“

DELEGAŢIUNEA PENTRU ANUL XXXI *)

GH. EM. FILIPESCU, C. MALCOCI ŞI G. BORNEANU (CASSIER).

PERSONALUL REDACŢIUNII.

I. IONESCU. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreaţiuni, diverse şi reclamaţiuni privitoare la tipărire.

G. ŢIŢEICA. Raportor.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea şi repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice.*

G. BORNEANU, GH. ILIESCU şi C. MALCOCI. Membri delegaţi pentru corecturi şi imprimarea revistei.

I. IONESCU. Membru delegat pentru aritmetică elementară.

AL. BUNESCU şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru geometrie elementară.

LT.-COL. G. LITEANU. Membru delegat pentru trigonometrie.

M. GHERMĂNESCU. Membru delegat pentru algebră elementară.

G. A. Nichifor. Membru delegat pentru geometria descriptivă.

CR. MATEESCU. Membru delegat pentru mecanica elementară.

LT.-COL. G. LITEANU, C. ORĂŞANU şi I. VASILESCU. Membri delegaţi pentru geometria analitică şi cosmografie.

A. ANGELESCU. Membru delegat pentru probleme şi note de matematici superioare.

TH. ANGHELUŢĂ şi GH. BRATU. Membri delegaţi pentru probleme propuse de matematici superioare.

P. SERGESCU. Membru delegat pentru exerciţii şi chestiuni de examen.

C. MALCOCI. Membru delegat pentru alcătuirea tablei de materii.

E. ABASON, N. ABRAMESCU, LT. COL. G. BUICLIU, V. CRISTESCU, M. GHERMĂNESCU, R. IANCULESCU, N. KAUFMANN, LT.-COL. G. LITEANU, CR. MATEESCU, O. ŢINO, GH. ZAPAN şi CĂPITAN GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

---

*) Societatea este administrată şi reprezentată de o delegaţie alcătuită din doi membri şi un cassier. (Art. 13 din Statute).

MEMBRII.

1	1922, Mart. 1*	ABASON E. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Direcţia Generală a Apelor. Asistent la Şcoala Politechnică. — Strada Justinian, 20. Bucureşti.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. — Piaţa Doja, 12. Timişoara.
4	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
5	1922, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea din Cluj.
6	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Str. Clopotarii Vechi, 15. Bucureşti.
7	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos Aires.
8	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Spiru Haret. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti.
9	1912, Aug. 28	BELEŞ I. Inginer-Şef. — Director în administraţia centrală a Ministerului Lucrărilor Publice. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Regală 12. Bucureşti.
10	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. — Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Sf. Constantin, 31. Bucureşti.
11	1920, Ian. 10	BRATU GH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. Prodecan al Facultăţii de Ştiinţe. Profesor la Academia Comercială din Cluj. — Str. Brătianu, 29. Cluj.
12	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Directorul serviciului pădurilor C. F. R. — Str. Scaune, 33. Bucureşti
13	1920, Aug. 15	BUDEANU I. C. Inginer. — Societatea „Electrica". Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Parcul Bonaparte. Str. B, 32. Bucureşti.
14	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. I. Locot.-Colonel de Artilerie. — Ajutor al Comandantului Şcoalei Speciale a Artileriei. Profesor la Şcoala Specială a Artileriei, la Şcoala militară de Artilerie şi la Şcoala Politechnică din Timişoara. — Şcoala Specială a Artileriei. Timişoara.
15	1924, Ian. 30	BUNESCU AL. Inginer. — Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele.—Domiciliu : Bul. Ferdinand, 74 B. Bucureşti. Birou : Popa Lazăr, 7. Bucureşti. Telefon 53/49.
16	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer. — Şeful Secţiei a II-a Intreţinere. — Gara T.-Severin.
17	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer.—Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Matei Milo, 2 bis. Bucureşti.
18	1921, Mai 4	BUŞILĂ I. Inginer.—Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti.— Str. Esculap, 6 bis. Bucureşti.

*) Data admiterii.

19	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer. — Inspector principal la C. F. R. — Str. Sf. Sava, 16. Iaşi.
20	1910, Aug. 3	CAPRIEL DICRAN. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Democraţiei, 37. Galaţi.
21	1922, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer. — Industriaş. — Str. Visarion, 5. Bucureşti.
22	1920, Mart. 1	CARAMAN E. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Vulturului, 20. Galaţi.
23	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer. — Şef de secţie C. F. R. — Comrat. Basarabia.
24	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer-Şef. — Şeful biroului technic al serviciului hidraulic. — Bulevardul Elisabeta, 87. Bucureşti.
25	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer.—Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. Pantelimon, 34. Bucureşti.
26	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer.— Director la Creditul Technic.—Str, Marconi, 3. Bucureşti.
27	1895, Sep. 15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Ministru al Industriei şi Comerţului. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti.
28	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer.— Director technic al Fabricii de hârtie Letea. Bacău.
29	1895, Sep. 15 (fondator)	CRISTESCU VASILE. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului technic din Direcţia Generală de Construcţii de C. F.— Str. 11 Februarie, 2. Bucureşti.
30	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici.— Profesorul la Liceul Militar „Mânăstirea Dealului". Târgovişte.
31	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer. — Str. Dima Popovici, 18. Craiova
32	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. Colonel în Rezervă.—Str. G. D. Pallade, 72. Bucureşti.
33	1909, Iulie 1	FILIPESCU EM. GH. Inginer. — Director technic la Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Vasile Lascăr, 216. Bucuresti.
34	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Bolintineanu, 10. Bucureşti.
35	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer-Şef. — Str. Luigi Cazzavilan, 8. Bucureşti.
36	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General.—Directorul General al Serviciului Inbunătăţirilor Funciare.—Str. G. D. Pallade, 35. Bucureşti.
37	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer. — Directorul Fabr. de Chibrituri—Cluj.
38	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU MIHAIL. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul Cantemir Vodă.— Rtr. Popa Nan, 79. Bucureşti.
39	1913, Aug. 30	GHEORGHIU MIRCEA. Inginer. — Comisiunea mixtă a Porţilor de Fier. — Orşova.

*) Data fondării revistei „Gazeta Matematică". Societatea „Gazeta Matematică", a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

40	1913, Aug. 30	Gheorghiu S. I. Inginer-Şef. — Subdirector general la Societatea generală de Gaz şi Electricitate. —Str. Dionisie, 94. Bucureşti.
41	1921, Mai 4	Ghimuş A. D. Căpitan. — Comandamentul Şcoalelor şi Centrului de instrucţie al Geniului. — Str. Vasile Lupu, 18. Bucureşti.
42	7910, Iunie 2	Grigorescu C. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice— Str. Plantelor, 42. Bucureşti.
43	1920, Ian. 10	Gutzu Victor. Inginer.—Directorul Manufacturei de Tutun.—Iaşi.
44	1924, Ian. 30	Ianculescu R. Inginer. Licenţiat în Matematici.—Şeful Serviciului Technic al Soc. „Frigul". — Str. Serei, 4. Bucureşti.
45	1922, Mai 10	Iliescu Gh. Inginer. — Subdirectorul Fabricelor de Chibrituri şi Timbre. — Fabrica de Chibrituri. Bucureşti.
46	1895, Sept. 15 (fondator)	Ioachimescu Gh. Andrei. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. Buzeşti, 76. Bucureşti.
47	1920, Ian. 10	Ioanovici Aurel. Inginer.— Str. Dr. Felix, 41. Bucureşti.
48	1922, Noem. 1	Ionescu V. D. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Şcoala Normală Superioară. Paris.
49	1895, Sept. 15 (fondator)	Ionescu I. Inginer Inspector General. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Membru în Consiliul technic superior al Lucrărilor Publice; în Consiliul permanent al Instrucţiunii Publice, pentru partea industrială; în Comitetul de Direcţiune al Poştelor, Telegrafelor şi Telefoanelor; în Comitetul de Direcţiune al Construcţiunilor de Căi Ferate; Vice-preşedinte al Comisiunii interimare a Capitalei. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Căluşei, 23, Bucureşti.
50	1912, Iunie 2	Jijie Adam. Căpitan Comandor în rezerva marinei. Licenţiat în Ştiinţe. Inginer Electrician.—Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
51	1924, Ian. 30	Kaufmann N. Inginer.—Subşef de Secţie la C. F. R.—Hotel Oltenia Str. Unirii, 5. Reşiţa.
52	1905, Mart. 1	Lalescu Tr. Doctor în Matematici. Inginer electrician.—Profesor Universitar. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Deputat. — Str. Vasile Boerescu, 19. Bucureşti.
53	1919, Sep. 12	Linteş I. Căpitan din Aeronautică. — Ecole supèrieure d'Aéronautique. Paris.
54	1921, Mai 4	Liteanu I. Gh. Lt. Colonel.—Marele Stat Major al Armatei. Profesor la Şcoalele Militare ale Aeronauticei. —Aleea Sevastopol, 27. Bucureşti.
55	1913, Aug. 30	Malcoci C. Inginer-Şef. — Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre. — Fabrica de Chibrituri. Bucureşti.
56	1921, Febr. 5	Mareş T. Inginer. — Direcţiunea generală de Poduri şi Şosele, Studii şi Construcţii, din Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Popa-Tatu, 21. Aucureşti.
57	1922, Mai 10	Mateescu Cr. Inginer.— Societatea „Electrica", Bucureşti.— Str. Maltopol, 12. Bucureşti.

58	1921, Febr. 5	Mihalopol C. Inginer-Şef. — Str. Profesori, 6 bis. Bucureşti.
59	1925, Febr. 11	Mircea M. E. Inginer. — Şeful Schelei Runcu a Societăţii „Concordia". — Scorţeni, prin Gara Băicoi. Jud. Prahova.
60	1909, Iunie 1	Mirea N. Şt. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici — Profesor la şcoala superioară de Arhitectură. — Str. Inundaţiei, 8. Bucureşti.
61	1920, Ian. 10	Mititelu C. Claudiu. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Subdirectorul Manufacturii de tutun „Belvedere". — Bucureşti.
62	1920, Ian. 10	Mititelu C. I. Inginer.—Bulevardul Elisabeta, 60. Bucureşti.
63	1906, April. 1	Moţoi I. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Dionisie, 59. Bucureşti.
64	1909, Noem. 1	Năsturaş D. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Iulia Hajdeu. Bucureşti.
65	1922, Martie 1	Negretzu I. Inginer de Mine.—Antreprenor minier.—Str. Şerban Vodă, 170. Piteşti.
66	1910, Mai 20	Nichifor A. G. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Docent Universitar. Profesor-conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dimitrie Racoviţă, 32. Bucureşti.
67	1922, Noem. 4	Nicolau Th. M. Inginer.— Direcţiunea G-lă de Poduri şi Sosele, Studii şi Construcţii Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Răsurilor, 24. Bucureşti.
68	1920, Oct. 28	Niculescu Cristea. Inginer-Şef. — Bucureşti.
69	1923, Iulie 4	Niculescu Gh. Căpitan de Artilerie. — Şcoala Superioară de Aeronautică din Paris.
70	1922, Martie 1	Onicescu O. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de ştiinţe din Bucureşti.— Str. Clopotarii Vechi, 25. Bucureşti.
71	1913, Oct. 7	Orăşanu D. Cezar. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor-conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Profesor la Şcoala de Topometrie a Cadastrului. Profesor la Şcoalele speciale ale Aeronauticei. Profesor la Şcoala Specială de Geniu. Antreprenor de Lucrări. — Str. Ştirbey Vodă, 45. Bucureşti.
72	1910, Mai 20	Orăşanu Gr. Licenţiat în Matematici.—Inspector şcolar. Profesor la Liceul din Ploeşti.—Str. Stănică Marin, 32. Ploeşti.
73	1914, Dec. 20	Panaitescu Sc. General de divizie în rezervă. — Membru corespondent al Academiei Române. Consilier la Banca Românească din Chişinău.—Chişinău.
74	1924, Ian. 30	Paşcanu S. Inginer.—Str. Domnească, 115. Galaţi.
75	1911, Dec. 17	Patriciu G. Titus. Licenţiat în Matematici. — Directorul Liceului statizat de băeţi „M. Kogălniceanu". — Str. Rosetti, 8. Iaşi.
76	1920, Oct. 28	Philippide M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţiune pe Dunăre. S. R. D.—Str. Radu Vodă, 25. Bucureşti.
77	1911, Aug. 11	Popescu Gh. Inginer Inspector General. — Director General al Societăţii Naţionale de Credit Industrial. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. General Praporgescu. Bucureşti.
78	1922, Aug. 31	Popescu Ion. Inginer.—Stradela General Lahovary 5. Bucureşti.

79	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel din Artilerie.—Str. Câmpineanu, 46. Bucureşti.
80	1910, Aug. 3	RADU E. M. Inginer-Şef.—Director în Direcţia Generală de Poduri şi Şosele, Studii şi Construcţii. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. Semilunii, 5. Bucureşti.
81	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer. — Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. D. Racoviţă, 14. Bucureşti.
82	1895, Sept. 15 (fondator)	ROCO M. Inginer Inspector General. — Str. Popa Tatu, 11. Bucureşti.
83	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Str. Fracmazonă, 114. Bucureşti.
84	1904, Sept. 1	SALINGY M. Inginer Inspector General.—Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Basarabia, 10. Bucureşti.
85	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer. — Directorul Societăţii Clădirea Românească. — St. Semicercului, 7. Bucureşti.
86	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU C. VICTOR. Inginer. — Str. Temişana, 34. Bucureşti.
87	1919, Sept. 12	SERGESCU P. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor suplinitor la Universitate. — Bucureşti.
88	1921, Feb. 5	SFINŢESCU C. Inginer. — Directorul General al Cassei Lucrărilor Oraşului Bucureşti. Profesor la Şcoala Superioară de Arhitectură. — Sos. Kiseleff, 25. Bucureşti.
89	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer-Şef.—Direcţia II-a de Poduri şi Şosele. — Str. Sf. Ştefan, 35. Bucureşti.
90	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti.
91	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Societatea Edilitatea. — Str. Toamnei, 36. Bucureşti.
92	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Profesor la Liceul Naţional şi Liceul Militar din Iaşi. — Str. Cuza-Vodă, 22. Iaşi.
93	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General.— Director General al Soc. Pietroşani.—Str. Aurel Vlaicu, 22. Bucureşti.
94	1910, Mai 20	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici.—Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin".—Str. Scaune, 33. Bucureşti.
95	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici.— Profesor la Liceul Gh. Şincai.— Str. Mihail Cornea, 80. Bucureşti.
96	1895, Noem. 1	ŢIŢEICA GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Membru al Academiei Române. Profesor la Facultatea de ştiinţe din Bucureşti.— Str. Dionisie, 82. Bucureşti.
97	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer.—Director la Creditul Technic Transilvănean.— Calea Victoriei, 23. Cluj.
98	1914, Dec. 10	VARDALA I. Inginer Inspector General. — Director General al Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Str. Dimineţii, 4. Bucureşti.
99	1923, Mart. 26	VASILESCU Gr. Inginer.— Comisia Europeană a Dunării. — Sulina.

100	1920, Ian. 10	Vasilescu C. I. Inginer.—Directorul Serviciului Technic R. M. S.—Manufactura de tutun „Belvedere". Bucureşti.
101	1925, Aug. 26	Vasiliu M. Inginer. — Str. Vaselor 70. Bucureşti.
102	1924, Ian. 30	Zamfirescu Gr. Inginer. — Str. Popa Lazăr, 7. Bucureşti.
103	1920, Sept. 28	Zapan Gh. Profesor şi Director de studii la Institutul Naţional de Educaţie Fizică. — Str. Maior Ene. Bucureşti.
104	1921, Mai 4	Zapan Gr. Căpitan-aviator (Pilot şi observator). Inginer hotarnic.—Director de studii şi Profesor la Şcoala de Pilotaj a Aviaţiei.—Str. Dorobanţi, 1. Tecuci.
105	1925, Aug. 26	Zlatcu St. C. Inginer mecanic. Diplomat din Şcoala Inaltă Technică din Zürich — Str. Martir, 10. Bucureşti.

†

MEMBRII DECEDAŢI *).

		Data admiterii	Data morţii
1	Alexandrini O.	1895 Nov. 15	1905 Sept. 6.
2	Balaban V.	1895 Sept. 15	1895 Sept. 22.
3	Davidescu Em.	1895 Sept. 15	1905 Aug. 28.
4	Erbiceanu C.	1898 Sept. 15	1904 Apr. 3
5	Nicolaevici G.	1909 Iunie 1	1917.
6	Nicolescu N.	1895 Sept. 15	1924 Mai 5.
7	Roşu Al.	1910 Iunie 21	1917 Apr. 17.
8	Saligny A.	1914 Dec. 9	1925 Iunie 17.
9	Teodor D. I.	1906 Apr. 1	1924 Iulie 30.
10	Teodorescu I. S.	1914 Iulie 12	1918 Dec. 22.
11	Zottu I. G.	1895 Sept. 15	1902 Iulie 8.

*) Aci sunt trecuţi numai redactorii şi membrii, cari au stat la *Gazeta Matematică*, pânăla sfârşitul vieţii lor, în ordine alfabetică.

TREIZECI DE ANI.

Incă un popas. In şirul nesfârşit al vremii, care curge fără încetare, Gazeta Matematică înscrie o nouă crestătură: *încheerea anului al treizecilea de apariţie.*

E adevărat că numărul 30 nu are, pe cât ştiu, proprietăţi aritmetice deosebite, care să-l scoată în evidenţă din rândul numerelor întregi; nu e nici număr prim, nici patrat perfect. Afară numai dacă vreun iscusit cunoscător al teoriei numerelor, nu-i va găsi particularităţi nebănuite. In orice caz, nu din motive aritmetice facem acest popas, ci din motive sufleteşti.

Acum cinci ani, vechii redactori din anul întâi al Gazetei Matematice, au sărbătorit, printr'un număr dublu festiv, scris numai de ei, încheerea unui sfert de veac. A fost, din cauza împrejurărilor, o serbătorire restrânsă, cu caracter retrospectiv; o serbătoare de amintire a redactorilor şi corespondenţilor pe cari i-am pierdut, unul câte unul, în drumul lung şi greu pe care-l străbătuse Gazeta, până atunci. A fost mai mult o reculegere solemnă, cum se obişnueşte să se facă în faţa mormântului Eroului necunoscut.

Acum, după trecere de cinci ani din al doilea patrar de veac din existenţa Gazetei Matematice, avem motive numeroase să dăm alt caracter sărbătorii.

In rândul întâi, e faptul însemnat, care merită să fie notat, că în timpul de faţă, când mai toate revistele din ţară şi din streinătate o duc greu şi apar neregulat, Gazeta Matematică şi-a păstrat neştirbită reputaţia de apariţie regulată.

In al doilea rând, în cei din urmă cinci ani, înrâurirea Gazetei Matematice, care a dat rezultate aşà de strălucite în trecut, a căpătat o înfăţişare nouă şi neaşteptată. Numărul celor cari se ocupă de ştiinţele matematice, elementare sau superioare, a crescut aşà de mult, în cât, precum încolţesc primăvara mugurii pe ramurile unui copac plin de viaţă, aşà au început să apară, în diferite părţi ale Ţării — în Banat, în Ardeal, în Basarabia, în vechiul Regat — o mulţime de alte reviste matematice. E semn prevestitor al unei înfloriri ştiinţifice bogate, restrânse acum numai la ştiinţele matematice, dar care, firesţe, se va întinde la toate ramurile ştiinţei.

Şi e o mare fericire că începutul acestei înfloriri se face cu

matematica. Cugetarea românească va căpătă de sigur, pe această cale, vigoarea şi orientarea precisă, caracteristică acestei ştiinţe.

In fine, serbătoarea noastră va cuprinde şi pe corespondenţii noştri de altă dată, chiar dacă acum nu mai au nimic comun cu ştiinţa pe care au cultivat-o cu ardoare. I-am invitat să vie în mijlocul nostru, ca să-şi aducă aminte de sforţările din tinereţe şi ca să ne dăm seama împreună de foloasele pe care le-au scos, direct sau indirect, din studiul acestei ştiinţe.

Şi sperăm că din constatările pe care le vom face, va rezultă acea încredere, care cam lipseşte la noi, că şi în Ţara românească, prin muncă statornică, se poate face operă serioasă, trainică şi desinteresată.

Dar mai e încă cevà. Redactorii cei vechi au dorit să se bucure că din cei o sută şi mai bine de membri ai societăţii «Gazeta Matematică» s'au găsit destui care să-şi ia sarcina grea a administrării revistei, a îngrijirii de tipărire, a strângerii materiei, a redactării de articole, note, bibliografii, probleme rezolvate, exerciţii, probleme propuse, a facerii copertei şi a tutulor mărunţişurilor migăloase care asigură apariţia unei reviste. Serbătoarea actuală sprijinită pe trecut, priveşte mai mult perspectivele viitorului. Către el se îndreptează aspiraţiile noastre ale tutulor. Şi viitorul Gazetei Matematice e fără îndoială un element din viitorul Ţării noastre. Cu această convingere adâncă şi călăuzitoare a muncii noastre de până acum, serbătorim încheerea anului al treizecilea al Gazetei Matematice.

G. Ţiţeica.
Delegat pentru rapoarte.

Din Corespondent, Membru în Societatea „Gazeta Matematică“.

Sunt 15 ani deatunci şi parcă-i azi!

Modest corespondent al «Gazetei Matematice», cu o vechime numai de 7 ani, să te pomeneşti într'o bună zi, alăturea în Societate cu stâlpii şi corifeii «Gazetei», nu-i lucru de glumă!

Şi totuşi minunea aceasta mi s'a întâmplat mie!...

De aceea, țiu s'o povestesc tineretului de azi, vrednici corespondenți ai noștri, — ca să vadă cu câtă bunăvoință mi-au întins mâna și m'au luat alături cu ei, corifeii matematicelor dela noi, pe cari ca elev îi admirasem «pe nevăzute», iar ca student, în urmă, avusesem fericirea de a-i avea profesori, dar *numai pe câțivà!*

Erà în Aprilie 1910, la sfârșitul vacanței de Paști... Abia îmi începusem cariera de tânăr dascăl secundar; și cum eram însuflețit de dragostea de «Gazetă», la care lucrasem, după puterile mele, până chiar în acel an, — am asistat vreo două zile, la Concursul ținut de Societate, între cei mai buni corespondenți din țară, elevi de liceu!

Intr'una din zile, pare-mi-se ultima a Concursului, trec să-mi vizitez pe vechiul meu coleg de liceu și de Universitate, GABRIEL THIERRIN, directorul pensionului cu același nume, din apropierea Universității!

Acolo, curtea plină de *concurenți*, iar într'un colț, câțivà «corifei» și «vechi membri», pe care m'am mărginit să-i salut respectuos, *dela distanță!*

Se pregătià luarea unei fotografii *în grup;* membrii Societății împreună cu candidații la Concurs.

Fotograful erà «burzuluit», nevoie mare de oarece soarele se apucase să cocheteze cu niște nori neastâmpărați.

Grupul se înjghebase. In față, 4 elevi culcați, ținând un tablou alegoric, cu *simboluri matematice,* prezentat de «Gazetă» la Expoziția din 1906. După aceea, stând jos pe scaune, veniau «stâlpii și vechii membri» ai Societății, iar la spate 3 rânduri de candidați, *în picioare.*

Lucrurile păreau că merg bine, numai soarele nu se decideà să lase norii să-i treacă în față! Țineà morțiș soarele să admire grupul!

Când soarele se mai cumințise, iată că apare pe poarta școlii, *încă un vechiu membru* al Societății, D-l Ing. G. FILIPESCU, profesor la Școala Politechnică.

Pentru a nu turbură grupul, dat fiind și momentul, Domnia-Sa se așază în picioare *alături* de prima linie de candidați.

Un geometru dintre «corifeii» de jos, fără a privì măcar înapoi, simte *un fior,* produs de o «lipsă de simetrie» și aproape în mod firesc caută o soluție! Care credeți că a fost?

O veţi vedea-o acum!... Cum eu priveam grupul, geometrul mă ocheşte şi-mi spune:

— «D-le NICHIFOR, te rog treci şi D-ta în stânga, de partea opusă D-lui FILIPESCU». Şi cum fotograful incepeà să fie «gata», *m'am pomenit formând în adevăr simetrie*, mai ales că întâmplarea făcuse să am tot «pălărie tare» ca şi D-l FILIPESCU!

Lucrurile nu s'au terminat însă aci!...

Ilustrul «geometru», şi-a făurit în minte şi mijlocul prin care, *simetria să fie o soluţie nu numai necesară dar şi suficientă (!);* — şi m'a poftit pentru seară la masa, pe care membrii Societăţii o dau obişnuit tuturor candidaţilor la Concurs.

Mi se făceà *o nouă cinste!*... M'am dus!...

Acolo masă bună şi voioşie «ca la mama acasă»!

Ce-a urmat, istoriseşte Cronicarul ŞT. MIREA, în Cronica lui despre «banchet» din 15 Mai 1910!

Reproduc numai ceeace interesează în povestirea mea:

«In urma unui toast ridicat de D-l I. IONESCU, prin care aduce «mulţumiri D-lui THIERRIN, că pune la dispoziţia elevilor veniţi la «Concurs, locuinţă gratuită, — D-l THIERRIN în cuvinte simple şi «sincere spune că s'ar simţi foarte fericit, dacă ar fi *admis ca «membru»*. Tunete de aplauze arată că vechii membri primesc bu«curos cererea.

«Lucrul *însă nu s'a isprăvit* — continuă cronicarul MIREA — «căci după câte-vă minute, harnicul nostru colaborator D-l G. NI«CHIFOR face aceiaşi cerere; alt ropot de aplauze, etc.»....

Şi acum încă un amănunt glumeţ!...

Abia m'am aşezat la locul meu şi amicul THIERRIN, care se nemerise la masă lângă mine, îmi spune:

— Măi, — să ştii că tu ca *membru* la Gazetă vei fi mai nou ca mine!

— Cum, de ce?

— Păi aşà, — nu ceruşi *primirea* cu 5 minute după mine?

— Aşa-i! dar ce importanţă are asta?

— Apoi să-ţi explic amice, îmi zice colegul.

Gazeta are tradiţiile ei, pe care le respectă cu sfinţenie. Intre ele este şi aceea că *cel mai nou la Gazetă*, face pe Secretarul de şedinţă. Şi să poftesti să lipseşti! Apoi, cum se terminaseră discursurile şi începuse partea glumeaţă, amicul GABRIEL a ţinut ca

şi adunarea «să ia act» că sunt «mai nou», iar el radios îmi zâmbeà ca «un superior» ! !

S'a râs mult pe această temă şi am râs şi eu, de oarece de Secretariat nu-mi erà frică, căci *scriu repede!* Din contră, mi-aduc aminte cu plăcere de această mică sarcină, dar *am avut grijà* peste vre-un an, să o transmit succesorului meu la Gazetă, nou ales ca *Membru în Societate!*

G. NICHIFOR.

26 August 1925.

PROPRIETĂŢI ALE TRIUNGHIULUI.

Fie AA', BB', CC' trei ceviene în triunghiul ABC. Paralela dusă din A' la AC taie pe BB' în A_1, iar paralela dusă tot din A' la BA taie pe CC' în A_2. Se găsesc analog punctele B_1; B_2; C_1; C_2. Dreptele A_1B_2; B_1C_2; C_1A_2 formează triunghiul $\alpha\beta\gamma$. Figura se bucură de mai multe proprietăţi.

1. *Triunghiul* $\alpha\beta\gamma$ *este asemenea şi asemenea aşezat cu triunghiul* ABC. Este destul a arătà că A_2C_1 este paralelă cu AC. Dreapta A_2C_1 taie pe AB şi BC în M şi N. Triunghiul BMN tăiat de transversalele CC', AA' ne dă:

$$CN/CB \cdot C'B/C'M \cdot A_2M/A_2N = 1, \quad AM/AB \cdot A'B/A'N \cdot C_1N/C_1M = 1.$$

Triunghiurile asemenea $A'A_2N$, BMN şi $C'C_1N$, BMN dau:

$$A_2M/A_2N = A'B/A'N, \quad C_1N/C_1M = C'B/C'M.$$

Comparând aceste rapoarte cu egalităţile de mai sus, reese imediat:

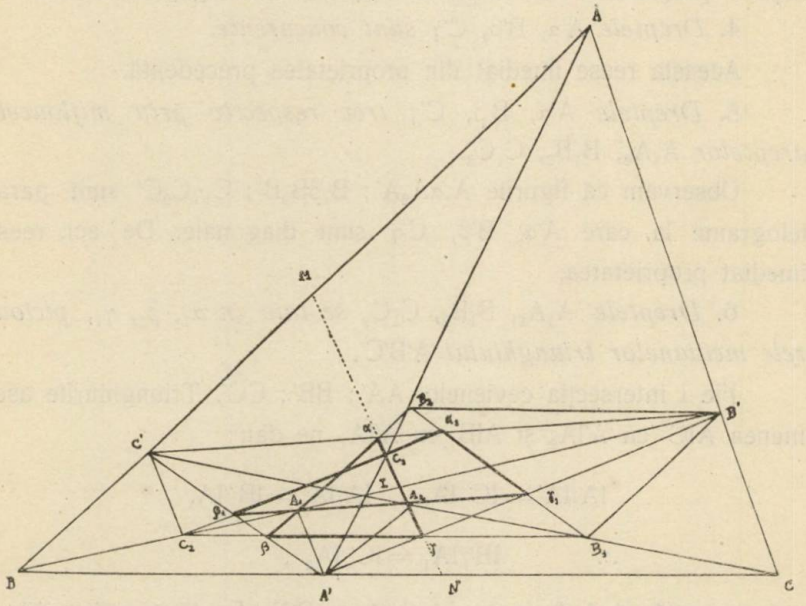
$$CN/CB = AM/AB,$$

adică MN este paralelă cu AC.

2. *Dreptele* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *sunt concurente.*

Aceasta reese imediat din omologia triunghiurilor $\alpha\beta\gamma$, ABC.

3. *Vârfurile triunghiului* $\alpha\beta\gamma$ *sunt pe laturile triunghiului* A'B'C'.



Fie β intersecția lui A_1B_2 cu A'C'. Să arătăm că și B_1C_2 trece prin β. Pentru aceasta este destul a arătă că

$$A'\beta/A'C' = CB_1/CC'.$$

Avem, în adevăr, din cauză că βB_2 este paralelă cu AB, că B_2B' este paralelă cu BC și că B_1B' este paralelă cu AB:

$$A'\beta/A'C' = A'B_2/A'A = CB'/CB = CB_1/CC'.$$

Egalitatea ultimelor rapoarte arată că B_1C_2 trece prin β. In mod analog, se arată că α şi γ sunt respectiv pe $B'C'$ şi $A'B'$.

4. *Triunghiul* $\alpha\beta\gamma$ *este omologic cu* $A'BC'$.

Triunghiul ABC este omologic cu $\alpha\beta\gamma$ şi cu $A'B'C'$, iar $\alpha\beta\gamma$ fiind înscris în triunghiul $A'B'C'$, şi $A'B'C'$ înscris în ABC, reese, după o proprietate cunoscută, că $\alpha\beta\gamma$ este omologic cu $A'B'C'$.

4. *Dreptele* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *sunt concurente.*

Aceasta reese imediat din proprietatea precedentă.

5. *Dreptele* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *trec respectiv prin mijloacele dreptelor* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

Observăm că figurile $A_1\alpha A_2A'$; $B_1\beta B_2B'$; $C_1\gamma C_2C'$ sunt paralelograme la care $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sunt diagonale. De ací, reese imediat proprietatea.

6. *Dreptele* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *se taie în* α_1, β_1, γ_1, *picioarele medianelor triunghiului* $A'B'C'$.

Fie I intersecţia cevienelor AA'; BB'; CC'. Triunghiurile asemenea AIC' cu $A'IA_2$ şi AIB' cu $A'IA_1$ ne dau:

$$IA/IA' = IC'/IA_2 \ , \quad IA/IA' = IB'/IA_1$$

$$\therefore \qquad IB'/IA_1 = IC'/IA_2 \ ,$$

ceeace arată că A_1A_2 este paralelă cu $B'C'$. Ea trece prin mijloacele B_1, α_1 ale dreptelor $A'C'$, $A'B'$, căci trece prin mijlocul dreptei $A'\alpha$, diagonala paralelogramului.

7. *Dacă* AA', BB', CC' *sunt înălţimile triunghiului* ABC, *iar* H *ortocentrul lui, dreapta care uneşte pe* A' *cu mijlocul dreptei care uneşte proecţiunile lui* A' *pe celălalte înălţimi şi analoagele ei, concură în punctul lui* GERGONNE *al triunghiului* $A'B'C'$.

Fie A_2, C_1 proecţiile lui A', C' pe CC', AA'. Fie A_1 proecţia lui A' pe BB'. Cercul înscris în $A'B'C'$ este tangent laturilor $A'B'$; $B'C'$; $C'A'$, în H_c, H_a, H_b. Punctele A_2, H_c, H_a, C_1 sunt coliniare după o proprietate pe care am demonstrat-o în *Gazeta Matematică*. B_1 fiind proecţia lui B' pe AA', punctele H_a, B_1, H_b, A_1 sunt colineare pentru acelaşi motiv.

Dreptele A_2C_1, AC şi A_1A' sunt paralele ca şi A_1B_1, BB, $A'A_2$. Dar patrulaterul $A_1A'A_2H_a$ este un paralelogram şi diagonala $A'H_a$ împarte pe A_1A_2 în două părţi egale.

Dreptele $H_a A'$; $H_c B'$; $H_b C'$ se taie dar în punctul lui GERGONNE al triunghiului A'B'C'.

N. BLAHA.
Caporal. Compania T. T. R. *)
Bucureşti.

† ALEXANDRU STOICA**).

Erà tânăr, elev în Anul II al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Sosele. Nu aveà lucrări; aveà însă inimă.

L'am cunoscut în liceu, discutând probleme din *Gazeta Matematică;* gazeta ne-a împrietenit. Îi admiram talentul cu care rezolvà problemele, dar mai mult mă uitam la dânsul ca la un om din trecut, la un om care ştià să fie prieten. Această distincţiune a sentimentului lui pare că ar fi fost înţeleasă, căci cu toate intenţiunile colegilor de a-l alege în Centrul studenţesc, de a-i da în grijă interesele lor, de a-l numi prieten, el erà totuşi un blazat.

Nu-i cunosc familia; nu ştiu date biografice. Nu ştiu dacă a crezut vreo dată că-i sunt prieten. De aceea, cu toate că-i pomenesc acì numele ca coleg, mă simţ cam stingherit.

*) Acest articol ni se trimesese de mult; s'a pierdut în timpul războiului şi a fost apoi regăsit.

I. I.

**) Acest articol mi-a fost trimis în timpul războiului, de regretatul nostru corespondent, Inginerul VINTILĂ N. GRIGORESCU, ca necrolog al camaradului său AL. STOICA, unul din distinşii corespondenţi ai Gazetei Matematice. Cerusem lui GRIGORESCU să aştepte terminarea războiului, ca să poată adunà cevà date pozitive despre viaţa şi activitatea colegului său, ceeace se vede că nu a putut obţine. Hotărindu-se ca acest număr să fie consacrat vechilor corespondenţi ai *Gazetei Matematice*, publicăm articolul aşà cum ne-a fost trimes din Paşcani, cu data de 8 Ianuarie 1918.

I. I.

Cu inima strânsă de durere, mă gândesc la Alexandru Stoica, mort în timpul luptelor care constituesc episodul cel mai dureros al nefericitului nostru război, la Turtucaia! Şi fără să vreau, tresar când pomenesc acest nume: „*Turtucaia*“! Fără să vreau, îmi trec prin minte toate ororile deslănţuite de cea mai crudă mişelie! Chinuri neînchipuite îmi cutremură firea!

Poate şi tu, iubite prieten, ai îndurat înţepăturile unei săbii bulgăreşti, scrâşnind din dinţi, dar mulţumit că ultimul glonţ nu l-ai păstrat pentru tine, ci l-ai înfipt în capul unui duşman.

Ai luptat eroic; te-ai purtat românește; ai contribuit şi tu la fala noastră de Român. Nu te plângem; te vom răzbuna. Te vom răzbuna cu prisosinţă; răzbunarea noastră va fi frumoasă. Nu vom plăti cu aceeaşi măsură cu care ei au împrăştiat durerea, ci îi vom îngenuchia, întregindu-ne neamul. Noi, cari am fost părtaşi ai întregului calvar românesc, ţi-o jurăm!

Cine va vorbi de războiul nostru, va vorbi de Turtucaia. Pentru profesorii Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, cari au lucrat la întărirea capului de pod unde ai murit apărându-l, Turtucaia va însemnà moartea unuia dintre distinşii lor elevi, iar pentru noi, colegii tăi, pierderea unui distins prieten.

Fii sigur, dragă Alexandre, că nu litere de aur, săpate brutal într'o lespede, ne vor sili să ne aducem aminte de tine. Nu. Mereu ne vom gândi la Războiu şi mereu ne vei apăreà învăluit în Tricolorul românesc, murind cu zâmbetul pe buze, cu neuitatul tău zâmbet, mulţumit că ţi-ai făcut datoria de Român.

† Sub-Locot. Vintilă Grigorescu.
Elev Anul I, Şcoala de Poduri.

Paşcani, 1918 Ianuarie 8.

Localul Societăţei „Gazeta Matematică“.

Cu acest număr, *Gazeta Matematica* intră în *a patra decadă* a existenţei ei. Au trecut mai mult de *treizeci de ani* de când ea a fost plămădită în Biurourile Serviciului pentru Construcţiunea Podului peste Dunăre la Cernavoda, de către ingineri tineri, abià eşiţi din fosta Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, şi, cu toate

acestea, nici până azi, nu numai că nu şi-a putut creeà un locaş propriu, dar nici nu a fost în stare să-şi poată închirià o căsuţă în care să-şi ţie întrunirile, să-şi păstreze archiva, colecţiunile de volume anuale, cărţile din Bibliotecile pe care le-a înfiinţat, sau pe care le primeşte în schimb, ori pentru recensiuni, etc. *Gazeta Matematică* s'a născut, a crescut şi trăeşte încă în stare nomadă.

Aparițiunea regulată a revistei cere două întruniri pe lună, ale redactorilor ei: una în preajma lui 25 ale lunii, pentru alegerea materiei de tipărit în numărul de pe luna următoare şi alta în preajma lui 3 ale acestei luni, pentru cercetarea manuscriselor şi alcătuirea copertei. Mai sunt apoi Adunări generale şi extraordinare ale Societăţii. Toate aceste întruniri s'au făcut şi se fac pe la diferite Biurouri tecnice, pe la diferite Administraţiuni publice şi particulare, pe la şcoli, pe la unele Societăţi, în special Societatea Politecnică din Bucureşti, ori pe la locuinţele redactorilor sau membrilor Societăţii noastre. Ca şi comercianţii ambulanţi, cari se adună odată pe an, — de Moşi, — în Câmpia Oborului din Bucureşti, tot aşà şi noi ţineam o şedintă anuală acolo! Uneori găsiam prielnic ca să ţinem şedinţele afară din Capitală, pe la lucrări tecnice, pe la băi, pe la staţiuni climaterice, pe unde se puteà găsi şi întruni mai mulţi membri. Astfel, am ţinut şedinţe la Iaşi, la Adjud, la Dealul lui Manole din Dobrogea, la Moreni, la Govora, la Buşteni, etc. Şedinţa pentru constituirea *Gazetei Matematice*, ca Societate, s'a ţinut la via subsemnatului dela Valea Călugărească, Judeţul Prahova. In Timpul Războiului, *Gazeta Matematică* s'a refugiat la Iaşi şi a continuat să apară acolo.

Arhiva *Gazetei Matematice* şi cărţile pe care le-a primit pentru recenziuni, precum şi revistele primite în schimb, stau răspândite pe la membrii Societăţii. Colecţiunile revistei şi exemplarele din Bibliotecile înfiinţate pe lângă dânsa s'au plimbat prin diferite cartiere ale oraşului, dela Apus la Răsărit şi dela Nord la Sud, ca de exemplu pe străzile Rotari, Călugărei, Traian, Occidentului, stând uneori prin dulapuri sau lăzi, dar şi dese ori răvăşite prin magazii, spălătorii, poduri de case, beciuri, iar azi zac şi mucigăesc în pimniţele Fabricilor de Chibrituri şi Timbre!

In streinătate, sunt reviste care apar decenii întregi la aceeaşi tipografie, iar unele chiar îşi au tipografia proprie. La noi, nu s'a găsit niciun tipograf care să ţie ca *Gazeta Matematică* să nu

plece dela dânsul, consimţind ca să o tipărească pe costul cu care ne-o făceà un altul. De aceea, revista a trecut pe la Tipografia Populară, pe la Tipografia Curţii Regale F. Göbl & Fii, pe la Tipografia Socec & Comp, pe la Tipografia Nicolaevici, devenită în urmă Tipografia Cooperativa; în Iaşi a apărut la vechia Tipografie H. Goldner, iar azi apare la Tipografia Fabricilor de Chibrituri şi Timbre-Filaret.

Din toate punctele de vedere dar, *Gazeta Matematică* se găseşte în stare nomadă! Faptul că în treizeci de ani nu a ajuns ca să-şi stabiliască un domiciliu fix nu trebuie să surprindă: câţi oameni cinstiţi nu sunt în stare să ajungă să-şi aibă casa lor, cu toată munca şi conştiinciozitatea pe care au pus-o toată viaţa în îndeplinirea îndatoririlor lor, dacă veniturile de-abià le-au ajuns ca să-şi ducă viaţa, în mod demn, de azi pe mâine! Fondatorii *Gazetei Matematice* şi-au impus dela început obligaţiunea de a scoate regulat revista la 15 ale fiecărei luni, în condiţiuni cât mai bune, acoperindu-se cheltuelile numai din veniturile ei şi din cotizaţiile membrilor, excluzându-se orice cerere de subvenţiuni sau ajutoare. Această hotărîre s'a păstrat cu sfinţenie până azi. Fondatorii Gazetei erau toţi ingineri şi ei ştiau că un edificiu care nu poate rezistà fără proptele se năruieşte când acelea putrezesc, ruginesc sau dispar, fiind ridicate de răuvoitori. Din această cauză, chiar donaţiunile benevole care ni s'au trimis au fost întrebuinţate pentru suplimente, premii, cheltuieli necesitate de concursuri, etc., ele nu au intrat nicidecum pentru apariţiunea regulată a revistei. Hotărîrea fondatorilor nu s'a putut ţine însă fără sacrificii continui de timp, de muncă şi de bani din partea redactorilor şi a membrilor *Gazetei Matematice;* ei şi-au zis că este mai demn ca revistă să trăiască nomadă de cât să moară în localul ei propriu! De aceia chestiunea localului propriu, chestiunea tipografii proprii ne-a preocupat numai ca deziderat îndepărtat. Numai la Adunarea generală din august 1920, unul din fondatori, regretatul NICOLAE NICOLESCU, a trecut în domeniul realităţii, depunând 500 lei pentru înfiinţarea unui fond destinat construirii unui local al *Gazetei Matematice.*

Din veniturile produse din vânzarea revistei, nu se pot realiza sumele necesare pentru cumpărarea său construirea unui local. Matematica nu e o marfă curentă care să înbogăţiască pe vânzătorii ei, nici o marfă de lux, care să fie căutată de bogaţi şi de

înbogăţiţi. Ea este numai o podoabă a spiritului, pe care o poartă puţini şi care nu se vede, ca pietrele preţioase, ce fac să strălucească mâinele, piepturile sau urechile ori cui, sau ori cărei le poartă.

Din afară de Societate, timp de treizeci de ani, nu s'a ivit nici un donator, nici un binevoitor, care să ţină să dea *Gazetei Matematice* o viaţă stabilă în Casa ei! Şi acest fapt este explicabil. Matematica nu este o ştiinţă plăcută celor cari nu se ocupă cu dânsa, ea sperie pe copiii mici şi mari mai rău ca gogoriţele şi joimăriţele pe prunci, îngrozeşte şi pune pe drumuri pe părinţii lor mai rău ca stafiile pe cei ce cred în ele. Cu teorii, cu formule, cu forme şi cu figuri matematice, nu se pot face serbări populare pentru strângerea de fonduri. Axiomele matematicilor nu pot duce la crearea de Fondaţiuni Matematice; pentru asemenea chestiuni, deseori, totul nu mai este egal cu suma părţilor, iar linia dreaptă nu mai este drumul cel mai scurt dela un punct la altul. De câte ori, banii destinaţi unor nenorocite, nu ajung acolo, prin risipa unei bătăi de flori, reduşi la o fracţiune infimă din totalitatea lor!

Trebuiesc dar găsite alte mijloace pentru rezolvarea chestiunii localului Societăţii *Gazeta Matematică*. Trebueşte profitat de unele împrejurări favorabile, de unele momente de entusiasm, pentru ca să se poată face cevà. O asemenea ocaziune s'a prezentat colegului nostru T. Lalescu, acum trei ani. Auzind că se dau locuri de case funcţionarilor Căilor Ferate de către Cassa Muncii, de pe lânga acea Administraţiune, s'a dus la colegul T. Constantinescu, pe atunci Directorul general al acelei Administraţiuni, ca să facă să se doneze şi *Gazetei Matematice* o parcelă din acele locuri. S'a făcut atunci un raport D-lui General Traian Moşoiu în acest scop, care a cerut Consiliului de Miniştri autorizarea de a cedà Societăţii *Gazeta Matematică* o parcelă pe Calea Griviţei, ceeace s'a aprobat prin Jurnalul No. 1361 din 21 iunie 1923. Prin raportul No. 13131 din 11 iulie 1923, D-l Ministru al Comunicaţiilor a cerut, pentru acel jurnal, Inalta aprobare a M. S. Regelui, Care a binevoit a semnà următorul Decret:

FERDINAND I,

Prin graţia lui Dumnezeu şi voinţa naţională, Rege al Românieí,

La toţi de faţă şi viitorii sănătate

Asupra raportului ministrului Nostru secretar de Stat la Departamentul comunicaţiilor sub No. 13134 din 19 iunie 1923.

Având în vedere şi jurnalul consiliului de miniştri No. 1361|923, 19 iunie 1923

Am decretat şi decretăm:

Art. I. Jurnalul consiliului de Miniştri No. 1361 din 19 iunie 1923 se aprobă de Noi.

Art. II. Se aprobă ca direcţiunea Casei muncii C. F. R. să doneze Societăţii „Gazeta Matematică" un teren de 250 m², situat în Bucureşti, calea Griviţei No. 158–166, cu obligaţia din partea Societăţii de a construi un local care să serviască ca centru de reuniune al membrilor săi, iar biblioteca să fie pusă şi la dispoziţiunea personalului căilor ferate române.

Art. III. Ministrul Nostru secretar de Stat la departamentul comunicaţiilor este însărcinat cu aducerea la îndeplinire a dispoziţiunilor din acest decret.

Dat la Sinaia, în 20 iulie 1923.

FERDINAND

Ministrul comunicaţiilor
GENERAL TRAIAN MOŞOIU.

No. 3714.

Rezultatul acestor demersuri şi acte, fiind aduse la cunoştinţa Societăţii, s'au adus mulţumiri persoanelor care au contribuit la obţinerea acestui rezultat, însă s'a atras atenţiunea că donaţiunea ar puteà fi anulată dacă nu este întărită printr'o lege. Şi de fapt, mai în urmă, s'au şi găsit duşmani ai matematicilor cari să încerce sdrobirea Innaltului decret Regal, reprodus mai sus. Graţie însă stăruinţelor neobosite, depuse de colegul T. LALESCU, Corpurile legiuitoare au votat legea de cedare a locului, care s'a promulgat prin Monitorul Oficial No. 80 din 11 Aprilie 1924, şi pe care o reproducem acì.

FERDINAND I,

Prin graţia lui Dumnezeu şi voinţa naţională, Rege al României,

La toţi de faţă şi viitori, sănătate:

Corpurile legiuitoare au votat şi adoptat şi Noi sancţionăm ce urmează:

Lege

Art. unic. *Se ratifică înaltul decret regal No. 3714 din 20 iulie 1923, prin care Direcţiunea generală C. F. R., Casa muncii, este autorizată a cedà în mod gratuit societăţii „Gazeta Matematică" parcela din calea Griviţei No. 158—166 în suprafaţă de 250 m², pentru a-şi construi local, care să serviască drept sediu al societăţi.*

Această lege s'a votat de Adunarea Deputaţilor în şedinţa dela 29 Fevruarie 1924 şi s'a adoptat cu unanimitatea de **nouăzeci şi opt** *voturi.*

Vice-Preşedinte, N. POPA-LISEANU.

Secretar, PETRE P. GÂRBOVICEANU.

Această lege s'a votat de Senat în şedinţa dela 10 martie 1924 şi s'a adoptat cu majoritate de **şeasezeci şi opt** *voturi, contra* **nouă.**

Vice-Preşedinte, TONY ILIESCU.

Secretar, G. POPESCU.

Promulgăm această lege şi ordonăm să fie învestită cu sigiliul Statului şi publicată în Monitorul Oficial.

Dat în Bucureşti, la 4 Aprilie 1924.

FERDINAND

Ministrul Comunicaţiilor
General de corp de armată
ARTUR VĂITOIANU

No. 1332.

Cu modul acesta, «Gazeta Matematică» se găseşte în posesiunea unui loc de mai bine de un an de zile. Lipsesc însă cu totul mijloacele de a puteà construi; mai mult încă, această posesiune îi incumbă sarcini, ca plăţi de impozite, cheltueli de împrejmuire, cumpărarea unor porţiuni de terenuri pentru a puteà eşi la alinierea străzilor, etc. Pentru găsirea mijloacelor de a se puteà realizà executarea localului, în şedinţa dela 25 iunie 1924, s'a ales un Comitet alcătuit din membri ai Societăţii, care erà pus sub preşedinţia de onoare a regretatului ANGHEL SALIGNY, având ca preşedinte pe

D-l T. CONSTANTINESCU, şi ca membri pe d-nii: C. BUŞILĂ, I. CAPRIEL, COL. C. FELIX, M. FILIPIDE, C. GRIGORESCU, A. G. IOACHIMESCU, T. LALESCU, ST. MIREA, I. NEGRETZU, G. NICHIFOR, C. ORĂŞANU, G. POPESCU, G. SĂPUNARU, N. V. TEODORESCU, G. ŢIŢEICA, I. VARDALA, iar ca secretar al Comitetului a fost ales D-l C. MITITELU. Mai menţionăm că din Comitet mai făceà parte şi regretatul I. D. TEODOR.

Având în vedere că locul Gazetei Matematice se află în apropierea Gării de Nord a Capitalei, membrii Comitetului au luat lăudabila iniţiativă de a găsi fondurile şi aranjamentele financiare necesare pentru a se clădi, pe acel loc, o casă mai mare de cât ar fi necesară pentru nevoile, pe care le-am arătat mai înainte, ale Gazetei Matematice, adică de a se face o construcţiune mai mare, care să aducă şi oarecare venituri pentru susţinerea şi propăşirea acestei reviste. Realizarea acestei dorinţe cere însă un timp mai mare pentru realizarea ei, şi de aceea, cu toată activitatea depusă de membrii Comitetului, până în prezent, soluţiunea problemei începerii construcţiunii nu este încă găsită; ea se află încă în perioada încercărilor succesive.

Ţinem să mai adogăm, că toate formalităţile pentru punerea în posesiune a locului, au fost făcută în mod gratuit de către D-l Avocat AL. IONESCU.

I. IONESCU.

PREMIILE ŞI ALTE DISPOZIŢIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE“

PENTRU

CURSUL ANULUI 1925—1926.

(1 Septemvrie 1925 — 31 August 1926).

In conformitate cu dispoziţiunile art. 11 din regulamentul general al fondurilor «Gazetei Matematice, subsemnaţii membrii ai Comisiunei pentru controlarea gestiunei acestor fonduri şi pentru privegherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui

fond, desemnați în adunarea generală, care a avut loc în ziua de 29 August 1924, aducem la cunoștință următoarele:

1. Din venitul anual al fondului «Spiru C. Haret», conform regulamentului pentru administrarea lui, publicat în «Gazeta Matematică» vol. XXVI pag. 108, urmează să se cumpere cărți de matematici pure și aplicate (literatură matematică), istoria matematicilor, varietăți și curiozități matematice, aparate și modele matematice, etc., care să se doneze bibliotecilor școlare dela școli secundare sau corespodenților merituoși, elevi ai acestor școli. Cărțile se vor distribui între începutul anului școlar și vacanța Crăciunului.

In baza hotărîrei luate de adunarea generală dela 28 August 1925, cărțile de felul celor enumerate mai sus, cumpărate din venitul anului expirat, s'au destinat să se doneze Liceului Militar din Târgul-Mureș.

2. Din venitul fondului «Lt. Col. G. Tănăsescu», al cărui regulament a fost publicat în Gazeta Matematică, Vol. XXVIII pag. 19, urmează să se dea cărți de matematică, primului clasificat la concursurile anuale ale «Gazetei Matematice».

3. Premiul bienal «Inginer H. Capriel», în valoare de 500 lei, pentru lucrări de matematici superioare sau pure aplicate, se acordă lucrărilor ce se vor prezentà societății de către: studenții Universităților, elevii Școalei de Poduri și Șosele sau de către elevii Școalelor de Artilerie, Geniu și Marină din țară.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» anul XVII pag. 361.

Subiectul lucrărei, pentru premiul pe anul 1926, a fost anunțat în «Gazeta Matematică» anul XXX, numărul 9 (pe luna Mai).

Lucrările trebuesc trimise Societății cel mai târziu pânăla 1 Mai 1926, iar rezultatul se va publică în numărul din Septemvrie 1926 al «Gazetei Matematice».

Premiul este indivizibil și, în cazul când nu se va găsi nicio lucrare meritorie, se va ține un nou concurs.

4. Premiul «Vasile Conta», în valoare de 200 lei, alimentat din fondurile «Gazetei Matematice», se acordă exclusiv pentru lucrări de filozofie matematică.

Regulamentul acestui premiu s'a publicat în «Gazeta Matematică» anul XXIX pag. 14.

Autorul trebuie să fie român şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Lucrările trebuiesc prezentate pânăla 1 Iulie ale fiecărui ani şi în cazul când pânăla această dată nu s'a primit nici o lucrare, se va aşteptă data de 1 Iulie anul următor şi aşă mai departe.

Comisiunea, care va examină lucrările prezentate după 1, 2, 3 etc., ani, va propune, pentru premiere, una sau două lucrări dintre cele mai bune, cu totalul sumelor strânse an cu an pânăla acea dată, sumă care, dacă intervalul e mai mare de 1 an, se va puteà divide între lucrările alese. Comisiunea însă va puteà să nu recomande nici una din lucrările prezentate.

Raportul Comisiunei însărcinată cu cercetarea lucrărilor se va supune desbaterilor adunărei generale extraordinare în cursul lunei Octomvrie, iar rezultatul se va publică în numărul din Noemvrie al «Gazetei Matematice».

5. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare în valoare de 200 lei, se acordă pentru cea mai bună publicaţiune de matematică aplicată la ştiinţele militare, apărută în cursul fiecărui an.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» anul XXIII pag. 9.

Autorul publicaţiunei trebuie să fie român, sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an.

In cazul când nu se găseşte nicio lucrare de premiat, sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voeşte a primi suma de 200 lei, ea se va da uneia din revistele în care se publică şi chestiuni de ştiinţă matematică aplicate la ştiinţele militare.

Comisiunea însărcinată cu examinarea publicaţiunilor militare apărute prin reviste sau cărţi speciale, pânăla 1 Septembrie anul trecut, precum şi manuscrisele ce s'ar aduce la cunoştinţa societăţei pânăla acea dată, va întocmi un raport ce se va supune desbaterilor Adunărei Generale extraordinare în cursul lunei Ianuarie.

Premiul se va anunţà în numărul ce apare în luna Martie şi se va acordà lucrărei premiate după apariţia numărului.

6. Din fondul «Anghel Saligny», destinat tipărirei bibliotecei technice a «Gazetei Matematice», se va scoate o a doua edi-

ţiune din volumul: Beton armat, revăzută şi adăogită, care va apare în cursul anului viitor.

7. Din fondurile bibliotecei «Gazetei Matematice», se retipăreşte volumul 8: Culegere de probleme de Algebră, ediţia a III-a, revăzută şi îngrijită de d-l TIBERIU POPOVICIU.

COMISIUNEA PENTRU PREMII:
IOAN BUŞILĂ,
CL. MITITELU.

NOTE MATEMATICE

1. *O proprietate a patratelor şi cuburilor.* Avem:

$$1^2 = 0^2 + 0 + 1, \qquad 1^3 = 1\,(0^2 + 0 + 1),$$
$$2^2 = 1^2 + 1 + 2, \qquad 2^3 = 2\,(1^2 + 1 + 2),$$
$$3^2 = 2^2 + 2 + 3, \qquad 3^3 = 3\,(2^2 + 2 + 3),$$
$$4^2 = 3^2 + 3 + 4, \qquad 4^3 = 4\,(3^2 + 3 + 4),$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$n^2 = (n-1)^2 + (n-1) + n. \qquad n^3 = n[(n-1)^2 + (n-1) + n].$$

GH. VASILIU.

2. *Asupra numerelor formate cu cifra 1.* Avem:

$$11 = 5 + 6,$$
$$111 = 55 + 56,$$
$$1111 = 555 + 556,$$
$$11111 = 5555 + 5556,$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

GH. VASILIU.

3. *O proprietate a şirului lui* FIBONACCI. Avem:

$$u_n u_{n+3} = (u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+2} + u_{n+1}) = u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2.$$

Facem succesiv $n = 0, 1, 2, 3, \ldots n$ şi sumăm. Găsim:

$$u_0 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_5 + \cdots + u_n u_{n+3} = u_{n+2}^2 - 1.$$

S. WEISS.

4. *Asupra triunghiurilor sferice echilaterale.*

1. Formula fundamentală devine:

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos A. \tag{1}$$

2. Rezolvând în raport cu A, avem:

$$\cos A = \frac{\cos a\,(1 - \cos a)}{\sin^2 a} = \frac{2\cos a \sin^2 \frac{1}{2}a}{2\sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a \cos a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{\operatorname{tg} a}. \tag{2}$$

3) Din prima egalitate de mai sus, scoatem:

$$\frac{1}{\cos A} = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos a\,(1 - \cos A)} = \frac{1 + \cos a}{\cos a} = 1 + \frac{1}{\cos a},$$

$$\therefore \qquad \sec A - \sec a = 1. \tag{3}$$

4) Din (2), scoatem:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos a}{\sin^2 a},$$

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}A \,.\, \sin^2 a = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a;$$

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2}A \cos^2 \tfrac{1}{2}a = 1$$

$$2\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}a = \pm 1. \tag{4}$$

5. Tot din (2), scoatem:

$$\cos A = \frac{2\cos a \sin^2 \frac{1}{2}a}{4\sin^2 \frac{1}{2}a \cos^2 \frac{1}{2}a} = \frac{\cos a}{2\cos^2 \frac{1}{2}a},$$

şi având:

$$\sec A \sec^2 \tfrac{1}{2}a = 2 \sec a. \tag{5}$$

N. D. Costeanu.

BIBLIOGRAFIE.

Societatea română de ştiinţe. Buletinul de ştiinţe matematice pure şi aplicate. Anul XXVIII. Ianuarie — Iulie 1925. Bucureşti. L'approximation des fonctions d'une variable réelle par une classe des sommes trigonométriques, par V. ALACI. Calcul tensoriel, 3-ième chapitre, par T. LALESCO.

Revista matematică din Timişoara. Anul V. No. 6. August 1925. Timişoara. Asupra unor formule de mecanică, de V. VÂLCOVICI.

Foaia matematică. Anul II. No. 8. August 1925. Chişinău. Asupra unor chestiuni de maximum şi de minimum, de TR. MĂXINOIU.

Curierul matematic. Vol. I. No. 6. August 1925. (Litografiat). Asupra unei teoreme a lui CESARO, de I. C. VASILIU. Consideraţiuni matematice asupra unor probleme filosofico-religioase, de N. C. SEGĂRCEANU.

Natura. Anul XIV. No. 7. Iulie 1925. Bucureşti. Călătoria unui matematician prin România în secolul XVIII, de ION IONESCU. (Cuvântare ţinută la Societatea română de ştiinţe, secţia matematică).

DR. CONST. CHIRICESCU. *Pascalia Bisericii creştine ortodoxe de răsărit în conformitate cu calendarul îndreptat.* Bucureşti 1925.

Intr'o broşură pe 54 pagini, autorul publică un *Referat* către Sfântul Sinod al Sfintei Biserici autocefale ortodoxe române, purtând data 22 Octomvrie 1924, un articol intitulat *Calendarul*, cu data de 21 Septemvrie 1924 şi altul, *Calendarul nostru nu este schimbat, ci îndreptat*, cu data de 21 Decemvrie 1924.

Sfântul Sinod a cerut autorului ca să întocmiască Pascalia în cadrele calendarului iulian îndreptat, în toamna anului trecut, fără a se schimbă vechia orânduială stabilită de Sfântul întâiul Sinod egumenic dela Nicea, din anul 325. Prin studii şi discuţiuni amănunţite, se arată că problema aşă pusă este insolubilă. Dacă se transpune datele la care ar fi căzut Paştele, în vechiul calendar iulian, în noul calendar îndreptat, atunci sunt ani în care această sărbătoare nu mai cade în intervalul dela 22 Martie la 25 Aprilie, cum a cerut Conciliul dela Nicea, ci trece uneori şi în luna lui Mai. Prin transpunere, se turbură unele aşezăminte canonice şi liturgice; dispare în unii ani postul Sfinţilor Apostoli Petru şi Pavel, după cum s'a dovedit anul trecut în această revistă în problema 3281. Din aceste motive, autorul admite această metodă pentru calculul Paştelor numai *provizoriu*. Trebuiesc căutate soluţii noi.

Autorul examinează apoi unele păreri emise până acum în această privinţă. Studiază propunerea făcută de inginerul PANAIT DONICI la 1898 arătând că conduce la date, pentru Paşte, anterioare Paştelui Evreilor. Apoi examinează lucrările Generalului P. VASILIU NĂSTUREL din 1901 şi ale Părin-

telui CONSTANTIN POPOVICI din 1904, şi propune o soluţiune pe următoarele baze:

1. Fixarea echinoxului de primăvară la 21 Martie.

2. Paştele va oscilà numai între 22 Martie şi 25 Aprilie, cum a prescris Conciliul dela Nicea.

3. Paştele va cădeà în prima Duminică care vine după luna plină astronomică, care cade în ziua echinoxului, sau în zilele următoare, până la cel mult 18 Aprilie.

4. Dacă Paştele astfef calculat cade înnainte, sau odată cu cel evreesc, atunci Paştele creştinilor se va pune în Duminica care vine după acela.

5. Nu se va mai ţine seamă de această din urmă condiţiune dacă ea conduce la date pentru Paşte peste 25 Aprilie.

Această din urmă excepţiune nu mai este conformă cu uzurile Bisericii, însă, fără dânsa, nu se pot îndeplini celelalte condiţiuni. Totalitatea condiţiunilor conduce la incompatibilitate, în unii ani. Autorul arată că au mai fost ani când Paştele ortodox nu a căzut după Paştele evreesc, din cauza schimbării Paştelui evreesc dela 14 la 15 Nissan, făcută de către rabinii SAMUEL, ADDA şi HILLEL, şi că în acest caz, nesocotirea, în unii ani, a condiţiunii de sub No. 4, este admisibilă.

Este de văzut dacă Bisericile ortodoxe vor admite acest mod de a vedeà, sau vor căutà o altă soluţiune, pentru a se puteà trece peste incompatibilitatea semnalată. Părerea mea, pe care am expus-o într'o Conferinţă ţinută la 31 Decemvrie 1923 la Societatea română de ştiinţe, secţiunea matematică, şi pe care am publicat-o într'o broşură intitulată *„Reforma Calendarului. Armonizarea lunii, săptămânii şi a sărbătorilor"*, este că necesităţile sociale, economice şi internaţionale vor duce în curând la aşezarea sărbătorii Paştelui la date fixe, pentru toată Creştinătatea, şi la fixarea, în zilele de Duminică, a tutulor sărbătorilor, care trebuiesc ţinute strict. Statutul funcţionarilor a redus mult sărbătorile anterioare lui, iar Legea repaosului duminical votată anul acesta, le-a desfiinţat mai pe toate. Starea de lucruri de azi, când Biserica chiamă pe drept credincioşi la rugăciune şi la leturghie, în timpul când legea îi trimete la lucru, nu poate contribui la întărirea simţimântului religios. Vor trebui făcute noi aşezăminte ale sărbătorilor în legătură cu Paştele. Liga naţiunilor şi-a pus printre altele şi rezolvarea chestiunii Calendarului, aşà că nu se poate prevedeà ce soluţiuni se vor adoptà în privinţa stabilirii sărbătorii Paştelui.

D-l CHIRICESCU închee studiul său cu cuvintele următoare: *„lucrarea de faţă am întocmit-o cu toată râvna şi buna credinţă de a-mi servì Biserica într'o problema atât de grea cum este aceasta, adoptarea vechii Pascalii şi introducerea ei în cadrele Calendarului iulian de curând îndreptat, cu respectarea hotărîrii dela Nicea şi a cerinţelor ştiinţifice"*.

Şi de fapt, aceasta este şi impresiunea cu care rămâne oricine citeşte lucrarea D-sale şi vede numeroasele tablouri calculate pentru determinarea datelor Paştelui.

I. IONESCU.

CERERI.

128. In *„Istoria Bucureştilor"* de G. I. Ionescu-Gion, la pag. 55 se spune: "Lăsase Radu Vodă boieri înţelepţi de căutau trebile ţării. Şi ii mai lăsase şi un *milion de galbeni* Radu Vodă Mihnea fiului său Alexandru Coconul, care sfârşeşte podoabele mănăstirii tatălui său".

Există vreun document, de pe atunci, din care să putem conchide cert că cuvântul *milion* erea introdus în ţară, pe acele vremuri?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2651. *Să se rezolve ecuaţia.*

$$(x+1)^7 - x^7 - 1 = a\,[(x+1)^5 - x^5 - 1].$$

† E. N. Barisien.

Soluţie dată de d-nii: Mircea I. Adam, Romeo D. Adam, Ion S. Antoniu, Nicu P. Arcadian, I. T. Bârsu, Martin Bercovici, A. Constantinescu, Ioan Coşereanu, A. Finţescu, Constantin I. Georgescu, Ioan Huber, E. Iliescu, Longin I. Ionescu. Pincu Katz, Em. M. Manolescu, I. Marian, Ştefan Marin, Gr. C. Moisil, Aurel Th. Nicolau, D. Panaitescu, Al. N. Popescu, Gh. Popescu, Tiberiu Popovici, M. Sarian şi Wilhelm Solomon.

Desvoltând pe $(x+1)^7$ şi $(x+1)^5$ după binomul lui Newton şi simplificând, putem scrie:

$$7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x = a\,(5x^4+10x^3+10x^2+5x)$$

$$\therefore\ 7x(x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1) - 5ax(x^3+2x^2+2x+1) = 0.$$

Observând că fiecare paranteză pentru $x = -1$ se anulează, înseamnă că ele se divid fiecare cu $x+1$; efectuând diviziunea putem scrie:

$$x(x+1)\,[7(x^4+2x^3+3x^2+2x+1) - 5a(x^2+x+1)] = 0,$$

$$\therefore\ x(+1)\ \{7[x^2(x^2+x+1)+x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)] - 5a(x^2+x+1)\} = 0,$$

sau încă:

$$x(x+1)(x^2+x+1)(7x^2+7x+7-5a=0.$$

De aci deducem:

$$x=0 \quad x+1=0, \quad x^2+x+1=0, \quad 7x^2+7x+7-5a=0$$

şi deci rădăcinile sunt:

$$x_1=0, \quad x_2=-1, \quad x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}, \quad x_{5,6}=\frac{-7\pm\sqrt{140a-147}}{14}.$$

PROBLEMA 3126. *Fie* A' *şi* B' *picioarele simedianelor* AK *şi* BK *dintr'un triunghiu* ABC *şi* P *un punct pe dreapta* A'B'. *Dreptele* AP *şi* BP *întâlnesc laturile* BC *şi* AC *ale triunghiului, în* A_1 *şi* B_1. *Se cere înfăşurătoarea dreptei* A_1B_1, *când* P *descrie dreapta* A'B'.

GR. MOISIL.

Această problemă a fost considerată în cazul mai general când K este oarecare, în G. M. V p. 133, unde i s'a dat o soluţie baricentrică, una geometrică şi alta cu ajutorul diviziunilor omografice, pe care nu le mai reproduc. Se ajunge acolo la concluzia că dreapta A_1B_1 înfăşură în general conica înscrisă triunghiului, având ca punct al lui GERGONNE, punctul K dat, adică tangentă laturilor în picioarele cevienelor punctului K $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

Ecuaţia baricentrică a conicei înfăşurate este

$$\sqrt{\alpha/\alpha_0}+\sqrt{\beta/\beta_0}+\sqrt{\gamma/\gamma_0}=0.$$

Credem că d. GR. MOISIL, departe de a avea cunoştinţă de existenţa acestei probleme generale, a propus-o pe a D-sale, în vederea unei aplicaţiuni a rezultatelor stabilite în studiul «Proprietăţi din Geometria triunghiului» G. M, XXIX, după cum, de altfel, rezultă şi din generalizarea pe care ne-o trimite d. N. BOTEA, şi din care extragem pasagiile concludente:

Eie P $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ un punct depe dreapta A'B'. Picioarele cevienelor lui P sunt A_1 $(0, \beta_1, \gamma_1)$, B_1 $(\alpha_1, 0, \gamma_1)$.

Ecuația dreptei A_1B_1 fiind

$$\alpha/\alpha_1 + \beta/\beta_1 = \gamma/\gamma_1,$$

se vede că dreapta A_1B_1 este polara trilineară a punctului $\theta\,(\alpha_1, \beta_1, -\gamma_1)$.

Acest punct descrie dreapta

$$\beta_0\gamma_0\alpha + \gamma_0\alpha_0\beta + \alpha_0\beta_0\gamma = 0,$$

căci punctul P descriind dreapta A'B', având ecuația

$$\beta_0\gamma_0\alpha + \gamma_0\alpha_0\beta = \alpha_0\beta_0\gamma,$$

vom avea evident

$$\beta_0\gamma_0\alpha_1 + \gamma_0\alpha_0\beta_1 = \alpha_0\beta_0\gamma_1.$$

Problema se reduce deci la teorema III-a din articolul mai sus menționat, al D-lui Gr. Moisil.

O generalizare mai largă, care duce la aceeași concluzie, a fost trimisă de D-l O. Bolgiu.

Au trimis soluțiuni în coordonate baricentrice, D-nii: M. Grümbaum, I. Goldștein.

Soluțiuni, cu ajutorul diviziunilor omografice, precum și una geometrică, însoțite de generalizare, au trimis D-nii: B. Barbălatt și M. Focșeneanu.

Soluțiune geometrică a trimis D-l S. Weiss.

Soluțiune analitică a trimis D-l L. Weiss.

Au arătat că problema e cunoscută, reproducând unele soluțiuni, D-nii: C. Ciorănescu, Paul Ionescu, I. Vasiliu.

M. G.

PROBLEMA 3144. *Care este patrulaterul de arie minimă, care se poate face cu laturi de mărime dată?*

I. Ionescu.

Soluție dată de D-l I. C. Vasiliu.

Fie $2a$, $2b$, $2c$, $2d$ lungimile laturilor unui patrulater ABCD și S aria lui. Se cunoaște formula:

$$S = \sqrt{2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4 - 8abcd\cos(A+C)}.$$

De aci, se vede că aria S are un maximum pentru $\cos(A+C) = -1$, adică $(A+C) = 180^0$, ceeace corespunde patrulaterului inscriptibil. Aria S scade când $(A+C)$ se îndepărtează de 180^0, fie în minus,

fie în plus, adică când tinde spre 0^0 sau 360^0. Insă $(A+C)$ se micşorează sau se măreşte odată cu lungimea diagonalei BD, căci laturile unghiurilor A şi C rămânând necontenit aceleaşi, unghiurile sunt cu atât mai mari cu cât BD din triunghiurile BAD, BCD este mai mare.

Reese de aci, că minimum căutat pentru S corespunde celei mai mici sau celei mai mari diagonale BD. Ea trebuie aleasă însă aşà ca *patrulaterul să rămâie convex.* Sub această condiţiune, minimum lui BD are loc când B sau D vine pe AC, iar maximum când A sau C vine pe BD. In ambele cazuri însă, patrulaterul se reduce la un triunghiu, având ca bază suma a două din lungimile date şi ca laturi pe celelalte două lungimi date. Razele triunghiurilor ar puteà fi dar:

$$2(a+b),\quad 2(a+c),\quad 2(a+d),\quad 2(b+c),\quad 2(b+d),\quad 2(c+d).$$

Să presupunem că avem:

$$a>b>c>d. \tag{1}$$

Pentru ca un triunghiu să existe, trebuie ca o latură să fie mai mică decât suma celorlalte două. Din (1) însă scoatem:

$$a+b>c+d,\qquad a+c>b+d.$$

Deci nu putem obţine triunghiuri având ca baze pe $2(a+b)$, sau $2(a+c)$. Rămâne de comparat triunghiurile ce putem face cu celelalte baze. Mai întâi, observăm că putem lua bazele $2(a+d)$ şi $2(b+c)$ numai dacă:

$$a+d<b+c,\qquad \text{sau}\qquad b+c<a+d.$$

Aceste neegalităţi fiind contradictorii, reese că, dacă putem forma pe unul din triunghiuri, nu mai putem forma pe celălalt. Vom deosebì două cazuri, după cum putem forma unul sau altul din cele două triunghiuri.

1. *Există triunghiuri având ca bază suma lungimilor extreme:*

$$a+d<b+c.$$

Fie S_{ad} aria triunghiului având laturile $2(a+d)$, $2b$, $2c$. Avem formula cunoscută:

$$S_{ad}^2=(a+b+c+d)(-a+b+c-d)(a-b+c+d)(a+b-c+d).$$

Dacă permutăm a cu b, găsim:

$$S_{bd}^2 = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(-a+b+c+d)(a+b-c+d).$$

Scăzând aceste egalități, găsim:

$$S_{ad}^2 - S_{bd}^2 = 4(a+b+c+d)(a+b-c+d)(b-a)d. \qquad (2)$$

Cum $c<a$, $b<a$, reese că $S_{ad}<S_{bd}$. Permutând în (2) pe b cu c, reese că $S_{ad}<S_{cd}$. Deci S_{ad} este aria cea mai mică. De aici, conchidem că, dacă există triunghiuri având ca bază suma lungimilor extreme, atunci acestea sunt triunghiurile de arie minimă

2. *Există triunghiuri având ca bază suma lungimilor medii.*

Ca și pentru stabilirea egalității (2), găsim:

$$S_{bc}^2 - S_{bd}^2 = 4(a+b+c+d)(-a+b+c+d)(d-c)b.$$

Triunghiul având laturile $2(b+c)$, $2a$, $2d$, trebue să avem

$$a<(b+c)+d.$$

Cum $d<c$, reese $S_{bc}<S_{bd}$. In mod analog, scoatem $S_{bc}<S_{cd}$. Deci Sbc este cea mică arie. De aci, conchidem că dacă există triunghiuri având ca bază suma lungimilor mijlocii, acestea sunt triunghiurile de arie minimă.

Dacă $a+d=b+c$, triunghiul se reduce la o dreaptă și aria este nulă.

Cazurile particulare, când $a=b$, $b=c$, $c=d$, $a=b=c$, $b=c=d$, $a=b=c=d$, se deduc ușor din cazurile generale studiate.

EXERCIȚII

1. Diferența a două patrate consecutive impare este 120. Se cer acele patrate.

I. I. Iliuță.

R. Avem:

$$(2x+1)^2-(2x-1)^2=8x=120.$$

$$x=15.$$

Numerele sunt 31 și 29.

2. Se cer patratele de trei cifre a căror rădăcini este suma ultimelor două cifre.

R. Suma ultimelor două cifre trece de 10. Deci ultimele două cifre 94, 56, 69, 76, 84, 89, 96. Patrate de trei cifre dau pe 121, 169, 225, 144, 289. Numai 289 corespunde.

B. V. Gataianţu.

3. Se cere un patrat perfect de patru cifre, ştiind că suma primelor două, ca şi suma celorlalte două, sunt patrate perfecte. Produsul acestor două patrate este numărul format de ultimele două cifre.

C. N. Popescu.

R. Ultimele două cifre, patrate perfecte, pot fi 00; 01; 09; 49; 81; 04; 16; 36; 64. Sumând cifrele acestora, găsim că numai 00; 01; 04; 09; 36; 81 dau patrate. Grupa 00 nu convine. La celelalte, împărţind sumele cu suma cifrelor, găsim 1; 1; 1; 4; 9 care dă suma primelor două cifre. Numerele căutate ar puteà deci să fie 1001; 1004; 1009; 1336; 2236; 3136; 4036; 1881; 2781; 3681; 4581; 5481; 6381; 7281; 8181; 9081. Extrăgând rădăcina, găsim numai $3136 = 56^2$.

4. Când suma a două numere este media lor înmulţită cu diferenţa lor?

David Gheorghe.

R. Trebue să avem:

$$m + n = \frac{m + n}{2} \times (m - n),$$

$$\therefore \quad m - n = 2.$$

Diferenţa lor este 2.

5. Se cere un număr de trei cifre consecutive, care să fie multiplu al produsului numărului, format de ultimele două cifre cu numărul format de primele două cifre, răsturnat.

G. David.

R. Trebue să avem:

$$100\,s + 10\,z + u = n\,(10\,z + u)\,(10\,z + s),$$

$$100\,s = [n\,(10\,z + s) - 1]\,(10\,z + u).$$

Unul din factorii părţii a doua se divide cu 5. Dacă $10\,z + u = \not\equiv 5$, atunci $u = 0$, sau $u = 5$, iar z şi s pot fi numai 1 şi 2. Se găseşte că nu convine. Deci $n\,(10\,z + s) - 1 = 25\,m$ şi $4\,s = m\,(10\,z + u)$. Cum $4\,s \leqslant 36$, reese $m \leqslant 3$. Facem $m = 1$; 2; 3, şi desfacem $(25\,m + 1)$ în doi factori, unul de două cifre şi găsim pe z şi s. Vedem care poate verificà relaţia $4s = m\,(10z + u)$ şi găsim: $312 = 2 \times 12 \times 13$ şi $624 = 1 \times 24 \times 26$. Numai primul are cifrele consecutive.

6. Care este restul împărţirii lui n^{n+1} prin $(n+1)$?

E. ŞTEFĂNESCU.

R. Avem:

$$n^{n+1} = [(n+1)-1]^{n+1} = \mathcal{M}(n+1) + (-1)^{n+1}.$$

Deci dacă n este fără soţ, restul este 1; altfel este $(n-1)$.

PROBLEME PROPUSE

3331. Două numere de acelaş număr de cifre, au pe 729575 cel mai mic comun multiplu şi nu au alt factor comun decât pe 5. Care sunt acele numere?

I. IONESCU.

3332. Să se transforme $3/2^n$ şi $5/2^n$ în fracţii zecimale. Care sunt ultimele patru cifre dela dreapta?

E. ŞTEFĂNESCU.

3333. In timpul ocupaţiei germane, aşteptau pâine într'o zi, de cu seara, în faţa unei brutării, 90 de persoane. Ele erau aşezate pe două rânduri, în perfectă ordine. La orele 6 dimineaţa, brutarul începù distribuţia pâinilor, în număr de 300, pe care le făcuse noaptea. Atunci năvăli în faţa prăvăliei, lume străină de cele două rânduri. Pâinea erà distribuită astfel: se dădeau 10 pâini oamenilor din rânduri, 20 celor ce năvăliau prin faţă, iar 30 erau dosite de brutar pentru speculă. Dupăce 4/5 din pâini au fost astfel distribuite, venì o patrulă germană. Aceasta confiscă brutarului marfa dosită, pentru a o distribuì populaţiei, aşeză şi rândurile aşà că persoana care erà a 90-a devenì acum a 100-a. Ştiind că fiecare persoană lua câte două pâini, se întreabă dacă toate persoanele din rândul format de cu seară au luat pâine şi câte din cele ce au năvălit prin faţă, fără rând, au luat pâine?

ELENA N. LĂZĂRESCU.

3334. Se cere suma

$$1^n + 11^n + 111^n + \ldots + 111\ldots11^n.$$

AL. CH. MLADENOVICI.

3335. Să se găsiască pe un cerc dat, punctele în care unghiul format de tangenta în acele puncte la cerc, cu dreapta care le unește cu un punct dat (afară din planul cercului, sau în plan), este maxim sau minim. Generalizare.

B. Ig. Baidaff.

3336. Fie A_1, B_1, C_1, simetricele vârfurilor unui triunghiu ABC în raport cu laturile opuse, H, H_a, H_b, H_c ortocentrele triunghiurilor ABC, A_1BC, B_1CA, C_1AB și $A'B'C'$, $A'B_aC_a$, $B'C_bA_b$, $C'A_cB_c$ triunghiurile ortice ale acestor triunghiuri. Să se demonstreze că:

1. H_a, H_b, H_c sunt pe cercul ABC;

2. Cercurile circumscrise triunghiurilor A_1BC, B_1CA, C_1AB se taie în H;

3. H este centrul cercului înscris în triunghiul $H_aH_bH_c$;

4. Grupurile de puncte (A_b, B', C', A_c), (B_c, C', A', B_a), (C_a, A', B', C_b) sunt colineare.

Const. C. Popovici.

3337. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând latura a, raza R a cercului circumscris și unghiul α pe care tangenta în vârful A la cercul circumscris îl face cu dreapta lui Euler a triunghiului.

B. M. Barbălatt.

3338. Să se rezolve ecuația:

$$x = \sqrt{a-x}\sqrt{b-x} + \sqrt{b-x}\sqrt{c-x} + \sqrt{c-x}\sqrt{a-x}.$$

C. A. Mihăescu.

3339. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A & \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A \\ 1 & \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B & \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B \\ 1 & \operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C & \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C \end{vmatrix} = 0.$$

Micu Grümbaum.

3340. Să se găsiască suprafețele de rotație, pentru care proecția pe planul xy a curbelor ce întâlnesc sub un unghiu constant medianele acelor suprafețe, să fie curba

$$r = e^{\theta}.$$

D. Georgescu.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (3258, E); *Baidac D.* (3323); *Bleiweiss P.* (3082); *Blumen M.* (3248, 66, 83, 89, 99, 301, 23); *Botea N.* (3283, 306, P); *Brüll L.* (3283, 86); *Căldăraru L.* (3285, 86); *Călin Gh.* (3233, 83); *Cohn H.* (3233); *Coșniță V.* (3236, P); *Cristescu I.* (3141, 233, E, P); *Diaconu M.* (3233); *Diaconescu T.* (E); *Dimitrescu M.* (3301); *Dinescu Fl.* (3218, 89); *Drâmbă N.* (3233); *Dumitrescu M. A.* (3323); *Felix C.* (3262); *Florea A.* (3233); *Foca I.* (E); *Focșeneanu I. M.* (3295, N, P); *Gaiu M. I.* (3314); *Gataianțu B.* (3301); *Georgescu-Racoviță I.* (3233, E); *Ghelber M.* (3248); *Gheorghiu Gh.* (3218); *Grubermann Gr.* (3233); *Hulubei T.* (3303, E); *Iliuță-Dăbuleni I.* (E); *Ionescu Angelo* (3226); *Ionescu-Bujor C.* (3233, 85, 86); *Katz L.* (3283, 323); *Lupu A.* (3218, 66, 301); *Manafu V.* (3162, 206, 84, 85, 94, 95, N); *Manolescu I. N.* (3218, 56, 66, 85, 99, 301, 03); *Marcovici H.* (3283, E); *Massler E.* (3283); *Mihăilescu N.* (E); *Miu I.* (3221, 33, 62, 72, 83, 95, E, P, R); *Nestor D.* (3283, 85, 86); *Nicolau H. C.* (P); *Nicolau V. Gh.* (3218, 66, E); *Novacu V.* (3242, 83); *Popa I.* (3266, 89, 303, 17, R); *Popea O.* (3254, 58); *Popescu C.* (3157, 283, 85); *Popovici A.* (3256, 85); *Popovici C.* (3067, 82, 115, 36, 41, 206, 33, 62, 70, 74, 83, 85, 86, 91, 95, 97, 314, E, N, P, R); *Popovici D.* (3162); *Popovici I.* (3233, 85, 89, 99, 301, E); *Roșu A.* (3182, 233); *Rusanda Gh.* (3301); *Schächter O.* (3248, 71, 89, 303, 06); *Scripcă L.* (3285, 86); *Sevastre I.* (3284); *Solomon W.* (3219, 64); *Spathy R.* (3231, 33, 85, 89, 301, 03, 23); *Stoicescu T.* (E); *Tailer G.* (E, N); *Teodorescu N.* (3233, 62); *Trofimov P.* (P); *Tunaru Tr.* (3289, 319); *Vârlan V.* (3233, E); *Vasiliu Gh.* (E); *Vasiliu C. I.* (3228, 33, 83, 85, 89, 301, 22, 27, 28, E, P); *Vlădea I.* (3274, 85); *Vlădescu I.* (3286).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 153[illegible] 2343, 83, 946, 91, 3084, 90, 91, 93, 101, 04, 13, 74, 92, [illegible] 40, 52, 59, 69, 73, 82, 87, 311 și 24 nu au fost încă [illegible] de redactori cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor ştructiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea unilor de beton armat. (Epuizată).

a Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul ual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe urte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Mate- trimete D-lui: Ing. G. Borneanu, (adresa: Str. Bucureşti).

reviste, uvrage pentru recenzii şi orice cele privitoare la cassierie şi expediţie, nginer Inspector General I. IONESCU, şti.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor ştructiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea unilor de beton armat. (Epuizată).

a Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul ual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe urte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Mate- trimete D-lui: Ing. G. Borneanu, (adresa: Str. Bucureşti).

reviste, uvrage pentru recenzii şi orice cele privitoare la cassierie şi expediţie, nginer Inspector General I. IONESCU, şti.

Prin Asociațiunea pentru Cultura și Literatura poporului român din Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1925.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Sărbătorirea a 30 ani dela apariţia „Gazetei Matematice".
2. Asupra unei chestiuni de geometrie infinitezimală . . . . . *N. Abramescu.*
3. Note Matematice: 5—8.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografii.
6. Cereri: 129—130.
7. Probleme rezolvate: 2191, 2838, 2856, 2918, 3104, 3200, 3222, 3238, 3266, 3274, 3285.
8. Exerciţii: 7—12.
9. Probleme propuse: 3341—3350.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1925

F. T. — 146

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 92, 94, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 69, 76, 78, 79, 88, 92, 96, 98, 300, 02, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25, 29, 30, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

SĂRBĂTORIREA A 30 ANI DELA APARIȚIA „GAZETEI MATEMATICE".

In seara zilei de 12 Septemvrie 1925 s'a sărbătorit împlinirea a 30 ani de existență ai revistei noastre, printr'o masă comună ce a avut loc în sala de marmoră a restaurantului Bulevard, la care au luat parte următorii 37 membrii și corespondenți, D-nii: V. Alaci, A. Angelescu, E. Antonescu, V. Bruckner, C. Budeanu, Al. Bunescu, C. Buşilă, I. Buşilă, I. Chițulescu, M. Cioc, V. Cristescu, A. Etciu, Evolceanu, Gh. Em. Filipescu, N. Gheorghiu, M. Ghermănescu, R. Ianculescu, G. Ignat, I. Ionescu, I. Lintes, C. Malcoci, E. M. Mircea, St. Mirea, C. Mititelu, Gh. Niculescu, O. Onicescu, C. D. Orășanu, I. Popescu, T. Revici, D. Serbescu, S. Serbescu, A. Tănăsescu, N. Trandafirescu, Gh. Țițeica, I. Vardala, I. Vasilescu și Gr. Zamfirescu.

Această sărbătorire a produs o vie impresie prin evocarea primilor ani ai revistei și a luptei desinteresate depusă din belșug de fondatorii ei și de colaboratorii lor. S'a remarcat cu mult regret lipsa unuia dintre membrii fondatori, a D-lui A. Ioachimescu, compensată în parte prin prezența celorlalți doi: D-nii V. Cristescu și I. Ionescu.

Intr'o atmosferă de mare colegialitate, D-l V. Cristescu a deschis seria cuvântărilor, închinând în sănătatea M. S. Regelui și Reginei și urând prosperitate și viață nesfârșită țărei și neamului românesc. Foarte mișcat, D-sa a arătat că aceasta nu o face dintr'o simplă datorie, ci din inimă ca orice român.

D-l Ion Ionescu în calitate de membru fondator cere să i se îngăduiască să nu vorbească mult ca unul care a scris continuu timp de 30 ani la *Gazeta Matematică*, intrând în decada a patra cu redactarea mai mult de jumătate a numărului întâiu.

D-sa povestește cum acum 16 ani fiind însărcinat să organizeze o serbare a acestei reviste (singura până la această aniversare), cu ocaziunea împlinirei a 13 ani, 8 luni și 2 zile de existență a *Gazetei Matematice*, a litografiat un Menu scriind în cele patru colțuri ale lui, devisa: «Entusiasm, Armonie, Muncă desinteresată, Sacrificii continui»[1]). Cu ajutorul acestor patru elemente, destinul

1) Un exemplar al acestui Menu este adus de D-sa.

Gazetei Matematice este răspândirea la infinit a ştiinţei exacte, a luminei ştiinţifice.

După ce D-sa arată rezultatele frumoase la care *Gazeta Matematică* a contribuit direct, îndemnând la studiu serios pe liceeni şi indirect pregătind elemente capabile, D-sa termină cu aceste cuvinte:

«Ca unul dintre iniţiatorii şi fondatorii *Gazetei Matematice*, ca unul din puţinii redactori ai ei rămaşi din secolul trecut, mă simt dator să vă aduc, D-voastră colegilor din secolul actual, cele mai sincere mulţumiri pentru concursul şi sprijinul pe care ni l-aţi dat. Daţi şi pe viitor fiecare ce puteţi, când puteţi şi cum puteţi! Susţineţi şi mai departe această făclie a ştiinţei române; faceţi-o să devie cât mai strălucitoare, ridicaţi-o cât mai sus, căci astfel veţi contribui la prestigiul ştiinţific al iubitei noastre patrii! Aveţi în vedere necontenit deviza pe care v'o arătai, care ne-a condus la frumoasele rezultate de până azi. Să trăiţi, să trăiască *Gazeta Matematică*.

D-l Gh. Ţiţeica, ia apoi cuvântul arătând că ceeace leagă pe toţi care s'au adunat la serbare, este *Gazeta Matematică*, adică dragostea de ştiinţă pe care unii o cultivă acum, iar alţii au cultivat-o altădată cu ardoarea tinereţei; dragoste care există încă, şi datorită ei câţivă din cei mai buni corespondenţi au venit la această aniversare.

D-sa spune că odată cu aceasta trebue sărbătorit spiritul de organizare al inginerilor şi aminteşte coincidenţa dureroasă că cel mai bun organizator dintre ingineri, în birourile căruia s'a plămădit *Gazeta Matematică*, a încetat din viaţă cu puţin înainte de încheerea acestor 30 ani dela apariţia ei.

Constatând, fericit, că cei tineri calcă sistematic pe drumul deschis de înaintaşi, închină paharul acestor tineri, care garantează viitorul *Gazetei Matematice*.

D-l Gh. Em. Filipescu citeşte scrisorile şi telegramele primite dela următorii membri şi corespondenţi: D-nii Th. Angheluţă, G. Borneanu, Gh. Buicliu, Tr. Dordea, A. Ioachimescu, Tr. Maxinoiu, N. Profiri, M. Saligny, V. Teodoreanu, C. Teodorescu şi G. Zapan.

Este de remarcat impresia adâncă ce-au produs-o scrisorile D-lor V. Teodoreanu şi A. Ioachimescu.

D-l V. Teodoreanu propune în scrisoarea sa imortalizarea în busturi de bronz a D-lor I. Ionescu, Gh. Ţiţeica, A. Ioachimescu şi V. Cristescu.

„Chipul lor trebue imortalizat în bronz spre pilda generaţiilor viitoare, — scrie D-l V. Teodoreanu". Fără munca lor *Gazeta Matematică* nu s'ar puteà mândri azi cu trei fiice:

Revistele matematice din Chişinău, Timişoara şi Buenos-Aires, în fruntea cărora se găsesc trei foşti elevi ai mei: Inginer Profiri, Lt. Colonel Buicliu şi profesorul Baidaf.

Nu se poate o dovadă mai vie că sămânţi aruncate acum trei zeci de ani au încolţit, crescut şi dat rod, după cuvântul Evangheliei".

D-l V. Alaci aduce salutul *Revistei matematice din Timişoara*, soră mai mică a *Gazetei Matematice* şi urează acesteia prosperitate şi viaţă fără sfârşit.

D-l M. Cioc, impresionat de scrisoarea trimisă de D-l V. Teodoreanu şi amintindu-şi de dascălul său, care a pus în mâna multor generaţii de elevi din Iaşi «*Gazeta Matematică*», evoacă amintirea vie a atmosferei în care trăiau la Iaşi acum 25 ani corespondenţii *Gazetei Matematice* şi prima descălecare—sărbătoare făcută la Iaşi de cei patru pionieri ai revistei, D-nii: I. Ionescu, Gh. Ţiţeica, A. Ioachimescu şi V. Cristescu.

D-sa arată atât sprijinul ce l'a adus *Gazeta Matematică* elevilor săraci, înarmându-i în învăţătura ingineriei şi a artei militare, în afară de cunoştinţele matematice cu munca continuă şi ordonată, cât şi legăturile ce s'au creiat prin această muncă între ei şi cei patru pionieri, cărora le datorează cele mai mari virtuţi: Dragostea de muncă, curajul şi răbdarea de a întreprinde pânăla capăt orice lucrare începută.

„*Gazeta Matematică* a sintetizat şi a reprezentat până azi cea mai sănătoasă mişcare intelectuală", — adaogă D-sa.

„Fără teamă de a fi desmiţit, îmi permit a mă face interpretul celor 30 serii de elevi şi proseliţi ai *Gazetei Matematice*, aducând cu ocazia acestei sărbători, prinosul celei mai profunde şi mai sincere recunoştinţi către cei patru stâlpi susţinători ai revistei şi îndrumători ai tineretului, cari au fost şi sunt D-nii: I. Ionescu, Gh. Ţiţeica, A. Ioachimescu şi V. Cristescu".

In dorinţa ca să se ridice cât mai mulţi urmaşi demni de

aceşti patru pionieri, D-l M. Cioc ridică paharul în sănătatea şi cinstea lor şi propune ca să se telegrafieze D-lui A. Ioachimescu omagiile şi expresia de recunoştinţă a întregei adunări.

D-l Ţiţeica mulţumeşte D-lui Cioc pentru amintirea clipelor plăcute trăite acum 25 ani la Iaşi, în sânul corespondenţilor *Gazetei Matematice.*

Tot D-sa aminteşte dispariţia regretatului Anghel Saligny, căruia adunarea îi consacră câtevă clipe de reculegere.

Sărbătorirea se sfârşeşte apoi, fiecare retrăgându-se cu sufletul înălţat, văzând roadele crescute la lumina ştiinţifică a *Gazetei Matematice* şi cu dorinţa de a contribui cât mai mult la înflorirea acestei creaţiuni a ştiinţei române.

ASUPRA UNEI CHESTIUNI DE GEOMETRIE INFINITEZIMALA.

Printre numeroasele aplicaţiuni ale Geometriei pure infinitezimale, este şi determinarea tangentei la curba descrisă de un punct al unei figuri variabile. O astfel de problemă o întâlnim în exemplul următor: *Vârfurile* A *şi* B *ale unui triunghiu variabil* ABC, *descriu două curbe* (A) *şi* (B), *latura* AB *rămâne tangentă la curba* (γ), *iar laturile* AC *şi* BC *au direcţiuni fixe. Să se determine tangenta în* C *la curba* (C), *descrisă de acest punct.*

Fie α, β, γ punctele de contact ale laturilor BC, CA, AB cu înfăşurătoarele lor şi R, P, Q punctele de intersecţie ale tangentelor în A şi B la curbele (A) şi (B), în B şi C la curbele (B) şi (C), în C şi A la curbele (C) şi (A).

Insemnând cu $d(A)$ diferenţiala arcului de curbă (A) în punctul A, se ştie că[1]) avem

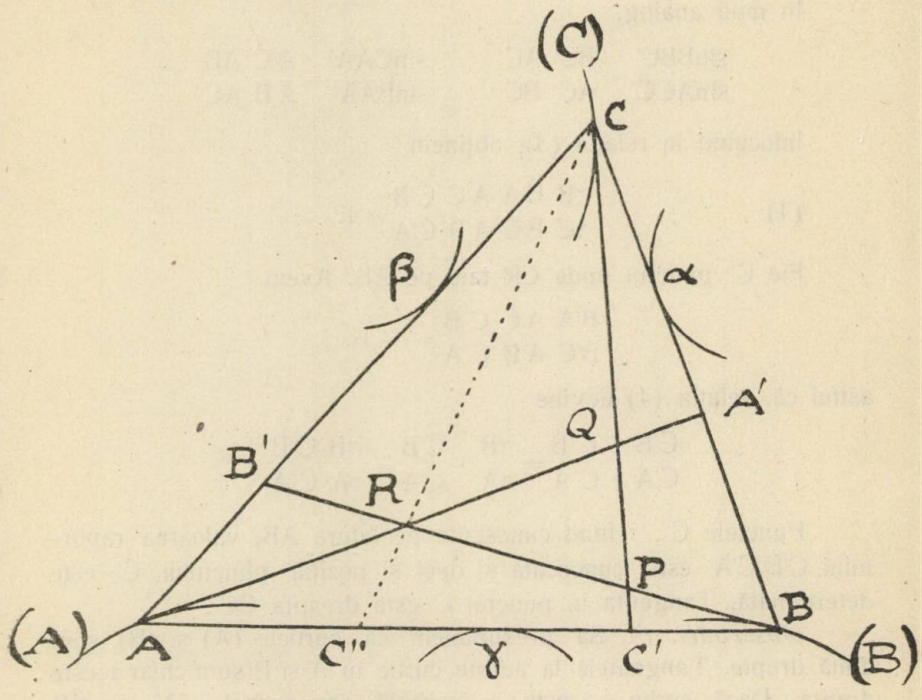
$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{\gamma A.RA}{\gamma B.RB}, \quad \frac{d(B)}{d(C)} = \frac{\alpha B.PB}{\alpha C.PC}, \quad \frac{d(C)}{d(A)} = \frac{\beta C.QC}{\beta A.QA}.$$

Inmulţindu-le, obţinem relaţia generală

$$(1) \qquad \frac{\gamma A}{\gamma B}\,\frac{\alpha B}{\alpha C}\,\frac{\beta C}{\beta A}\,\frac{RA}{RB}\,\frac{PB}{PC}\,\frac{QC}{QA} = 1.$$

1) M. d'Ocagne. *Cours de Géométrie pure et appliquée,* pag. 12.

In cazul problemei, AC şi BC având direcţii date, îşi ating înfăşurătoarele lor la infinit, deci punctele β şi α sunt la infinit pe aceste drepte şi deci



$$\beta C/\beta A = 1 \quad , \quad \alpha B/\alpha C = 1.$$

Relaţia (1) devine

$$(2) \qquad \frac{\gamma A}{\gamma B}\,\frac{RA}{RB}\,\frac{PB}{PC}\,\frac{QC}{QA} = 1.$$

Fie A', B', C' intersecţiile laturilor BC, CA, AB cu AQ, BR, CP. Avem

$$\frac{RA}{RB} = \frac{\sin B'BA}{\sin A'AB}\ ,\ \frac{PB}{PC} = \frac{\sin C'CB}{\sin B'BC}\ ,\ \frac{QC}{QA} = \frac{\sin A'AC}{\sin C'CA}\ .$$

Relaţia (2) devine

$$(3) \qquad \frac{\gamma A}{\gamma B}\,\frac{\sin B'BA}{\sin A'AB}\,\frac{\sin C'CB}{\sin B'BC}\,\frac{\sin A'AC}{\sin C'CA} = 1.$$

Dar, din triunghiurile AB'B, BB'C, avem

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{\sin ABB'}{\sin AB'B}, \quad \frac{B'C}{BC} = \frac{\sin B'BC}{\sin CB'B}; \quad \frac{\sin ABB'}{\sin CBB'} = \frac{AB'}{B'C}\,\frac{BC}{AB},$$

căci $\sin AB'B = \sin CB'B$.

In mod analog,

$$\frac{\sin BBC'}{\sin ACC'} = \frac{BC'}{AC'}\,\frac{AC}{BC}, \qquad \frac{\sin CAA'}{\sin BAA'} = \frac{A'C}{A'B}\,\frac{AB}{AC}.$$

Inlocuind în relația (3), obținem

$$\frac{\gamma B}{\gamma C}\,\frac{B'A}{B'C}\,\frac{A'C}{A'B}\,\frac{C'B}{C'A} = 1. \tag{4}$$

Fie C″ punctul unde CR taie pe AB. Avem

$$\frac{B'A}{B'C}\,\frac{A'C}{A'B}\,\frac{C''B}{C''A} = -1,$$

astfel că, relația (4) devine

$$\frac{C'B}{C'A} : \frac{C''B}{C''A} = \frac{\gamma B}{\gamma A}, \quad \frac{C'B}{C'A} = \frac{\gamma B}{\gamma A}\,\frac{C''B}{C''A}.$$

Punctele C″, γ fiind cunoscute pe latura AB, valoarea raportului C'B/C'A este cunoscută și deci și poziția punctului C′ este determinată. Tangenta în punctul C este dreapta CC′.

Observări. 1°. Să presupunem că curbele (A) și (B) sunt două drepte. Tangentele la aceste curbe în A și B sunt chiar aceste drepte. Dacă curba (γ) este o iperbolă, iar curbele (A) și (B) asimptotele sale, punctul de contact γ al dreptei AB cu iperbola este mijlocul segmentului AB; deci $\gamma A : \gamma B = 1$, iar relația (4) arată că dreptele AA′, BB′, CC′ sunt concurente, tangenta în C este dreapta CR.

2°. Dacă, pe lângă condiția ca curbele (A) și (B) să fie două drepte, mai punem condiția ca dreptele duse prin A și B să fie paralele cu aceste drepte, atunci A′ și B′ sunt aruncate la infinit, căci CA e paralelă cu BR, CB e paralelă cu AR, așă că relația (4) devine

$$\frac{\gamma A}{\gamma B}\,\frac{C'B}{C'A} = -1, \qquad \frac{C'B}{C'A} = -\frac{\gamma B}{\gamma A},$$

adică punctele C′ și γ sunt conjugate armonic în raport cu A și B.

3°. Se observă că relația generală (1) ce dă tangenta în

punctul C, depinde numai de tangenta în γ la curba (γ). Transformarea (γ, C) este deci de contact, aşà că *exprimare geometrică a unei transformări de contact este: Tangenta la o curbă* (γ) *taie două curbe* (A) *şi* (B) *în punctele* A *şi* B; *se duce din* A *tangenta la o curbă* (β) *şi din* B *tangenta la o curbă* (α). *Punctul de intersecţie* C *al acestor tangente, este astfel în cât transformarea* (γ, C) *este de contact.*

N. ABRAMESCU.

NOTE MATEMATICE

5. *Alte zece astronomii diverse.* (Vezi Nota No. 77 din Anul XXIX, pag. 448).

31. **Babiloniană.** Vezi *H. G. Zeuthen.*—Histoire de mathématiques, pag. 7.
32. **Caldeană.** Vezi *G. Bigourdan.* — Astronomie, pag. 224.
33. **Carolină.** *T. Street.* — Astronomia carolina. 1716.
34. **Circulară.** Ca la No. 32, pag. 301.
35. **Empirică.** Idem, pag. 224.
36. **Filolaică.** *J. Ballialdus.* — Astronomia philolaica. Parissis. 1645.
37. **Geodezică.** *J. Driencourt.* — Astronomie géodésique.
38. **Greacă.** Ca la No. 32, pag. 226.
39. **Matematică.** *Barlow C. W. C & Bryan C. H.* — Elementary mathematical astronomy. Londra. 1923.
40. **Persană.** Ca la No. 32, pag. 315.

(Va urmà). I. IONESCU.

6. *Asupra unei probleme cunoscute.* In «Culegerea de Probleme», Arit., III, 7, se găseşte enunţul:

Să se *arate* că cu patru greutăţi de 1, 3, 9 şi 27 kg. se poate cântări orice număr de kg. până la 40 kg.

In cele ce urmează, voiu *demonstrà* că orice număr de kilograme până la 40 kg. se poate cântări cu cele patru greutăţi.

Intr'adevăr, dacă scrim numerele naturale în sistemul de bază trei, avem nevoie de cifrele 0, 1, 2 pentru a însemnà părţile numărului, care are 0.3^a, 1.3^a, sau 2.3^a unităţi. Dar «nevoia» de

cifra 2 se poate ocoli datorită observaţiunei că $2.3^a = 1.3^{a+1} - 1.3^a$, de unde, ca urmare, se va mări cu o unitate cifra corespunzătoare ordinului imediat superior unde apare un 2 şi se va scădeà o unitate de acelaş ordin în care a apărut 2, când se scrie numărul în sistema de numeraţiune 3. Se va începe această operaţiune dela locurile cele mai mici, iar dacă în cursul operaţiunilor se dă peste alt 2, i se va aplicà aceiaş regulă; de o pildă: 1112 se va scrie $11'1'1'1'$ unde 1 cu accent înseamnă -1 sau $\bar{1}$. Cu explicaţiunea anterioară şi cum orice număr se poate pune sub forma

$$3^n \pm a_1 3^{n-1} \pm a_2 3^{n-2} \pm a_3 3^{n-3} \pm \ldots,$$

unde a_1, a_2, a_3, ... sunt egali cu zero sau cu 1, rezultă că dacă se dispune de $n+1$ greutăţi de 1, 3, 9, 3^n kg. va fi chip de cântărit orice greutate până la $(3^{n+1}-1):2$ kg. (In cazul particular $n = 4$, se obţine 40).

In chip analog se poate studià şi chestiunea III.6, precum deasemenea încercà alte studii.

In cele ce preced am obţinut o demonstraţiune a acestei frumoase chestiuni, dar mai interesantă încă e această problemă dacă ne propunem a scrì însăşi numerele în sistema de bază 3, întrebuinţând *cifre negative* (cari numai pentru comoditate tipografică le-am însemnat cu litere grase). In tabloul următor scriu toate numerele pânăla 40, în trei feluri uşoare de cetit:

$N_{(10}$	$N_{(3}$		$N_{(10}$	$N_{(1}$		$N_{(10}$	$N_{(3}$		$N_{(10}$	$N_{(3}$	
1	1	1	11	102	111	21	210	1110	31	1011	1011
2	2	11	12	110	110	22	211	1111	32	1012	1111
3	10	10	13	111	111	23	212	1011	33	1020	1110
4	11	11	14	112	1111	24	220	1010	34	1021	1111
5	12	111	15	120	1110	25	221	1011	35	1022	1101
6	20	110	16	121	1111	26	222	1001	36	1100	1100
7	21	111	17	122	1101	27	1000	1000	37	1101	1101
8	22	101	18	200	1100	28	1001	1001	38	1102	1111
9	100	100	19	201	1101	29	1002	1011	39	1110	1110
10	101	101	20	202	1111	30	1010	1010	40	1111	1111

In prima coloană figurează numărul în sistema de bază 10, în a doua scris în bază 3 cu cifre pozitive, iar în ultima în baza 3, dar cu «cifre negative». Astfel avem,

$$3.10+2=1.3^3+0.3+1.3+2=1.3^3+1.3^2-1.3-1\ldots.\text{ etc.}$$

Ca concluziune, relaţionând această problemă cu nota Domnului I. Ionescu, Anul XXX, No. 40, presupun că problema comentată e foarte veche. Cine ar puteà să-i indice istoria?

B. Ig. Baidaff.

Buenos-Aires
16/V 1925.

7. *Asupra problemei 3184.*

In general, problema 3184 s'ar puteà enunţà astfel: «*Când A! se termină cu B zerori?*

Bazaţi pe cele ce am stabilit în soluţia problemei 3213, unde cel mai mare exponent α al lui a (prim) care divide produsul N!. este:

$$N/a \leqslant \alpha \leqslant (N-1)/(a-1)$$

problema generală poate fi rezolvată. In adevăr:

In cazul general al problemei ar trebui deci să avem:

$$A/5 \leqslant B \leqslant (A-1)/4,$$

sau:

$$4B+1 \leqslant A \leqslant 5.B,$$

care reprezintă condiţiunile soluţiunilor problemei.

Exemple:

1. Fie $A=n^2$ şi $B=n+1$ (cazul problemei 3184), atunci avem:

$$4n+5 \leqslant n^2 \leqslant 5(n+1),$$

de unde se deduce imediat soluţia $n=5$.

2. Fie $A=n^\alpha$ şi $B=(n^\alpha-1)/(n-1)$, atunci găsim condiţia:

$$n \leqslant (n-5)\,n^\alpha+5 \leqslant n^\alpha,$$

unde se vede iarăşi că trebue să avem:

$$n=5.$$

3. Fie $A=n^\alpha+1$ şi $B=n^\beta$, atunci avem:

$$4n^\beta+1 \leqslant n^\alpha+1 \leqslant 5.n^\beta,$$

de unde:

$$4 \leqslant n^{\alpha-\beta} < 5,$$

ceeace ne dă:

n	2	4
$\alpha-\beta$	2	1

Verificând, vedem că nici pentru $n=2$, nici $n=4$ nu ne dă soluţii, deci în acest caz problema nu are soluţii, adică: $(n^{\alpha}+1)!$ *nu se va termină niciodată cu* n^{β} *zerori.*

Observaţie. Dacă s'ar admite că:

$$n=3,\quad \alpha-\beta=1{,}4 \quad \text{şi} \quad \beta=2,$$

luând numai părţile întregi, se poate găsi că:

$3^{3,4}$ aprox. egal cu 42 ori 42! se termină cu 3^2 zerori.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

8. Îmi propun să demonstrez următoarea proprietate a simedianei:

Simediana unui triunghiu e mai mică ca semi-suma laturilor ce pleacă din acelaş vârf cu simediana.

Fie ABC un triunghiu oarecare, în care presupunem că latura $AB<AC$. Fie M mijlocul laturei BC şi D piciorul bisectoarei unghiului A. Se ştie dela teorema bisectoarei că avem:

$$BD=\frac{AB\,.\,BC}{AB+AC},\qquad CD=\frac{AC\,.\,BC}{AB+AC},$$

şi de oarece am presupus că $AB<AC$, urmează că avem $BD<CD$; deci punctul D cade pe latura BC între B şi M.

Fie S piciorul simedianei unghiului A. Simediana AS fiind simetrica medianei AM, în raport cu bisectoara AD, evident că punctul S cade între B şi D.

Pe latura AC luăm segmentul $AB_1=AB$, iar pe AB segmentul $AC_1=AC$. Evident că triunghiurile ABC şi AB_1C_1 sunt egale şi simetrice, în raport cu bisectoara lor comună AD.

Fie M_1 punctul unde simediana AS întâlneşte pe B_1C_1. De oarece piciorul bisectoarei este comun în cele două triunghiuri ABC şi AB_1C_1, iar C_1 e pe prelungirea laturei AB, urmează că M_1 e pe prelungirea lui AS. Triunghiurile ACM şi AC_1M_1 sunt egale, căci au laturile AC şi AC_1 egale şi unghiurile adiacente la aceste laturi egale. Deci AM_1 şi AM sunt egale. Mai rezultă că $C_1M_1=CM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}B_1C_1$; deci AM_1 este mediană în triunghiul AB_1C_1.

Se ştie însă că mediana este mai mică ca semi-suma laturilor ce pleacă din acelaş vârf; deci în triunghiul AB_1C_1 avem

$$AM_1 < \tfrac{1}{2}(AB_1 + AC_1), \quad \therefore \quad AM_1 < \tfrac{1}{2}(AB + AC),$$

şi deci cu atât mai mult vom avea

$$AS < \tfrac{1}{2}(AB + AC).$$

După cele demonstrate mai sus, se mai vede că avem $AM_1 > AS$, sau $AM > AS$, adică *simediana este mai mică ca mediana ce pleacă din acelaş vârf.*

MARIN ŞTEFAN.
Constanţa.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALELE MILITARE ALE AERONAUTICEI.

1. Elevi-Ofiţeri activi.

ALGEBRĂ.

Care este derivata funcţiei:

$$y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}.$$

Să se studieze variaţia lui y pentru x variind dela $-\infty$ la $+\infty$?

TRIGONOMETRIE.

1. Dându-se valoarea lui $\operatorname{tg}a$, să se demonstreze cum se obţine valoarea lui $\sin a$. Aplicaţie pentru $a = 45^0$.

2. Să se calculeze cel mai mic unghiu positiv α, dat de formula

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2 \sin 2C \cos C}{b^2 \cos(A - C)},$$

având drept date: $a = 0{,}12928$; $b = 1{,}625$; $A = 170^0 10'$ şi $C = 49^0 25' 35''$.

GEOMETRIE.

Se dă un cerc O şi unul din diametre AB. Dintr'un punct M de pe cercul O ca centru, se descrie un alt cerc tangent la AB în punctul T.

Din punctele A şi B se duc respectiv tangentele AU şi BV la cercul M.

Să se arate că tangentele AU şi BV sunt paralele.

2. Elevi-Ofiţeri Mecanici.

ALGEBRĂ.

1. Se dă ecuaţia

$$x^2 + 2(p - 4)x - 64 = 0.$$

Se cere:

a) Să se rezolve pentru cazul când $p = -2$.

b) Ce valoare trebuie să dăm lui p pentruca rădăcinile ecuației date să fie egale și de semne contrare.

2. Să se calculeze cu ajutorul logaritmilor numărul

$$N = \frac{(0{,}12)^5 \sqrt[4]{18453}}{8{,}94}.$$

TRIGONOMETRIE.

Dându-se valoarea lui tg$a$, să se demonstreze cum se obține valoarea lui cos$a$. Aplicație pentru $a = 45^0$.

GEOMETRIE.

Care este suprafața laterală și volumul unei piramide regulate, având drept bază un exagon regulat cu latura l și a cărei muche e egală cu $2l$.

ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN BUCUREȘTI.

ANALIZĂ (iunie 1925).

(Secțiile A, B, C, D).

I. Să se calculeze volumul limitat de suprafața

$$X^2 - Y^2 = A \cdot Z \quad (A > 0)$$

de planul XY și de cilindrul drept a cărui bază este lemniscata:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

II. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$\rho = \frac{a}{\cos^2 \theta/2},$$

cuprins în cadranul axelor de coordonate pozitive.

III. Să se integreze sistemul:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - z = x - \sin 2x$$

$$\frac{dz}{dx} + 4\frac{dy}{dz} - 4y - z = 2\cos 2x.$$

GEOMETRIE ANALITICĂ (iunie 1925).

(Secțiile A, B, C, D).

Se consideră octaedrul SABCDS', format din alipirea prin bazele lor, a două piramide regulate egale, cu baza patrată ABCD. Fie O centru octae-

drului; se iau ca axe OX, OY, OZ, respectiv, direcţiunile OA, OB, OS. Toate triunghiurile SAB, SBC, SCD, SDA, sunt isoscele şi egale între ele. Se dă OS = 4, SA = 5.

Se cere:

1°. Să se scrie ecuaţia elipsoidului circumscris octaedrului şi având ca semiaxe, OA, OB şi OS.

2°, Se consideră, faţă de acest elipsoid, planul polar al punctului (0,0,8). El tae octaedrul după un patrat p, şi elipsoidul după cercul C.

Se cere aria patratului p şi aceia a cercului C.

3. Să se scrie ecuaţia conului care are ca vârf punctul O şi ca directoare cercul C.

4°. Să se scrie ecuaţiunea planului tangent la con dealungul generatoarei situate în planul XOZ.

MATEMATICI GENERALE (iunie 1925).

Secţia Silvică.

1. Se dă funcţiunea

(1) $$y = \cos^2 2x$$

şi se cere:

a) Să se studieze maximele şi minimele ei, când x variază dela 0 la π; să se reprezinte geometriceşte y în acelaş interval.

b) Să se afle aria mărginită de arcul de curbă (1), de axele Ox, Oy şi de dreapta $x - \pi/4 = 0$.

c) Să se calculeze volumul născut prin rotirea arcului de mai sus în jurul axei Ox.

2. Să se discute natura conicei

$$m(y-1)^2 + (1-m^2)\,x(y-1) - mx^2 = 0,$$

m fiind un parametru variabil (real); să se reprezinte conica în cazul particular $m = 1$.

3. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$y''' - 7y'' + 6y' = x + 2e^{6x} + \sin 2x.$$

(Timpul acordat: 8—12 a. m.)

Lucrare scrisă de Matematici generale.

(Secţia Silvică).

1. Să se determine coeficienţii a, b, c astfel ca expresiunea:

$$E = a\sin x + (b-1)\cos x + c(1-e^{2x}),$$

să fie un infinit mic de cel mai înalt ordin posibil.

2. Să se calculeze derivata funcţiunii:

$$y = L\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(1-x)^4}{(2x+1)^5}}.$$

3. Se consideră funcţiunile:

$$x = \cos(u-v)\,.\,e^{-\frac{u+v}{2}}, \quad y = \sin(u-v)e^{-\frac{u+v}{2}}, \quad z = e^{u+v},$$

în care x, y, z sunt funcţiuni de u şi v. Se cere să se calculeze expresiunea:

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4. Se consideră dreptele:

(1) $$2x - y + 2 = 0 \quad , \quad x + 3y - 1 = 0$$

şi se cere:

1°. Să se reprezinte aceste drepte.

2°. Se cere coordonatele simetricului originei în raport cu fiecare din dreptele (1) şi în raport cu punctul lor de intersecţie.

3°. Aria triunghiului format de aceste trei puncte.

4°. Ecuaţia fascicolului de drepte care trec prin origină şi sunt perpendiculare pe dreptele (1).

5. Se consideră planul

(2) $$2x + y - z + 1 = 0$$

şi punctul A(1, 4, —2). Se cere:

1°. Coordonatele simetricului A' ale lui A în raport cu planul (2).

2°. Ecuaţia planului OAA' şi a dreptei de intersecţie dintre acest plan şi planul (2).

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXI. No. 5—6. Mai—Iunie 1925. New-York. A doua acordare a premiului memorial BÖCHER de R. G. D. RICHARDSON. Adunarea de Vest, de Crăciun, a Societăţii, de A. DRESDEN. A 31-a Adunare a Societăţii de R. G. RICHARDSON. Asigurarea pe viaţă ca un serviciu social şi ca o problemă de matematică, de R. HENDERSON. Simplificări referitoare la demonstraţia teoremei lui SYLOW, de G. A. MILLER. Reducerea ecuaţiilor lui EULER, la forma canonică, de J. H. TAYLOR. Ecuaţiuni integro-diferenţiale, de I. A. BARNETT. Un nou tip de sextică dublă închisă, sub corespondenţa binară (3, 3), de L. D. CUMMINOS.

Idem. No. 7 Iulie 1925. Premiul de algebră FRANK NELSON COLE, de H. S. WHITE. Adunarea din fevruarie dela New-York, de W. B. FITE. Numărul permutaţiunilor perechi şi neperechi absolute *a n* litere, de J. M. THOMAS. Valoarea absolută a produsului a două matrice, de J. H. M. WEDDERBURN. Numărul representărilor unui număr ca o sumă sau diferenţă de două cuburi, de E. T. BELL. Contactul curbelor cu cubice raţionale plane, de L. W. GRIFFITHS. Notă asupra geometriei proective a urmelor, de T. Y. THOMAS. Carac-

terul tensorial al simbolului generalizat al lui KRONECKER, de F. D. MURNAGAN. Două ecuaţii funcţionale generale, de W. H. WILSON. Invarianţi funcţionali, cu o continuitate de ordinul p cu un parametru FREDHOLM şi cu grupe de transformare VOLTERRA, de A. D. MICHAL. Distribuirea resturilor patratice sau de ordin mai superior, de H. S. VANDIVER. COOLIDGE despre geometria complexă, de W. C. GRAUSTEIN. GAUSS şi geometria neeuclidiană, de R. M. VINGER. JULIA despre singularităţile esenţiale, de J. F. RITT. Manualul de statistică al lui National Research. Courcil, de B. H. CAMP. Patru cărţi asupra probabilităţilor, de A. R. CRATHORNE.

Idem. No. 8.Octomvrie 1925. A 45-a Adunare regulată a Secţiunii din San Francisco, de B. A. BERNSTEIN. Adunarea din Aprilie din Chicago, de A. DRESDEN. Asupra intervalelor complimentare a unui şir numerabil închis, de J. R. KLINE. O serie de trei întregi consecutivi, care sunt resturi patratice ale numerelor prime, de A. A. BENNETT. Grupe în care normalizatorul oricărui element afară de identitate este abelian, de L. WEISNER. Notă asupra fenomenului lui GIBBS de C. N. MOORE. O notă istorică asupra fenomenului lui GIBBS în seriile lui FOURIER şi în integrale, de H. S. CARLSLAW. O formă generală a lănţişoarelor podurilor suspendate, de IRA FREEMAN. Asupra soluţiunii ecuaţiunilor diophantine cu ajutorul idealelor, de G. E. WAHLIN. NÖRLUND asupra calculului diferenţelor, de R. D. CARMICHAEL. ENRIQUES asupra geometriei algebrice, de G. C. EVANS. Trei retipăriri din Enciclopedie de C. N. MOORE COURANT şi HILBERT asupra fizicei matematice, de E. HILLE.

Idem. General Index. Volumes XXI-XXX. New-York, 1925.

Foaia matematică. Anul II. No. 9. Septemvrie 1923. Chişinău. Asupra ecuaţiilor algebrice cu toate rădăcinile reale, de P. SERGESCU.

Revista matematică din Timişoara. Asupra coeficienţilor binomiali, de T. POPOVICIU.

Journal de Mathématiques élémentaires. Publicat de H. VUIBERT. Anul 50. No. 1. Octomvrie 1925. Paris.

V. ALACI. *L'approximation des fonctions d'une variable réelle par une classe des sommes trigonométrique.* Extras din *Buletinul de matematici pure şi aplicate al Societăţii române de ştiinţe.* Bucureşti. Imprimeria Statului 1925.

M. GRÜNBAUM. *Arta de a fi geometru.* Apărută în *„Biblioteca Societăţii Matematica Bârlădeană"* No. 5. Bârlad. (O colecţiune de articole, note şi probleme ale autorului publicate în diferite reviste).

Curierul Matematic. Vol. I. No. 7. Bucureşti. (litografiat). Proprietăţi în legătură cu triunghiurile pedale, de O. BOLGIU.

CERERI.

129. Se afirmă că printre chipurile care ereau zugrăvite la exteriorul Bisericii cu Sfinţi din Bucureşti, Calea Moşilor, ar fi fost şi ale unor matematicianî şi învăţaţi ai anticităţii grece, printre care TALES, PLATON, etc. Ce se ştie pozitiv în această privinţă?

I. I.

130. In *Istoria Fundării oraşului Bucureşti*, de Lt. Col. Pappazoglu, se spune că patriarhul Hrisante al Ierusalimului a murit în România şi că are o piatră mormântală. Acest patriarh, care fusese bursier al lui Brâncoveanu pentru studiul astronomiei, a determinat coordonatele geografice ale oraşului Bucureşti. Unde este mormântul lui?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2191. *Să se găsiască numerele de patru cifre divizibile cu 37 şi alcătuite numai din cifrele* a *şi* b, *între care există relaţiunea*

$$36a + 2b = \mathcal{M}.37.$$

Fl. Vasilescu.

Relaţiunea dată poate fi pusă sub forma:

$$(1) \qquad 2b - a = \mathcal{M}.37$$

şi nu poate fi satisfăcută, ţinând seamă de faptul că a şi $b \leq 9$, decât dacă

$$(2) \qquad a = 2b \quad (b \leq 4).$$

Numerele fiind formate cu cifrele a şi b, rezultă că soluţiunile problemei sunt produse între valoarea lui b şi un număr format cu cifrele 1 şi 2, multiplu de 37. Formând toate numerele posibile cu cifrele 1 şi 2 şi astfel ca în orice număr să fie ambele cifre şi aplicând criteriul de divizibilitate pentru 37 (G. M. XX, p. 334), se găseşte că singur numărul 1221 este $\mathcal{M}.37$, deci soluţiunile problemei sunt date de

$$N = 1221 \times b \quad (b = 1, 2, 3, 4).$$

Au rezolvat problema Domnii: C. I. Ciorănescu, M. I. Adam, B. A. Reinhorn, Emil Ştefănescu, N. P. Arcadian, I. T. Popovici, Al. Tauber, M. Pătroianu.

PROBLEMA 2838. *Fie* N *un număr întreg de* n *cifre şi* M *numărul obţinut scriind consecutiv de* m *ori numărul* N. *Să se demonstreze congruenţa:*

$$M \equiv N\frac{K^m-1}{K-1}, \qquad \text{Mod. } (10^n - K).$$

K *fiind un număr întreg oarecare mai mic decât* 10^n. *Ca aplicaţie să se deducă problema 2830.*

Căpitan GRIGORE ZAPAN.

I. *Soluţie* dată de D-nii: M. ADAM, I. S. ANTONIU, B. M. BARBĂLATT, I. BÂRSU, ADR. BUŞILĂ, C. BERDAN, C. CIORĂNESCU, N. CIORĂNESCU, V. COŞNIŢĂ, A. FINŢESCU, I. B. FLORESCU, LAZĂR FOCŞĂNEANU, I. C. GEORGESCU, N. GEORGESCU-ROEGEN, EM. ILIESCU, P. IONESCU, EM. MANOLESCU, GR. C. MOISIL, AL. NICULESCU, A. PAMULA, T. POPOVICIU, I. RIZESCU, L. ROSENFELD, M. SARIAN, C. SCHÖNFELD, EM. ŞTEFĂNESCU, I. C. VASILIU şi MIRCEA VASILIU.

Avem:

$$M = N + 10^n \cdot N + 10^{2n} \cdot N + \ldots + 10^{(m-1)n} \cdot N$$

$$\therefore M = N[1 + 10^n + 10^{2n} + \ldots + 10^{(m-1)n}]$$

şi observând că:

$$10^n \equiv K, \qquad \text{Mod. } (10^n - K).$$

avem:

$$M \equiv N[1 + K + K^2 + \ldots + K^{m-1}] \qquad \text{Mod. } (10^n - K).$$

$$\therefore M \equiv N\frac{K^m-1}{K-1}. \qquad \text{Mod. } (10^n - K).$$

Aplicaţie. Făcând $N = 22$, $n = 2$ şi $K = 3$, obţinem problema 2830:

$$M \equiv 22\,\frac{3^m-1}{3-1} = 11\,(3^m - 1) \qquad \text{Mod. } 97.$$

II. *Soluţie* dată de D-nii: TRAIAN N. ANGELESCU, B. M. BARBĂLATT, C. CIORĂNESCU, DOBRESCU-BĂBICI, TRAIAN DORDEA, N. GEORGESCU-ROEGEN, DIMA ST. ILIESCU, I. IONESCU-BREZUICA, LONGIN IONESCU, PAUL IONESCU, D. MITESCU, MARIN ŞTEFAN, AL. TAUBER şi I. C. VASILIU.

Conform unor teoreme ale d-lui Căpitan Gr. Zapan publicate în *Gazeta Matematică* (XXIV, 113 — 116), restul diviziunii unui număr A prin altul B este dat de expresiunea:

$$R = g_1 + ng_2 + n^2 g_3 + \ldots + n^{i-1} g_i ,$$

g_1, g_2,..., g_i fiind grupurile dela dreapta spre stânga de câte m cifre ale numărului A, m numărul cifrelor lui B şi n diferenţa $10^m - B$.

In cazul problemei de faţă, grupurile de câte m cifre sunt identice, formate din numărul N, având n cifre fiecare grup şi fiind m grupuri, iar $B = 10^n - K$.

Prin urmare, restul diviziunii lui M prin $(10^n - K)$ este dat de expresiunea:

$$R = N + K.N + K^2.N + \ldots + K^{m-1} . N$$

$$\therefore \qquad R = N(1 + K + K^2 + \ldots + K^{m-1}) = N \frac{K^m - 1}{K - 1}$$

Deci:

$$M \equiv N \frac{K^m - 1}{K - 1} \qquad \text{Mod. } (10^n - K).$$

Aplicaţiunea se deduce la fel ca în soluţia I.

Observaţiuni. 1°. *Au generalizat problema* pentru orice sistem de numeraţie, d-nii: M. Adam, C. Ciorănescu, N. Georgescu-Roegen şi Paul Ionescu.

2°. Parte din corespondenţi au observat că această problemă se poate obţine din problema 2766, înlocuindu-l pe K prin (—K).

PROBLEMA 2856. *Fie* N *numărul obţinut scriind unul după altul* m *numere întregi:* N_1, N_2, N_3,..., N_m *de câte* n *cifre fiecare şi* N' *numărul format scriind unul după altul numerele:* N_m, N_{m-1},..., N_2, N_1. *Să se arate că diferenţa dintre* N *şi* N' *este totdeauna divizibilă cu numărul 999...99 de* n *cifre.*

Aplicaţie. *Să se arate că diferenţa dintre un număr oarecare şi răsturnatul său este totdeauna divizibilă cu 9.*

Căpitan Gr. Zapan.

Generalizare.

Să rezolvăm următoarea problemă mai generală:

In sistemul de numeraţie cu baza B, *fie* N *numărul obţinut scriind unul după altul* m *numere întregi:* N_1, N_2, N_3,..., N_m *formate fiecare respectiv din câte* n_1, n_2, n_3,..., n_m *cifre şi fie* N' *numărul obţinut scriind unul după altul, într'o ordine diferită de precedenta, aceleaşi numere* N_1, N_2, N_3,..., N_m.

Să se arate că totdeauna diferenţa dintre N *şi* N' *este divizibilă cu numărul* $(B^n - 1)$, *de* n *cifre,* n *fiind cel mai mare divizor comun al numerelor* n_1, n_2, n_3,..., n_m.

In adevăr, se observă că în orice sistem de numeraţie putem scrie:

$$B^n \equiv 1, \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

B fiind baza sistemului de numeraţie.

Ridicând această relaţie la puterea k, avem:

$$B^{nk} \equiv 1 \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

şi deci:

$$(1) \qquad B^{nk} . N_i \equiv N_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots m) \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

Numărul N. format din numerele $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_m$, scrise unul după altul, se poate scrie:

$$N = N_1 + B^{n_1} . N_2 + B^{n_1+n_2} . N_3 + \ldots + B^{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}} . N_m.$$

Dar cum n este cel mai mare divizor comun al numerelor n_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, putem pune:

$$n_i = n.k_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

şi deci:

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} n_i = n \sum_{i=1}^{i=\alpha} k_i \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Prin urmare numărul N se mai poate scrie:

$$N = N_1 + B^{nk_1} . N_2 + B^{n(k_1+k_2)} . N_3 + \ldots + B^{n(k_1+k_2+\ldots+k_{m-1})} . N_m.$$

Ţinând seama de relaţia (1) termenii acestei sume ne dau:

$$N_1 \equiv N_1 \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

$$B^{nk_1} . N_2 \equiv N_2 \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

$$B^{n(k_1+k_2)} . N_3 \equiv N_3 \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

. . . . . .

$$B^{n(k_1+k_2+\ldots+k_{m-1})} . N_m \equiv N_m \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

de unde prin adunare obţinem:

$$N \equiv N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_m \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

In mod analog, pentru numărul N′ format din aceleaşi numere N_1, N_2, N_3,..., N_m scrise unul după altul într'o ordine diferită de aceea a lui N, obţinem:

$$N' \equiv N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_m \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

Deci:

$$N \equiv N' \qquad \text{Mod. } (B^n - 1)$$

$$\therefore \quad N - N' \equiv 0 \qquad \text{Mod. } (B^n - 1).$$

Q. E. D.

Aplicaţie. Făcând $B = 10$, $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_m = n$, $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 1$, obţinem problema 2856, în care, dacă facem $n = 1$, obţinem aplicaţia cerută.

Notă. La problema 2856 s'au primit numeroase, foarte bune, generalizări. Niciuna însă nu echivalează totul şi eleganţa celei de mai sus, redactată după generalizarea trimeasă de d-l I. T. Bârsu (Constanţa), singurul care consideră numerele N_1, N_2, N_3,..., N_m formate respectiv din n_1, n_2, n_3,..., n_m cifre şi după elegantele soluţii trimise de d-ni: Ovidiu Popea (Chişinău) şi I. B. Florescu (Bucureşti), cari se folosesc in rezolvarea problemei de congruenţa:

$$10^{nk} \cdot N \equiv N \qquad \text{Mod. } (10^n - 1).$$

Afară de acestea, s'au mai primit la redacţie foarte bune soluţii, generalizări şi observări, după cum urmează:

1°. *Generalizări* dela d-nii: M. Adam, Paul Ionescu, M. Pătroianu, Ov. Popea, Al. Roşu, L. Rosenfeld, W. Solomon, Marin Ştefan şi Al. Tauber.

2°. *Soluţii*, utilizând regula de divizibilitate din articolul „*Două teoreme de aritmetică*“ (G. M. XXIV, 113—116), dela d-nii: B. M. Barbălatt, Kirilă I. Bocancea, Dima St. Iliescu. Ionescu I. Brezuica, Popovici-Puiu Dan, I. Rizescu şi Gh. Stroescu.

3° *Soluţii*, descompunând numerele N şi N′ în sume şi punând în evidenţă în diferenţa N — N′, factorul comun 999...9 (*n* cifre), dela d-ra Margareta Genuneanu (Bucureşti) şi dela d-nii: Gavril Amărăscu, Traian N. Angelescu, D. Atanasiu, E. Ballan, N. Botea, V. Dan, I. B. Florescu, L. Focşeneanu, C. I. Georgescu, St. Geogescu-Gorjan, I. Georgescu-Racoviţă, N. Georgescu-Roegen, Cristea P. Goilav, I. Huber, Emilian Iliescu, Pincu Katz, Simon Katz, Em. Manolescu, H. Marcovici, Bogdan Martinian, Andrei Miclescu, Gr. Moisil, Fl. Negretzu, Al. Niculescu, Miron Niculescu, Al. Pamula, I. D. Petrovici, Ov. Popea, Dorin Popescu, Tiberiu Popoviciu, Benedict Reinhorn, I. Rizescu, Al. Roşu, C. Schönfeld, A. Solomon, D. Solomon, W. Solomon, N. A. Stănescu, I. Stoenescu, Al. Tauber, N. Teodoru, Gr. Zamfirescu şi Michel Lemeş.

4°. *Observări diverse* dela d-nii: I. B. Florescu, Al. Roşu, W. Solomon şi Gr. Zamfirescu. Citäm pe a d-lui I. B. Florescu:

Numărul N′ *fiind format din aceleaşi numere ca* N, *dar scrise într'o ordine diferită, avem:* $N - N' = \mathcal{M}(10^n + 1)$, *când numerele* $N_1, N_2, ..., N_m$ *îşi păstrează în* N′ *paritatea ordinei din* N *şi:* $N + N' = \mathcal{M}(10^n + 1)$, *când* $N_1, N_2, ..., N_m$ *ocupă în* N′ *locuri de paritate contrară.*

Căpitan-aviator Gr. Zapan.

PROBLEMA 2918. *Să se afle locul geometric al punctelor de întâlnire ale laturilor neparalele ale trapezelor isoscele înscrise într'un cerc dat, cari au ca diagonală o coardă dată a cercului.*

Al. Niculescu.

I. *Soluţie* dată de d-l I. Coşereanu (Şcoala Politechnică, Timişoara).

Fie ABCD unul din trapezele isoscele ce au diagonala AC dată, M punctul de întâlnire dintre (AD, BC); iar O centrul cercului din enunţ. Notând cu I intersecţia arcului AB cu dreapta OM, avem:

$$\sphericalangle AOI = \sphericalangle ACB = \text{măs. arc. AI.}$$

Figura AOCM e un patrulater inscriptibil; cercul O′ circumscris acestui patrulater, trecând prin punctele fixe A, C, O, este fix. Deci:

Locul geometric al punctului M *este arcul* AMC *al cercului determinat de capetele coardei date şi centrul cercului circumscris trapezelor din enunţ.*

II. *Soluţie* dată de d-nii: C. I. Georgescu (Craiova), Oct. Gheorghiu (Liceul Codreanu, Bârlad) şi A. T. Nicolau.

Fie AD′ şi CB′, o nouă poziţie a laturilor egale şi neparalele ale trapezului isoscel şi M′ punctul lor de întâlnire. Avem:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AB'} \parallel \overline{CD'}$; deci $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle DCD'$, $\text{arc}BB' = \text{arc}DD'$ şi:

$$\sphericalangle AM'C = \frac{\text{arc}CD' - \text{arc}AB'}{2} = \frac{\text{arc}(CD' + D'D) - \text{arc}(AB' + B'B)}{2}$$

$$\therefore \qquad \sphericalangle AM'C = \sphericalangle AMC = \sphericalangle M.$$

Unghiul AMC rămâne deci constant şi prin urmare locul lui M va fi un arc de cerc circumscris triunghiului AMC.

Notă. Soluţii analoage acesteia au trimes şi d-nii: VALERIU MANAFU şi AL. ROŞU (Elevi, Liceul Militar M-rea Dealului).

III. *Soluţie* dată de d-nii: † FL. ER. GEORGESCU (Lc. «Cantemir», Bucureşti), † AL. POPEANU (Lic. «Mircea cel Bătrân», Constanţa), M. ADAM, I. S. ANTONIU, E. BĂLAN, B. M. BARBĂLATT, I. BRĂTESCU-DANUBIU, ADR. BUŞILĂ, C. I. CIORĂNESCU, I. CONSTANTINESCU, I. B. FLORESCU, M. FOCŞENEANU, I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ, N. GEORGESCU-ROEGEN, CRISTEA P. GOILAV, M. GOLDSTEIN, M. GRÜNBAUM, B. GRÜNBERG, I. O. HUBER, E. ILIESCU, PAUL IONESCU, C. IORGULESCU, P. KATZ, ST. LĂZĂRESCU, E. MANOLESCU, GH. MĂRCULESCU, D. MĂRU, M. PĂTROIANU, OV. POPEA, CORNELIU POPESCU, DORIN POPESCU, SPIREA POPESCU, T. POPOVICIU, I. RIZESCU, M. SĂVESCU, D. SCHILERU, C. SCHÖNFELD, W. SOLOMON, I. STOENESCU, I. M. ŞERBĂNESCU, N. TAILER, AL. TAUBER, I. S. TEODORESCU şi I. C. VASILIU.

Păstrând notaţiunile din soluţiile anterioare avem:

$$\sphericalangle ADC = \text{măs}\,\frac{\text{arc}AC}{2}$$

şi dacă $\quad \frac{\text{arc}AC}{2} = \theta, \quad$ atunci:

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \theta$$

şi $\quad \sphericalangle AMD = 180^0 - 2.\theta = \text{const.}$

Deci: *locul lui* M *este arcul de cerc construit pe* AC, *capabil de unghiul* $(180^0 - 2\theta)$ *şi trecând prin centrul* O.

IV. *Soluţie analitică* dată de d-nii: ST. FL. LĂZĂRESCU, AL. SCODRANO, D. PETROVICI şi GH. MELINTE:

Luând ca axe de coordonate coarda AC şi o dreaptă perpendiculară pe aceasta în A, ecuaţiile cercului O şi dreptei AB sunt respectiv:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0,$$

$$y - mx = 0.$$

Găsim coordonatele punctelor B şi C:

$$B\left[\frac{2(a+bm)}{1+m^2}\ ,\ \frac{2m(a+bm)}{1+m^2}\right];\ C(2a,0).$$

Ecuațiile dreptelor OM și DC sunt respectiv:

$$y-b=-\frac{1}{m}(x-a).$$

$$\frac{1}{a+bm}=\frac{x-2a}{b-am}.$$

M aflându-se la intersecția acestor două drepte, va trebui să eliminăm parametrul variabil m între ecuațiile lor și prin urmare ecuația locului este:

$$x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{b}y-2ax=0$$

și reprezintă un cerc trecând prin A, C, O, având raza

$$\rho=\frac{a^2+b^2}{2b}=\frac{R^2}{2b}.$$

Notă. S'a mai primit o foarte bună soluție analitică anonimă.

Observațiuni. 1°. Doi corespondenți au găsit drept loc o dreaptă!

2°. Foarte puțini au demonstrat că cercul O′ al locului trece prin centrul O al cercului dat, fapt ce rezultă și din relația: $\sphericalangle M=180^0-2\theta$, pe care majoritatea au scris-o fără a o interpretă.

3°. D-l Al. Niculescu, autorul problemei 2918, calculează geometric raza ρ a cercului O′:

$$\rho=R^2/2d,$$

R fiind raza cercului O, iar d distanța centrului O la coarda AC.

4°. D-l A. T. Nicolau e singurul care menționează faptul că locul căutat trece și prin punctul de intâlnire al tangentelor duse prin extremitățile diagonalei date.

5°. D-l Ovidiu Popea consideră următoarea problemă mai generală:

Să se afle locurile geometrice ale punctelor de întâlnire ale laturilor opuse ale unui patrulater înscris într'un cerc dat, care are ca diagonală o coardă fixă a cercului, iar cealaltă diagonală de lungime constantă.

6°. Sau mai primit câtevă soluții eronate.

Căpitan Gr. Zapan.

PROBLEMA 3104. *Se cere pătratul de trei cifre a cărui rădăcină este numărul format de ultimile două cifre ale lui.*

F. E. GEORGESCU.

Pătratul perfect N^2, fiind de trei cifre, are rădăcina lui $\leqslant 31$; deci N, fiind terminaţiune de pătrat perfect, se găseşte printre numerele :

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29.

Dealtăparte, cifrele care pot termină pătratele perfecte şi rădăcinile respective sunt 0, 1, 5, 6, deci înlăturând pe 04, 09, 24, 29 şi ridicând la pătrat pe cele rămase, găsim următoarele soluţiuni

$$00^2 = 000 \ , \ 01^2 = 001 \ , \ 25^2 = 625,$$

dintre care primele două erau evidente şi fără interes pentru problema de faţă.

Au dat soluţiuni apropiate : D-ra BUCICĂ FLORICA şi Domnii : M. ADAM, T. N. ANGELESCU, C. C. BĂRBULESCU, P. I. BLEIWEISS, M. D. BLUMENFELD, O. BOLGIU, N. G. BOTEA, A. A. BUŞILĂ, L. CĂLDĂRARU, H. COHN, GH. DAVID, G. DÂMBOIANU, T. V. DIACONESCU, M. G. DUMITRESCU, C. FEDELEŞ, E. GABROVSKII, B. GATAIANŢU, E. D. GEORGESCU, M. GEORGESCU, GH. I. GHIMICESCU, V. GHIŢESCU, C. GIURUMESCU, E. I. GULIAN, A. IONESCU, C. C. IONESCU, I. IONESCU-BREZUICA, I. P. IONESCU, A. T. şi C. T. IONESCU-BUJOR, D. ILIESCU, L. KATZ, P. KATZ, V. MANAFU, H. MARCOVICI, R. MĂRDĂRESCU, ŞT. MARIN, C. D. MIHĂESCU, ION M. MIU, D. S. NICULESCU, N. NICOLESCU, A. NOVAC, E. PĂLĂRIERU, ILIE POPA, C. N. POPESCU, D. POPESCU, M. D. POPESCU, C. C. POPOVICI, D. PUIU-POPOVICI, T. RĂDULESCU, B. A. REINHORN, AL. ROŞU, D. C. SCHILERU, C. SCHÖNFELD, G. D. SIMIONESCU, D. I. SOLOMON, C. I. STĂNCULESCU, G. TAILER, I. ST. TEODORESCU, N. TEODORESCU, V. VÂRLAN, G. G. VASILIU, I. C. VASILIU, S. WEISS, A. MANOIL-ROMAN, A. C. FLOREA, T. STOICESCU, M. A. DUMITRESCU, D. POPOVICI.

Observarea I. Fiind cunoscute soluţiunile acestei probleme, se deduc imediat soluţiunile problemei propuse de acelaş corespondent D-l F. E. GEORGESCU sub numărul 3113.

„Să se găsiască un număr de patru cifre, ştiind că numă-

„rul format de ultimile sale două cifre este rădăcina pătrată a „numărului format de ultimile sale trei cifre, iar suma cifrelor „ştiind că este un multiplu de 6".

Soluţiunile acestei probleme, ţinând seamă de problema 3104, sunt de forma $a000$, $a001$, $a625$, în care $a \leqq 9$ şi astfel în cât avem respectiv $a \equiv \mathcal{M}6$, $a \equiv \mathcal{M}6 - 1$, $a \equiv \mathcal{M}6 - 1$, care dau soluţiunile:

6000; 5001; 5625.

Au găsit aceste trei soluţiuni Domnii: M. I. Adam, P. I. Bleiweiss, O. Bolgiu, N. G. Botea, I. Cantacuzino, V. S. Dorneanu, Gh. I. Ghimicescu, C. Giurumescu, M. Georgescu. D. Niculescu, Al. A. Opran, C. C. Popescu, B. A. Reinhorn, I. St. Teodorescu, V. Vârlan, A. C. Florea.

Observarea II. Problema 3104 a fost rezolvată pe altă cale de Domnii: Emil Ştefănescu, C. I. Ciorănescu, A. Tauber şi Gh. M. Călin.

Observarea III. In «L'Education Mathém. 26ème année, No. 6» este tratată problema 3104 pentru patru cifre; precum şi problema generală: *„Să se găsiască numerele de* n *cifre, al căror pătrat se termină cu aceleaşi* n *cifre"*. Soluţiunea e greoaie, cu ajutorul analizei nedeterminate. O demonstraţie *mai elegantă, mai simplă şi mai generală* a acestei probleme generale a fost dată de Domnul profesor Gh. Ţiţeica (*O problemă de Aritmetică.* G. M. vol. IX). A se vedeà dealtminteri şi problema 2381. (Const. I. Ciorănescu).

PROBLEMA 3200. *O minge de foot-ball cade vertical dela 10 m. înălţime. Presupunând că din cauza înclinărei terenului în punctul de cădere, mingea ricoşează, sărind sub un unghiu oarecare, apoi la a doua cădere fenomenul se repetă şi tot aşà mereu până se opreşte mingea, se întreabă:*

La ce depărtare maximă poate ajunge mingea dela punctul de cădere, admiţând că viteza de ricoşat este numai 2/3 din viteza de cădere (aceasta din cauza frecărei cu terenul şi a imperfecţiunei elasticităţei mingei) şi rezistenţa aerului se neglijează.

Căpitan I. Linteş.

Soluţie şi *generalizare* dată de D-nii: OVIDIU POPEA (cl. VIII Lc. Ploeşti) şi N. GH. BOTEA (cl. VII Lc. Cantemir).

Fie h înălţimea dela care cade mingea şi fie $A_1, A_2 \ldots A_n$ punctele succesive de cădere, pe cari le luăm în linie dreaptă.

Dacă se iau ca axe: orizontala şi verticala punctului de cădere A_k, se observă lesne că traectoria mingei din A_k până în A_{k+1} este parabola:

$$1) \qquad y = x\operatorname{tg}\alpha_k - \frac{gx^2}{2v_k^2\cos^2\alpha_k},$$

v_k şi α_k fiind viteza şi unghiul cu care mingea pleacă din A_k. Valoarea lui v_k se deduce imediat observând că viteza cu care mingea *pleacă* din A_i este aceeaşi ca aceea care *soseşte* în A_{i+1}. Vom găsi:

$$v_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \sqrt{2gh}.$$

Relaţiunea 1) ne dă imediat:

$$2) \qquad \overline{A_k A_{k+1}} = \frac{v_k^2 \cdot \sin 2\alpha_k}{g} = \left(\frac{4}{9}\right)^k \cdot 2gh\,\frac{\sin 2\alpha_k}{g}$$

$$= 2h\left(\frac{4}{9}\right)^k \sin 2\alpha_k .$$

Deci:

$$3) \qquad X = \Sigma\,\overline{A_k A_{k+1}} = 2h\left(\frac{4}{9}\sin 2\alpha_1 + \frac{4^2}{9^2}\sin 2\alpha_2 + \ldots .\right).$$

Se vede uşor că maximum lui X este pentru:

$$\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 = \cdots = 1$$

$$\therefore \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 45^0.$$

Aşă dar:

$$4) \qquad X_{max.} = 2h\left(\frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \cdots\right) = \frac{8}{5}\,h \text{ metri.}$$

Pentru $h = 10$ m. avem $X_m = 16$ m.

Observaţiuni. 1) D-l O. POPEA a găsit că timpul maxim pe care îl întrebuinţează mingea spre a se opri este:

$$T_{max.} = \frac{5\sqrt{2h}}{\sqrt{g}} \text{ secunde.}$$

Pentru $h = 10$ m. $T_m = 7,^{sec.}14$.

2) D-l N. Botea a generalizat problema, fără însă a admite că $\alpha = 45^0$.

3) Menţionez grija pusă de D-l O. Popea în redactarea, ortografia şi caligrafia soluţiei problemei 3200, aducându-i toate laudele.

Căpitan I. L.

PROBLEMA 3222. *Care cuburi de patru cifre încep cu rădăcina lor?*

E. Ştefănescu.

I. *Soluţie* dată de D-l Ovidiu Popea (Liceul Ploeşti).

Să găsim cuburile de 4, 5, 6,.... cifre, în condiţiunile problemei. Metoda generală e următoarea:

1. Pentru cuburile de patru cifre:

Avem succesiv

$$\begin{aligned} 10^3 \leqslant N^3 < 10^4 \quad &\therefore \quad 10 \leqslant N \leqslant 21 \\ 1000 \leqslant N^3 \leqslant 2100 \quad &\therefore \quad 10 \leqslant N \leqslant 12 \\ 1000 \leqslant N^3 \leqslant 1200 \quad &\therefore \quad 10 \leqslant N \leqslant 10 \end{aligned}$$

Deci: $N = 10$ şi $10^3 = 1000$.

2. Pentru cuburile de cinci cifre, avem:

$$\begin{aligned} 10^4 < N^3 < 10^5 \quad &\therefore \quad 21 < N \leqslant 46 \\ 21000 < N^3 \leqslant 46000 \quad &\therefore \quad 27 < N \leqslant 35 \\ 27000 < N^3 \leqslant 35000 \quad &\therefore \quad 30 < N \leqslant 33 \\ 30000 < N^3 \leqslant 33000 \quad &\therefore \quad 31 < N \leqslant 32 \end{aligned}$$

Deci: $N = 32$ şi verificând avem $32^3 = 32768$.

3. Pentru cuburile de 6 cifre avem:

$$\begin{aligned} 10^5 < N^3 < 10^6 \quad &\therefore \quad 46 < N < 100 \\ 460000 < N^3 < 10^6 \quad &\therefore \quad 77 < N < 100 \\ 770000 < N^3 < 10^6 \quad &\therefore \quad 91 < N < 100 \\ 910000 < N^3 < 10^6 \quad &\therefore \quad 96 < N < 100 \\ 960000 < N^3 < 10^6 \quad &\therefore \quad 98 < N < 100 \end{aligned}$$

De unde, $N = 99$ şi verificând vedem că

$$N^3 = 99^3 = 970299,$$

nu începe cu 99. Deci cuburi de 6 cifre în condițiunile problemei nu avem.

Analog se poate continuă și găsi sau nu, soluții pentru cuburi de un număr mai mare de cifre.

Observare. Această problemă mai poate fi rezolvată urmând modul de extragere al rădăcinei cubice; astfel punând condiția pentru numărul *abcd*, avem: $\sqrt[3]{a} \geqslant a \quad \therefore \quad a = 1$.

Apoi rezultă că $b | 3a^2$ sau $b | 3 \geqslant b$; de unde $b = 0$.

Deci $10^3 = 1000$.

Demonstrația se aplică pentru orice cub de $3p + 1$ cifre și soluția este $(10^p)^3 = 10^{3p}$.

In mod analog au rezolvat problema, pentru cazul cuburilor de patru cifre, Domnii:

N. Botea, L. Brüll, Gr. Grubenmann, N. Segârceanu, Gh. I. Zane, Th. Andrei Ionescu-Bujor, Al. Opran, B. A. Reinhorn (Liceul Cantemir-Vodă, București), C. I. Ciorănescu, M. Diaconu, I. I. Georgescu, I. I. Marinescu, D. G. Milculescu și Sp. I. Popescu (Liceul Militar «Mânăstirea Dealului»), H. Cohn, Eug. St. Iacob, S. Katz, H. Marcovici și L. Segal (Liceul Laurian Botoșani), Gh. Călin, B. Gataianțu și L. Iliuță (Liceul Ioniță Asan, Caracal), Eug. D. Georgescu, C. C. Popovici (Liceul Internat, Iași), M. Bernștein și S. Weiss (Liceul Galați), Gh. V. Nicolau și G. Tailer (Liceul Codreanu, Bârlad), N. St. Mihăilescu și René Spathy (Liceul Matei Basarab, București), Gh. David și Gh. Vasiliu (Liceul Timișoara), Leon Căldăraru Eug. Massler și N. Jojea (București), V. Cazacincu (cl. VIII-a particulară), Gh. Cojoc (P. Neamț), Mișu Dumitrescu (Liceul Roman), Ad. Manoil (elev part. Roman), P. Lecescu (cl. VII-a Chișinău), Alex. Dan St. Petrescu (Liceul Militar Craiova), Corn. Popescu (Liceul Giurgiu), L. Scripcă (Liceul Național, Iași), V. V. Vârlan (Iași), Ioan Vlădea (Liceul Șaguna, Brașov).

Deasemenea, au rezolvat problema în sensul observărei dela soluția de mai sus, Domnii: C. I. Istinie (Liceul Caracal) și Milu Blumen (Liceul Petru Rareș, Piatra Neamț).

II. *Soluție* dată de Domnii: D. Nestor, C. Th. Ionescu-Bujor și Aurelian Stoica (Lic. Cantemir, București), I. Miu, T. Diaconescu și D. Florescu (Liceul Caracal), V. Georgescu, Ilie Popa, T. Pușcă și T. Stoicescu (Liceul Internat, Iași), M. Pă-

TROIANU, AL. ROȘU și GH. D. SIMIONESCU (Liceul Mânăstirea Dealului), M. ADAM (Constanța), EM. GAIU (Bârlad), ANGELO IONESCU (Cluj), ÁRNO KAHANE, EUG. PĂLĂRIERU, CRISTEA GR. PETRE, OZ. M. SCHÄCHTER.

Numărul e de forma

$$N = 1000a + 100b + 10c + d = 1000a^3 + 300a^2b + 300ab^2 + b^3.$$

Pentru cuburile de patru cifre, avem $\sqrt[3]{a} = a$, de unde $a = 1$.

Deci rămâne din cele de mai sus, să avem

$$10c + d = 200b + 300b^2 + b^3.$$

Partea întâia a acestei egalități fiind un număr de două cifre, nu putem avea decât $b = 0$.

Deci numărul căutat este $10^3 = 1000$.

III. *Soluție* dată de Domnii: I. C. VASILIU, AL. BUDIȘTEANU, C. I. CIORĂNESCU, I. GRIGORESCU și PAUL IONESCU (Liceul Militar M-tirea Dealului), N. TEODORESCU (Liceul Spiru Haret).

Fie M și N numerele formate de primele și ultimele două cifre ale cuburilor cerute. Va trebui să avem:

$$100\,M + N = M^3$$
$$M(M^2 - 100) = N$$
$$\text{sau} \quad M(M + 10)(M - 10) = N.$$

Pentru $M = 11$, N e de trei cifre, deci ne rămâne ca soluție unică $M = 10$ și atunci $N = 0$ adică $N = 00$.

Cubul cerut este $10^3 = 1000$.

Notă. 1. Au arătat că în cazul cuburiior de 5 cifre corespunde numărul $32768 = (32)^3$, D-nii: C. I. CIORĂNESCU, V. CAZACINCU, MIȘU DUMITRESCU, I. I. GEORGESCU, C. IONESCU-BUJOR, EUG. MASSLER, I. C. VASILIU.

2. D-nii: P. BLEIWEISS, N, BOTEA, I. L. GRIGORESCU, V. MANAFU, DAN POPOVICI și I. TH. POPOVICI au arătat că problema aceasta e un caz particular al observărei No. 3, făcută la pag. 74, Vol. XXX al G. M., cu ocazia rezolvărei problemei 3181, unde se arată cuburile de patru cifre, cari au rădăcinile formate din două cifre ale cubului.

3. Alte observări de Domnii: C. I. CIORĂNESCU, I. I. GEORGESCU și C. TH. IONESCU-BUJOR.

4. In ultimul timp s-au mai primit soluții și dela D-l VAL. NOVACU.

Locot.-Colonel GH. I. LITEANU.

PROBLEMA 3238. *Să se găsiască rezultatul eliminării lui* x *dintre polinoamele*

$$(1)\qquad Ax^{n+1}+Bx^n+C=0, \qquad (2)\qquad x^2-x+1=0.$$

D. V. IONESCU.

In polinomul (1) vom înlocui succesiv x^2 prin $x-1$, scos din (2). Să punem

$$u_n=Ax^{n+1}+Bx^n.$$

Vom avea:

$$u_n=Ax^{n-1}(x-1)+Bx^{n-2}(x-1)=u_{n-1}-u_{n-2}.$$

De asemenea

$$u_{n-1}=u_{n-2}-u_{n-3}.$$

Deci avem:

$$(3)\qquad u_n=-u_{n-3}=u_{n-6}=-u_{n-9}=u_{n-12}=\ldots\ldots$$

Putem micşorà deci gradul polinomului (1) cu 6, fără ca rezultatul eliminării lui x între (1) şi (2) să se schimbe.

1°. $n=\mathcal{M}.6$. Rezultatul eliminării lui x între (1) şi (2) este acelaş ca între

$$Ax+B+C=0 \quad şi \quad x^2-x+1=0.$$

Din prima ecuaţie scoatem $x=-(B+C)/A$ şi înlocuind în a doua găsim că rezultatul eliminării este

$$(B+C)^2+A(B+C)+A^2=0.$$

2°. $n=\mathcal{M}6+1$. După cum am văzut mai sus, ecuaţiile (1) şi (2) pot fi înlocuite prin

$$Ax^2+Bx+C, \qquad x^2-x+1=0.$$

Sau:

$$(A+B)x+(C-A)=0, \qquad x^2-x+1.$$

Rezultatul eliminării este

$$(A-C)^2-(A-C)(A+B)+(A+B)^2=0.$$

3°. $n=\mathcal{M}6+2$. Ecuaţiile (1) şi (2) se reduc la

$$Ax^3+Bx^2+C=0, \qquad x^2-x+1=0,$$

care se pot încă reduce la

$$(A+B)x^2-Ax+C=0, \qquad x^2-x+1=0.$$

Sau

$$Bx - (A + B) + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

Rezultatul eliminării este

$$(A + B - C)^2 - B(A + B - C) + B^2 = 0.$$

4°. $n = \mathcal{M}.6 + 3$. Ecuațiile (1) și (2) se reduc la

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

Ținând seamă de formula (3) unde facem $n=4$, aceste ecuații se reduc încă la

$$-Ax - B + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

Rezultatul eliminării este

$$(C - B)^2 - A(C - B) + A^2 = 0.$$

5. $n = \mathcal{M}.6 + 4$. Ecuațiile (1), (2) se reduc la

$$Ax^5 + Bx^3 + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

Sau după (3)

$$-Ax^2 - Bx + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

Sau

$$-(A + B)x + (A + C) = 0, \qquad x^2 - x + 1 - 0.$$

Rezultatul eliminării este

$$(A + C)^2 - (A + B)(A + C) + (A + B)^2 = 0.$$

6°. $n = \mathcal{M}.6 + 5$. Ecuațiile (1) și (2) se reduc la

$$Ax^6 + Bx^5 + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

După (3) acestea se reduc încă la:

$$-Ax^3 - Bx^2 + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0$$

Sau:

$$-(A + B)x^2 + Ax + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

Sau:

$$-Bx + (A + B + C) = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

Rezultatul eliminării este deci:

$$(A + B + C)^2 - B(A + B + C) + B^2 = 0.$$

In rezumat, rezultatul eliminării lui x între polinoamele

$$Ax^{n+1} + Bx^n + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0,$$

este una din expresiunile:

$$(B + C)^2 + A(B + C) + A^2 = 0.$$

$$(A - C)^2 - (A - C)(A + B) + (A + B)^2 = 0,$$

$$(A + B - C)^2 - B(A + B - C) + B^2 = 0,$$

$$(C - B)^2 - A(C - B) + A^2 = 0,$$

$$(A + C)^2 - (A + C)(A + B) + (A + B)^2 = 0.$$

$$(A + B + C)^2 - B(A + B + C) + B^2 = 0,$$

după cum restul împărţirei lui n prin 6 este 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Au rezolvat problema Domnii: V. Dorneanu, A. C. Florea, Eug. D. Georgescu, C. Giurumescu, C. C. Popovici, Toma Puşcă, V. V. Vârlan (Elevi clasa VII, liceul Internat, Iaşi) şi D-l Mauriciu Ghelber (Seminarul Pedagogic Universitar, Bucureşti).

PROBLEMA 3266. *Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţiunea:*

$$(b - c)r_a + (c - a)r_b + (a - b)r_c = (b - a)(c - b)(a - c) : r.$$

Adrian A. Buşilă.

I. *Soluţie* dată de D-nii: Corneliu N. Popescu (Liceul Giurgiu); Alex. C. Florea, Lupu Avram, Ilie Popa, C. C. Popovici, V. Dorneanu, Eug. D. Georgescu, Gh. I. Ghimicescu, V. I. Lepădatu, C. A. Mihăilescu, Adrian Novac şi Toma Puşcă, (Liceul Internat, Iaşi); L. Scripcă, Gh. Spiridonescu şi V. V. Vârlan (Iaşi); Ioachim Grigore (Liceul Militar, Iaşi); P. Bleiweiss, N. G. Botea, L. Brüll, C. Th. Ionescu-Bujor, Eug. Massler, Al. C. Mladenovici, Dumitru Nestor şi B. A. Reinhorn (Liceul Cantemir, Bucureşti); Gh. M. Călin, Teodor Călin, B. Gataianţu, Istinie I. C. Brezuica, I. M. Miu şi F. M. Octavian (Liceul Ioniţă Asan, Caracal); H. Cohn, Eug. Şt. Iacob şi Lazăr Katz (Liceul Laurian, Botoşani); N. St. Mihăilescu şi René Spathy (Liceul Matei Basarab, Bucureşti); Stoica Aureliu (Bucureşti); I. I. Georgescu-Racoviţă şi V. I. Manolache (Liceul M-tirea

Dealului); VICTOR V. TĂRAŞ şi IOAN VLĂDEA (Liceul Şaguna, Braşov); VLAD DÂNGA şi EUG. GRABOWSKI (Liceul Orheiu); IOAN C. BUGA şi P. SPACU (Cluj); N. I. MANOLESCU şi AUREL POPOVICIU (Liceul Unirea, Focşani); MIHAIL GR. VELEA (Liceul Militar, Craiova); TR. TUNARU (Craiova); GR. I. MAREŞ (Liceul Bacău); GH. RUSANDA şi V. NOVACU (Liceul Arad); M. BLUMEN (Liceul Petru-Rareş, Piatra Neamţ); DAN P. POPOVICI (Chişinău); D. SEVASTRE (Liceul Codreanu, Bârlad); OZ. M. SCHÄCHTER (Liceul Galaţi); DIMA ŞT. ILIESCU, ARON KAHANE, V. N. LAZANU şi UN ANONIM.

Inlocuind pe r, r_a, r_b, r_c prin valorile cunoscute:

$$r = \frac{s}{p}; \; r_a = \frac{s}{p-a}; \; r_b = \frac{s}{p-b}; \; r_c = \frac{s}{p-c};$$

şi ţinând seamă că

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

relaţiunea, ce trebue demonstrată, devine

$$(1) \quad (b-c)(p-b)(p-c) + (c-a)(p-c)(p-a) + (a-b)(p-a)(p-b) = (b-a)(c-b)(a-c).$$

Pentru a arătà aceasta, sau facem calculele şi ajungem în ambele părţi la aceiaşi expresie, sau procedăm astfel:

Vedem că pentru $a = b$; $b = c$; $c = a$; partea întâia o relaţiei (1) se anulează, deci putem scrie că ea este identică cu

$$k(b-a)(c-b)(c-a),$$

unde k e o constantă. Pentru determinarea lui k, dăm o serie de valori numerice lui a, b şi c, de ex: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ şi înlocuindu-le în identitatea

$$(b-c)(p-b)(p-c) + (c-a)(p-c)(p-a) + (a-b)(p-a)(p-b) \equiv k(b-a)(c-b)(a-c),$$

se obţine $k = 1$.

Prin urmare relaţia (1) este adevărată şi în consecinţă şi relaţiunea dată în enunţul problemei.

II. *Soluţie* dată de D-nii: ION C. VASILIU (Liceul M-rea Dealului) şi ION TH. POPOVICI (Şcoala Politechnică, Bucureşti).

Pornim dela identitatea

$$\Sigma(a-b)(p-a)(p-b) = 4\,\Pi(b-a),$$

stabilită ca mai sus, sau prin scăderea identităţilor:

$$\Sigma(a-b)^3 = -3\Pi(b-a) \quad ; \quad \Sigma c^2(a-b) = \Pi(b-a)$$

(G. M. — XXX pag. 21).

Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu oarecare şi ţinând seamă că:

$$-a+b+c = 2(p-a),\ldots \text{ etc. şi } rr_c = (p-a)(p-b),..$$

ajungem să stabilim relaţia din enunţul problemei, adică

$$\Sigma(a-b)r_c = \Pi(b-a)/r.$$

III. *Soluţie* dată de D-nii: Ioan Th. Popovici (Şcoala Politechnică, Bucureşti); G. Hartular şi Samy Gropper (Liceul Internat, Iaşi).

Pornim dela relaţia

$$(1) \quad (b-c)\cos^2\tfrac{1}{2}A + (c-a)\cos^2\tfrac{1}{2}B + (a-b)\cos^2\tfrac{1}{2}C = \frac{p(a-b)(b-c)(c-a)}{abc},$$

din *Culegere de Probleme*, Trigonometrie pag. 397.

Ţinând seamă de relaţiile:

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{r_b+r_c}{4R}; \quad \cos^2\tfrac{1}{2}B = \frac{r_a+r_c}{4R}, \quad \cos^2\tfrac{1}{2}C = \frac{r_a+r_b}{4R}.$$

(F. G.-M. pag. 168. Trigonometrie).

relaţiunea (1) devine

$$\Sigma(b-c)(r_b+r_c) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{r}.$$

Desfăcând parantezele sumei din partea întâia, făcând reducerile şi grupând convenabil, se ajunge la relaţia din enunţ.

Observaţii 1. D-l Em. Gaiu a stabilit relaţia din enunţ servindu-se de formula

$$\Sigma x^2(\gamma-\beta) = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha).$$

2. D-nii: Al. Roşu şi An. Ionescu Th. Bujor s'au servit de relaţiile

$$a = \frac{r_a(r_b+r_c)}{p}; \text{ etc...}$$

3. D-nii: R. Rabinovici şi N. Beschea au întrebuinţat relaţiile

$$r_a = p\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a; \text{ etc.}$$

iar D-l H. Marcovici relaţiunea

$$pr = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c).$$

4. Alte soluţii de D-nii: Ioan Th. Popovici, Valeriu Novacu, Filip S. Goldştein, M. Pătroianu, Gh. Caracaş şi T. Diaconescu.

5. Cu ocazia rezolvării acestei probleme s'au stabilit şi următoarele relaţii:

$$\sum \frac{b-c}{p-a} = \sum \frac{b(a-c)}{(p-a)(p-b)}$$

I. M. Miu.

$$\sum h_a (b-c) = (b-a)(c-b)(a-c) : 2R.$$

Eug. S. Iacob.

$$\sum \frac{d_c - d_b}{h_a} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{r^2(a+b+c)},$$

unde $d_c = 2RcosC,...$

Ioan Th. Popovici.

Lt.-Colonel Gh. I. Liteanu.

PROBLEMA 3274. *Fie* ABCD *un trapez înscris într'un cerc şi* M *un punct oarecare de pe cerc. Să se demonstreze că proiecţiile* A_1,B_1,C_1,D_1 *ale punctului* M *pe laturile neparalele şi pe diagonalele trapezului, sunt patru puncte conciclice.* (Enunţ rectificat).

Marin Ştefan.

Soluţie dată de D-nii: Gh. M. Călin (Elev Clasa V, Liceul din Caracal), N. Teodorescu (Elev Cl. VI, Liceul Spiru Haret), şi Const. C. Popovici (Cl. VIII, Liceul Internat, Iaşi).

Fie A_1, B_1, E, F, C_1, D_1 proiecţiile punctului M pe laturile AD, BC, CD, AB şi diagonalele AC, BD. Observăm că punctele A_1, C_1, E se află pe dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ACD. Analog, punctele B_1, D_1, E se află pe dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul BCD. Laturile AB şi CD fiind paralele, punctul F se află pe dreapta ME. Observăm apoi că unghiurile AA_1M, AC_1M, AFM fiind drepte, punctele A, A_1, M, F, C_1 se află pe cercul descris pe AM ca diametru. Analog, punctele B, B_1, M, F, D_1, se află pe cercul descris pe BM ca diametru. Avem deci în aceste două cercuri:

$$EC_1 \cdot EA_1 = EF \cdot EM \quad \text{şi} \quad ED_1 \cdot EB_1 = EF \cdot EM$$

$$\therefore \quad EC_1 \cdot EA_1 = ED_1 \cdot EB_1,$$

relaţie care ne arată că punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sunt conciclice.

Soluție dată de D-nii: V. DORNEANU, G. HARTULAR (Elevi Liceul Internat, Iași), LEON SEGAL (Liceul Laurian, Botoșani) și M. DRĂGHICEAN (Liceul Brașov).

Observăm că grupurile de puncte (A_1, C_1, E), (B_1, D_1, E), (A_1, F, D_1), (B_1, F, C_1) sunt colineare, căci se găsesc pe dreptele lui SIMSON ale punctului M în raport cu triunghiurile ACD, BCD, ABD, ABC.

Patrulaterele MA_1DE și MA_1DD_1 fiind inscriptibile, avem

$$\sphericalangle DME = \sphericalangle DA_1E \quad \text{și} \quad \sphericalangle DMD_1 = \sphericalangle DA_1D_1,$$

de unde prin scădere parte cu parte, obținem

$$\sphericalangle D_1ME = \sphericalangle D_1A_1E = \sphericalangle D_1A_1C_1.$$

In mod analog obținem

$$\sphericalangle C_1ME = \sphericalangle D_1B_1C_1.$$

Insă $\sphericalangle D_1ME = \sphericalangle C_1ME$, căci sunt egale respectiv cu unghiurile egale ABD și BAC, ca având laturile perpendiculare. Rezultă atunci că avem $\sphericalangle D_1A_1C_1 = \sphericalangle D_1B_1C_1$ și prin urmare punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sunt conciclice.

Au rezolvat problema și D-nii: E. GRÜNȘTEIN și DERMER (Elevi Liceul M. Kogălniceanu, Iași).

PROBLEMA 3285. *Fie* A', B', C' *intersecțiile bisectoarelor interioare ale unghiurilor unui triunghiu* ABC *cu cercul circumscris triunghiului,* A_1, B_1, C_1 *mijloacele segmentelor* AA', BB', CC', A_b, A_c *picioarele perpendicularelor scoborîte din* A' *pe laturile* AB *și* AC *și* B_a, B_c, C_a, C_b *punctele analoage. Să se demonstreze că:*

1) *Punctele* A_1, B_1, C_1 *sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor* $A_b A_c A'$, $B_c B_a B'$, $C_a C_b C'$.

2) *Centrul cercului* $A_1B_1C_1$ *este mijlocul dreptei* OI *care unește centrul cercului circumscris, cu centrul cercului înscris triunghiului* ABC.

MAX BERNSTEIN.

Soluție dată de D-nii: V. DORNEANU, N. BOTEA, ARNO KAHANE, ION M. MIU, V. VÎRLAN, VASILE TĂRAȘ (Elev Liceul Șaguna, Brașov), EMANOIL GH. GAIU (Elev, Liceul Codreanu, Bârlad),

N. Teodorescu (Liceul Sp. Haret), Grigore Ioachim (Elev cl. VI, Liceul Militar Iaşi), D. I. Sevastre, Leon Segal, Const. C. Popovici (Liceul Internat, Iaşi), C. Th. Ionescu-Bujor (Liceul Cantemir-Vodă), Laur Scripcă (Iaşi), A. A. Popovici (Focşani), Valeriu Manafu, Ion Th. Popovici, Ion Vlădea (Cl. VII, Liceul A. Şaguna, Braşov), N. I. Manolescu (Liceul Unirea, Focşani), Corneliu Popescu (Cl. VI, Liceul Giurgiu), D. G. Nestor (Cl. V, Liceul Cantemir-Vodă), René I. Spathy (Cl. VI, Liceul Matei Basarab), Leon Căldăraru (Cl. VIII particulară, Bucureşti).

1. Unghiurile $AA_b\,A'$, $AA_c\,A'$ fiind drepte, patrulaterul $AA_b\,A_c\,A'$ este înscris în cercul care are pe AA' ca diametru şi al cărui centru este deci A_1.

Analog arătăm că B_1 şi C_1 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $B_c\,B_a\,B'$ şi $C_a\,C_b\,C'$.

2. Dreptele AA', BB', CC' fiind coarde în cercul circumscris, perpendicularele ridicate pe mijloacele lor trec prin centrul O al cercului circumscris.

De altă parte, bisectoarele AA', BB', CC' se întretaie în centrul I al cercului circumscris, iar unghiurile OA_1I, OB_1I, OC_1I fiind drepte, punctele A_1, B_1, C_1 se află pe cercul descris pe dreapta OI ca diametru.

D-nii: V. Dorneanu, N. Botea, I. M. Miu, Arno Kahane, N. Teodorescu, Const. C. Popovici, C. Th. Ionescu-Bujor, Laur Scripcă, A. A. Popovici şi Valeriu Manafu au arătat că problema subsistă în întregime când în loc de bisectoare, considerăm trei transversale unghiulare AA', BB', CC', care trec printr'un punct oarecare P din planul triunghiului. Centrul cercului $A_1B_1C_1$ este atunci mijlocul dreptei OP. Demonstraţia e analoagă cu cea de mai sus.

D-nul I. M. Miu mai observă că prima parte a problemei subsistă chiar şi în cazul când dreptele AA', BB', CC' nu sunt concurente.

EXERCIŢII

7. Se cer două patrate consecutive, aşà ca diferenţa lor să fie numărul format de ultimele două cifre ale unuia din ele.

G. David.

R. Din $(n+1)^2 - n^2 = (2n+1) < 100$ reese $n < 49$. Diferenţa fiind nepereche nu ar puteà fi decât numerele 01 ; 21 ; 41 ; 61 ; 81 ; 25 ; 09 ; 29 ; 49 ; 69 ; 89 care pot terminà patrate. Acestea ar puteà fi luate ca $(2n+1)$, de

unde scoatem pe n şi apoi soluţiile $(11^2 - 10^2)$; $(21^2 - 20^2)$; $(31^2 - 30^2)$ $(41^2 - 40^2)$.

8. Două patrate de trei cifre sunt unul răsturnatul altuia, iar suma unuia cu dublul altuia este un cub. Se cer acele patrate.

C. N. Popescu.

R. Patrate răsturnate unul altuia sunt numai 144 cu 441 şi 169 cu 961. Insă numai $441 + 2 \times 144$ dă 9^3.

9. Un număr este scris cu trei cifre, care formează dela stânga la dreapta o progresiune aritmetică crescătoare, şi are un multiplu format din trei cifre identice. Se cere acel număr.

Gh. P. Bogdan.

R. Raţia nu poate trece de 4. După cum raţia este 1; 2; 3; 4, numărul este $111n + 12$, 24, 36, 48. Ca acesta să aibă cifrele identice, n nu poate trece peste 4. Se găseşte numai pentru $n = 1$ soluţia $135 \times 5 = 675$.

10. d_a, d_b, d_c, fiind distanţele dela vârfurile unui triunghiu ABC la ortocentru, să se demonstreze relaţia:

$$\frac{d_a^3}{(d_a - d_b)(d_a - d_c)} + \frac{d_b^3}{(d_b - d_a)(d_b - d_c)} + \frac{d_c^3}{(d_c - d_a)(d_c - d_b)} = 2(R+r).$$

Paul I. Ionescu.

R. Se face în identitatea:

$$\sum \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} = a + b + c,$$

$a = d_a$; $b = d_b$; $c = d_c$; şi se observă relaţiile:

$$d_a = 2R\cos A \quad ; \quad d_b = 2R\cos B \quad ; \quad d_c = 2R\cos C.$$

$$\sum \cos A = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C = (R + r)/R.$$

11. In orice triunghiu avem relaţia:

$$\frac{r_a^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{r_b^2}{(a-b)(c-b)} + \frac{r_c^2}{(a-c)(b-c)} = \frac{4R}{r} + 1.$$

I. Vasiliu.

R. In identitatea $\sum a^3/(b-a)(c-a) = a + b + c$, facem $a = r_a$, $b = r_b$, $= r_c$ şi ţinem seamă că $r_c(r_a - r_b) = p(a - b) \ldots$ etc.

12. Dacă R_a, R_b, R_c şi R'_a, R'_b, R'_c sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $B\Omega_1C$, $A\Omega_1C$, $B\Omega_1A$ şi $B\Omega_2C$, $A\Omega_2C$, $B\Omega_2A$, Ω_1 şi Ω_2 fiind punctul retrograd şi direct al lui Brocard, să se demonstreze relaţia:

$$R'_a \cdot R_a / a^2 + R'_b \cdot R_b / b^2 + R'_c \cdot R_c / c^2 = R/2\gamma.$$

Marin Ştefan.

R. Din triunghiul $B\Omega_1C$ deducem:

$$(1) \qquad a/\sin C = 2R_a,$$

iar din triunghiul $B\Omega_2C$ deducem:

(2) $a/\sin B = 2R'_a$.

Inmulţind relaţia (1) cu relaţia (2), avem:

$a^2/\sin B \sin C = 4R_a \cdot R'_a$, sau $R'_a \cdot R_a / a^2 = 1/4\sin B \sin C$.

Deci vom avea:

$$R'_a \cdot \frac{R_a}{a^2} + R'_b \cdot \frac{R_b}{b^2} + R'_c \cdot \frac{R_c}{c^2} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{4 \sin A \sin B \sin C}.$$

Dar:

$$\sum \sin A = P/R \quad \text{şi} \quad \sin A \sin B \sin C = P\gamma/2R^2.$$

Deci

$$\sum R'_a \cdot \frac{R_a}{a^2} = \frac{P/R}{2P.\gamma/R^2} = \frac{R}{2\gamma}.$$

PROBLEME PROPUSE

3341. Să se demonstreze că 30 este limita superioară a numerelor, pentru care toate numerele inferioare lor şi prime cu ele sunt numere prime absolute.

I. Ionescu.

3342. O progresie aritmetică are $p + q$ termeni, din care primul este egal cu a. Se cere raţia acestei progresii şi suma primilor p termeni, ştiind că suma ultimilor q termeni este nulă.

Locot.-Col. Gh. Buicliu.

3343. Fie

$$P_m = a^m + a^{m-1} b + \ldots + ab^{m-1} + b^m.$$

Să se arate că expresiunea

$$E = \frac{P_n}{n+1} \cdot \frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{n+m}}{m+n+1}$$

este divizibilă prin $(a-b)^2$ şi să se exprime câtul cu ajutorul lui $P_1, P_2, \ldots, P_{m+n-2}$.

Se presupune m şi n întregi şi pozitivi.

D. V. Ionescu.

3344. Fie A_1 punctul unde simediana AK a unui triunghiu oarecare ABC întâlneşte cercul circumscris triunghiului şi A_2, A_3 piciorul bisectoarei interioare şi exterioare a unghiului A. Să se demonstreze că dreptele A_1A_2 şi A_1A_3 sunt dreptunghiulare.

N. G. Botea.

3345. Fie O_a, O_b, O_c centrele cercurilor lui Carnot ale unui triunghiu oarecare ABC. Se cere să se demonstreze că triunghiurile

ABC şi $O_a O_b O_c$ sunt egale; că ele au aceiaşi dreaptă a lui EULER şi că dreptele AO_a, BO_b, CO_c se întretaie în centrul cercului lui EULER comun acestor două triunghiuri.

MARIN ŞTEFAN.

3346. Fie ABC un triunghiu oarecare, $A_1B_1C_1$ triunghiul său complimentar şi A'B'C' triunghiul ortic. Să se demonstreze că dreptele lui SIMSON ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ se întretaie în centrul cercului lui TAYLOR al triunghiului ABC.

CONST. C. POPOVICI.

3347. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare avem relaţiunea

$$\Sigma \sin^2\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}(B-C) = \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C.$$

EMIL ŞTEFĂNESCU.

3348. Ce lungime de traectorie parcurge un proectil tras în vid, după 10 secunde, ştiind că viteza iniţială este de 500 m/sec., iar unghiul de tragere de 30^0?

CĂPITAN I. LINTEŞ.

3349. Fiind dată curba $y=ax^3$, să se găsiască în planul acestei curbe un punct A, astfel că orice secantă ce trece prin acest punct să taie curba în trei puncte, din care două să fie simetrice în raport cu punctul A (Punctul A ar fi ca un centru al curbei).

Să se găsiască ecuaţia ce dă coeficienţii unghiulari ai tangentelor duse la curba dată prin punctul P (α, β). Să se găsiască punctele P de unde se pot duce la curba dată două tangente izotrope (ale căror coeficienţi unghiulari sunt i şi $-i$) (Punctul P ar fi un focar al curbei).

N. ABRAMESCU.

3350. Să se arate că inegalitatea:

$$ab(2n)^m sh\,\beta n > \pi$$

este posibilă, a, b, n, m, β fiind nişte constante pozitive supuse condiţiunilor:

$$m = \frac{ae^{bn}(e^{bn}-1)}{\log 2}, \quad b > \beta + \frac{m \log 2n}{2n}.$$

V. VÂLCOVICI.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bassarab A. C. (3323); *Bernstein M.* (3285); *Blumen M.* (3301, 31); *Botea G. N.* (N, P); *Brezuica I. I. C.* (3323); *Căldăraru L.* (3326, P); *Călin M. Gh.* (3301); *Caracaș I. Gh.* (3266, 301); *Coșniță V.* (P); *Cristescu I. C.* (3323, R); *Diaconescu T.* (3266, 301); *Foca I.* (3323, E); *Gaiu Gh. Em.* (3327, 36, 39); *Hâncu S. D-șoara* (P); *Hulubei T.* (3218); *Iliuță-Dăbuleni I. I.* (3301, 23, C, P, R); *Ionescu T. A. Bega* (3323); *Ionescu-Bujor Th. Const.* (3301, 36, 37, N); *Kahane A.* (3301, 27, 36, 39, P); *Manolescu I. N.* (3254, 86, 89, 90, 95, 323, 27, 36, 39); *Mihăescu N. S.* (3323); *Mihăilescu St. N.* (3289, 301, 36); *Miu M. I.* (3271, 326); *Nestor D.* (3323, 37); *Nicolescu V. Gh.* (3339); *Novacu Val.* (3222); *Pălărieru E.* (3263); *Popovici C. C.* (3263, 301, 26, 31, P, R); *Popovici I. T.* (P); *Roșu Al. A.* (C, R); *Schächter O.* (3326, 34); *Tauber A.* (3290, 331); *Teodorescu N.* (3326); *Vasiliu C. I.* (3326).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2295, 462, 972, 78, 3122, 40, 60, 67, 74, 78, 92, 227, 28, 33, 40, 42, 48, 59, 62, 69, 79, 82, 83, 87, 90, 98, 99, 302, 03, 11, 12, 17, 21, 22, 24, 30, 31, 32, 33 și 38 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă):*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Onr. Asociațiunea pt. Cultura și Literatura Poporului Român.

Sibiu

ROMANIA

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1925

17 NOV. 925

SUMARUL

1. Formula produsului numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui . *Căpitan I. Linteş.*
2. Regulă pentru desvoltarea unui determinant de ordinul al patrulea . . . *Vladimir I. Tunițchi.*
3. Concursul „Gazetei Matematice".
4. Premiul „Anghel Saligny".
5. Premiul „Vasile Conta".
6. Note Matematice: 9—13.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografii.
9. Cereri: 131.
10. Probleme rezolvate: 2610, 2891, 2978, 3046, 3145, 3286, 3323, 3331.
11. Exerciţii: 13—17.
12. Probleme propuse: 3332, 3351—3360.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1925

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77. 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89. 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 92, 94, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 76, 78, 79, 92, 96, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 25, 29, 30, 33, 35, 40, 41, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXI *SUPLIMENT* No. 3

RECREAŢIUNI

1. **Treimea sfert!!** Un exemplu îl găsim în „*Istoria modernă şi contimporană*“ de M. DUMITRESCU:

„Din întreg pământul Franţei numai *un sfert din trei părţi* se află în stăpânirea sătenilor“.

M. PĂTROIANU.

Alt exemplu ni-l dă poetul ANTON PAN în versurile următoare din NASTRATIN HOGEA:

Cumpărătorul îi zice: — „Dă-mi dar numai pe un sfert“.
„Şi'ncolo a treia parte cu tot sufletul ţi-o iert“.

M. M. CONSTANTINESCU.

* * *

2. **Trei scânteetor!** In biblioteca „*Căminul*“ No. 17—18, pag. 13—14 P. LĂCUSTEANU scrie următoarele:

„Şi sub vraja amintirilor redeşteptate, ochii profesorului se răsuciră de o dată sub sprincenile-i arcuite formând, împreună cu ele, un *scânteietor trei* aşezat sub frunte şi călare pe nas. Nu ştiu de ce, dar dela o vreme, de câte ori văd câte un profesor de matematici care râde sau care se înduioşează,— căci li se întâmplă atât de rar profesorilor de matematici să râză sau mai ales să se înduioşeze! — mi se pare că toate trăsăturile feţei lui sunt alcătuite numai din *treimi* care se înghesuiesc, se ciocnesc, se războesc între ele. Poate că m'am ales cu această viziune ciudată fiindcă în copilărie am avut totdeauna la matematici numai nota *trei* (3)“.

ILIUŢĂ I. ION.

* * *

3. **Socoteală tradusă.** Profesorul: *Wie viel ist ein und zwei?* Elevul: *Ein und zwei* este unul şi doi.

I. FOCA.

* * *

4. **Patrat.—Pătrat.** In Suplimentul No. 3 din anul trecut, D-l G. TULEA dă vina pe matematicieni că „nu explică bine ce este patrat şi pătrat şi lasă să treacă ca cei ce confundă patratele geometrice cu cele aritmetice“. Un profesor de matematici a spus la una din clasele sale că spre a se evită con-

fuziunea, ar fi bine să se zică *pătrat* figurii geometrice şi *patrat* puterei a doua aritmetice.

De altfel Muntenii zic de multe ori în loc de patrat, pătrat.

MARIUS GEORGESCU.

De ce *pătrat* în geometrie şi *patrat* în aritmetică şi nu invers? Pentrucă are un *arc de cerc* în plus?

I. I.

* * *

5. **Geometrie rafinată!** In poezia „Epilog", de DEMOSTENE BOTEZ, găsim:

. . . . . .

Nici alte rafinate geometrii.

GH. GH. VASILIU.

* * *

6. **Algebră decorativă.** Citim în *„Lumea, bazar săptămânal"*, No. 2 pag. 4 în articolul *„Evoluţia teatrului":*

„Presa din Capitală consacră cronici elogioase tânărului revizor, D-l *Soare Z. Soare.* Se remarcă astfel o tendinţă hotărită de a se îmbrăcişà ultimele formule ale *algebrei decorative:* masele anonime, plus spaţiile libere, plus lumina. Calcule precise cu o tabelă de efecte şi derivate".

M. D. DUMITRESCU.

* * *

7. **Un răspuns ca multe.** Profesorul: Când zicem că o ecuaţie este de gradul I?

Elevul: O ecuaţie este de gradul I când nu este de gradul II.

I. FOCA.

* * *

8. **Formulă cinematografică.** In *Cinémagazine*, No. 11, Anul V din 13 Martie 1925 pag. 516, se vorbeşte de filmul *Sourcouf* şi se spune:

„Enfin, pour terminer l'exposé, je vous donnerai la *formule de l'équation* (peu algébrique mais surêment efficace) qui m'a souvent aidé pendant le dur travail de ce film. La voici:

$$TVP2 = R.$$

ce qui se traduit par: *Travail multiplié par volonté,* puissance, patience au carée égalent résultat".

Autorul a demonstrat acì că a uitat şi *pretinsa* algebră pe care a învăţat-o!

M. M. CONSTANTINESCU.

* * *

9. **Formula Bacalaureatului.** Intr'un ziar de seară, Dr. MELUN sub titlul *„Bacalaureatul"* scrie următoarele:

„Pentrucă veni vorba de şansă, îmi amintesc că GH. RICHET, profesor la Sorbona, spunea că trebuie, pentru a reuşi la un examen, trei calităţi: inteligenţă, cunoştinţă şi şansă, fiecare cu un coeficient deosebit; coeficientul inteligenţei s'ar însemnà cu 70, cel al cunoştinţelor cu 15, iar pe al şansei cu 15. Aceşti coeficienţi legaţi prin semnele înmulţirei: $70 \times 15 \times 15$ ar da ca produs: *reuşita*. Se înţelege că în această *formulă matematică*, dacă unul din factori este zero, întreg produsul este zero".

Pare că cu mult spirit RICHET a prins astfel, într'o formulă matematică, calculul reuşitei la Bacalaureat.

P. BLEIWEISS.

Formula este cu totul falşă. *Inteligenţa* nu este decât un factor de reducere al *muncii* pentru pregătire; *cunoştinţele* sunt un rezultat al muncii, afară dacă nu se ia mai sus în sensul de favoritism, protecţionism, nepotism, etc.; iar şansa nu intervine cu nimic când pregătirea este completă.

I. I.

* * *

10. **Formulă uşoară.** In *„Biblioteca pentru toţi"* No. 350, pag. 4. LEONIDA ANDREIEW scrie următoarele:

„Stetea şi el pe platformă în faţa fetei şi din plictiseală se apucă să o cerceteze cu duşmănie, cu neplăcere, cum ar fi privit o *formulă uşoară* şi cunoscută de *algebră* scrisă cu creta pe o tablă neagră şi care îţi sare în ochi fără să vrei".

ILIUŢĂ I. ION.

* * *

11. **Formulă generală.** In studiu *„Trei ovrei"*, de B. P. HASDEU, publicat în 1865, se spune ca încheere că SHYLOCK este o *formulă generală*, aplicabilă către toţi ovrei în particular, precum $a + 1$ este aplicabil către orice *adiţiune* aritmetică".

R. A. KRAAPP.

* * *

12. **Soluţie generală.** In Revista *„Viaţa românească"* No. 11, Anul 1924, pag. 283, se spune:

„O problemă. Cum ar fi fost D-l P. ISTRATI dacă ar fi fost un literat de meserie, adică dacă ar fi făcut parte din *cercurile* literare?... Cu alte cuvinte dacă ar fi intrat în viaţa literară.

Problema pare *insolubilă* şi *odioasă* şi are o soluţie şi încă una *foarte generală*".

V. V. VÂRLAN.

* * *

13. **Infinitul.** In revista „Oradia Mare" V. Poicură, scrie în *„Regele în Bronz"*:

...şi cum răsai călare în bronz învecinicit,
Pe veci de veci urci scara, sus către infinit".

Al. Roşu.

* * *

14. **Matematica la Victor Hugo.** Iată ce găsim în *„Mizerabilii"* :

— *Algebra* se aplică şi norilor.

— Cine poate *calculà* oare drumul unei molecule?

— Cine cunoaşte *fluxul* şi *refluxul* reciproc al *marelui* şi *micului infinit.*

— Sunt cugetări care se pot numi *verticale.*

I. Vasiliu.

— *Hugomont* văzut pe o hartă în *plan geometral* coprinzând clădirile şi împrejurimile, ţi se prezintă cu un fel de *dreptunghiu neregulat (!)* şi din care un *unghiu* ar fi tăiat".

— Împărţirea Poloniei este o *teoremă* ale cărei fără de legi politice actuale sunt corolarele".

— *Bonaparte* pune un vizitiu pe tronul Neapolului şi un sergent pe tronul Suediei, întrebuinţând *neegalitatea* ca să arate *egalitatea.*

G. Tulea.

* * *

15. **Pedagogie einştainiană.** Nu zgâlţâiţi de după ceafă, în chip de du-te vino, pe copiii nepricepuţi sau pe cei care cad în greşeală, căci prin atare „mişcare" întârziaţi opera educativă: timpul lor „relativ" încetineşte.

Gh. Zapan.

* * *

16. **Resturi persane.** Un rest nu se mai măreşte dacă nu i se mai adaogă nimic la el. Totuşi vechi Persani au găsit trei excepţii la această axiomă matematică şi anume: 1) Un rest de boală. 2) Un rest de datorie. 3) Un rest de foc.

I. Miu.

FORMULA PRODUSULUI NUMERELOR PRIME CU UN NUMĂR DAT ŞI INFERIOARE LUI.

Se ştie că numărul numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui se mai numeşte şi *indicator.* EULER a găsit că formula indicatorului este:

$$1) \qquad \varphi(N) = N(1 - 1/a)\ (1 - 1/b)\ (1 - 1/c)..... = N - \sum \frac{N}{a} + \sum \frac{N}{ab} - \sum \frac{N}{abc} + ...,$$

unde *a, b, c,* sunt factorii primi ai lui N.

Mai târziu s'a găsit şi *formula sumei numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui,* adică:

$$2) \qquad \sigma(N) = N.\frac{\varphi(N)}{2}.$$

Nu am găsit însă în nici un tratat de «Teorie a Numerelor» (LUCAS, BACHMANN, FITZ-PATRIC, TANNERY, BERTRAND şi CESARO) ce am consultat, *formula produsului numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui.* Imi propun dar ca în rândurile ce urmează să stabilesc această formulă, pe care o voiu notà cu $\pi(N)$.

1. Fie $N = a^{\alpha}$, atunci numerele neprime cu N şi mai mici decât el sunt multipli de *a,* prin urmare vor fi:

$$a,\ 2a,\ 3a,.....(N/a)\,a.$$

Apoi, produsul N! este compus din numere prime cu N şi inferioare lui şi din numere neprime, deci dacă eliminăm numerele neprime, ne vor rămâne numerele prime. Insă produsul numerelor neprime este:

$$(N/a)!\ a^{\frac{N}{a}}.$$

Deci:

$$\pi(N) = \frac{N!}{(N/a)!\ a^{\frac{N}{a}}}.$$

Observăm apoi că în acest caz:

$$\varphi(N) = N - N/a.$$

Insă în formula produsului avem pe N! la numărător şi pe

$(N/a)!$ la numitor, adică semnul sumei din formula indicatorului, ne arată numărătorul (+) sau numitorul (—).

Mai clar, putem chiar scrie că:

$$\varphi(N) = N/1 - N/a,$$

şi în acest caz formula produsului devine:

$$\pi(N) = \frac{(N/1)!\ 1^{\overline{1}}}{(N/a)!\ a^{\overline{a}}},$$

iată dar legătura simetrică dintre $\varphi(N)$ şi $\pi(N)$.

2) Fie $N = a^{\alpha} . b^{\beta}$, atunci numerele neprime cu N şi inferioare lui, sunt $\mathcal{M}a$ sau $\mathcal{M}b$, adică:

$$a,\ 2a,\ 3a,\ldots\ldots\ (N/a)\,a,$$

$$b,\ 2b,\ 3b,\ldots\ldots\ (N/b)\,b.$$

Dar in aceste două şiruri există numere egale, multiple în acelaş timp şi de a şi de b, deci $\mathcal{M}ab$, deci ele fiind în ambele şiruri, le vom scoate din unul, adică vom elimină şirul de numere:

$$ab,\ 2ab,\ 3ab,\ldots\ldots(N/ab)\ ab.$$

Atunci, urmând ca la (1) avem:

$$\pi(N) = \frac{N!\ (N/ab)!\ (ab)^{\overline{ab}}}{(N/a)!\ (N/b)!\ a^{\overline{a}} . b^{\overline{b}}}.$$

Dar observăm că:

$$\varphi(N) = N/1 - N/a - N/b + N/ab;$$

însă:

$$\pi(N) = \frac{(N/1)!\ (N/ab)!\ 1^{\overline{1}} . (ab)^{\overline{ab}}}{(N/a)!\ (N/b)\ a^{\overline{a}} . b^{\overline{b}}}.$$

Deci simetria se menţine.

Insă mai putem scrie:

$$\pi(N) = \frac{N!\ (N/ab)!}{(N/a)!\ (N/b)!\ a^{\overline{a}\left(1-\frac{1}{b}\right)}\ b^{\overline{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)}}.$$

Ori:

$N/a\ (1-1/a)=\varphi(N)/a-1$ şi $N/b\ (1-1/a)=\varphi(N)/b-1$.

Deci:

$$\pi(N)=\frac{N!\ (N/ab)!}{(N/a)!\ (N/b)!\ a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}}.\ b^{\frac{\varphi(N)}{b-1}}}.$$

Această observaţie se menţine şi în cazul (1).

3) Fie $N=a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$, atunci numerele neprime cu N şi inferioare lui sunt:

$$a,\ 2a,\ 3a,\ldots\ldots\ (N/a)\ a$$

$$b,\ 2b,\ 3b,\ldots\ldots\ (N/b)\ b$$

$$c,\ 2c,\ 3c,\ldots\ldots\ (N/c)\ c.$$

Dar şi aici vom aveà multipli comuni între: $(a,\ b)$, $(a,\ c)$ şi $(b,\ c)$, şi deci vom elimină câte un rând, adică vom elimină şirurile:

$$ab,\ 2ab,\ 3ab,\ldots\ldots\ (N/ab)\ ab$$

$$ac,\ 2ac,\ 3ac,\ldots\ldots\ (N/ac)\ ac$$

$$bc,\ 2bc,\ 3bc,\ldots\ldots\ (N/bc)\ bc.$$

Insă vor mai există încă numere neprime, multiple deodată de $a,\ b$ şi c, care vor fi:

$$abc,\ 2abc,\ 3abc,\ldots\ldots\ (N/abc)\ abc.$$

Cu aceasta putem scrie:

$$\pi(N)=\frac{N!\ (N/ab)!\ (N/ac)!\ (N/bc)!\ (ab)^{\frac{N}{ab}}\ (ac)^{\frac{N}{ac}}\ (bc)^{\frac{N}{bc}}}{(N/a)!\ (N/b)!\ (N/c)!\ (N/abc)!\ a^{\frac{N}{a}}.\ b^{\frac{N}{b}}.\ c^{\frac{N}{c}}\ (abc)^{\frac{N}{abc}}}.$$

Cum:

$$\varphi(N)=N/1-N/a-N/b-N/c+N/ab+N/ac+N/bc-N/abc,$$

urmează deci că simetria se menţine.

Mai putem chiar scrie încă:

$$\pi(N)=\frac{N!\ (N/ab)!\ (N/ac)!\ (N/bc)!}{(N/a)!\ (N/b)!\ (N/c)!\ (N/abc)!\ a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}}.\ b^{\frac{\varphi(N)}{b-1}}.\ c^{\frac{\varphi(N)}{c-1}}}.$$

Cercetând tot aşà mai departe, şi observând că în general:

$$\varphi(N)=N-\sum\frac{N}{a}+\sum\frac{N}{ab}-\sum\frac{N}{abc}+\ldots\ldots,$$

atunci putem scrie în general că:

$$3) \qquad \pi(N) = \frac{N!\,\pi(N/ab)!\,\pi(N/abcd)!\ldots\ldots}{\pi(N/a)!\,\pi(N/abc)!\ldots\ldots\,\pi a^{\alpha-1}\ldots\ldots^{\varphi(N)}},$$

unde în expresiune:

$$\pi(i)! = (i_1)!\,(i_2)!\ldots\ldots$$

Exemple. Fie $N = 2^2.3.5 = 60$

$$\varphi(N) = 16.$$

Atunci:

$$\pi(N) = \frac{60!\,10!\,6!\,4!}{30!\,20!\,12!\,2!\,2^{16}.3^8.5^4}$$

$$= 1.7.11.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.49.53.59.$$

Aplicaţiuni ale formulei 3).

Se ştie din FITZ-PATRIC că:

$$[\pi(N)]^2 - 1 = \mathcal{M}N$$

şi făcând $N = a^\alpha$, găsim:

$$\left(\frac{a^\alpha!}{a^{\alpha-1}!\;a^{a^{\alpha-1}}}\right)^2 - 1 = \mathcal{M}a^\alpha.$$

Făcând $\alpha = 1$, avem:

$$[(a-1)!]^2 - 1 = \mathcal{M}a;$$

însă cum a e prim şi după teorema lui WILSON:

$$(a-1)! + 1 = \mathcal{M}a;$$

înseamnă că am verificat-o.

Deasemenea făcând $N = a.b.c$, putem zice că expresiunea:

$$\frac{(abc)!\;\;a!\;b!\;c!}{(ab)!\,(ac)!\,(bc)!\;a^{(b-1)(c-1)}.b^{(a-1)(c-1)}.c^{(a-1)(b-1)}}$$

este întreagă, sau că numărătorul este divizibil cu numitorul.

Mai putem face succesiv: $N = a.b$ şi $N = a.b.c$ şi avem:

$$\pi(abc).\pi(ab) = \frac{(abc)!\;c!}{ac!\,(bc)!\;a^{c(b-1)}.b^{c(a-1)}.c^{(a-1)(b-1)}}$$

care expresiune este întreagă.

Iată dar că formula 3) constitue un bun generator pentru o clasă de probleme în domeniul divizibilităţei şi al factorialelor.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

REGULĂ PENTRU DESVOLTAREA UNUI DETERMINANT DE ORDINUL AL PATRULEA.

In cele ce urmează, voiu expune o regulă practică pentru dezvoltarea unui determinant de ordinul al patrulea, după cum pentru un determinant de ordinul al treilea este regula lui SARRUS.

Să considerăm un determinant de ordinul al patrulea

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

pe care să-l dezvoltăm după elementele liniei întâi. Avem

$$\begin{aligned} D = a_1 & \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\ + c_1 & \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dezvoltând fiecare din determinanții de ordinul al treilea, avem

$$\begin{aligned} D = + & \begin{vmatrix} (1) \\ a_1b_2c_3d_4 \\ a_1b_3c_4d_2 \\ a_1b_4c_2d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (2) \\ a_1b_4c_3d_2 \\ a_1b_2c_4d_3 \\ a_1b_3c_2d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (3) \\ b_1a_2c_3d_4 \\ b_1a_3c_4d_2 \\ b_1a_4c_2d_3 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} (4) \\ b_1a_4c_3d_2 \\ b_1a_2c_4d_3 \\ b_1a_3c_2d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (5) \\ c_1a_2b_3d_4 \\ c_1a_3b_4d_2 \\ c_1a_4b_2d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (6) \\ c_1d_4b_3d_2 \\ c_1a_2b_4d_3 \\ c_1a_3b_2d_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$- \begin{vmatrix} d_1a_2b_3c_4 \\ d_1a_3b_4c_2 \\ d_1a_4b_2c_3 \end{vmatrix}_{(7)} + \begin{vmatrix} d_1a_4b_3c_2 \\ d_1a_2b_4c_3 \\ d_1a_3b_2c_4 \end{vmatrix}_{(8)} .$$

Termenul $a_1b_2c_3d_4$, din grupul (1), se obține direct din determinantul dat, ducând diagonala ce trece prin a_1.

$$\begin{vmatrix} (a_1) & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & (b_2) & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & (c_3) & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & (d_4) \end{vmatrix} .$$

Termenul $a_1b_3c_4d_2$, din grupul (1), se obține scriind sub determinantul dat linia a doua a sa și considerând diagonala ce trece prin primul element al liniei a doua,

(9)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ (a_2) & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & (b_3) & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & (c_4) & d_4 \\ a_2 & b_2 & c_2 & (d_2) \end{vmatrix} ,$$

care a dat produsul $a_2b_3c_4d_2$, în care înlocuind pe a_2 cu a_1, avem $a_1b_3c_4d_2$. Pentru obținerea termenului $a_1b_4c_2d_3$, din grupul (1), se adaugă linia a treia sub expresia (9),

(10)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ (a_3) & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & (b_4) & c_4 & d_4 \\ a_2 & b_2 & (c_2) & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & (d_3) \end{vmatrix} ,$$

se consideră diagonala corespunzătoare primului element a_3 din linia a treia, $a_3b_4c_2d_3$, şi se înlocueşte a_3 cu a_1.

Pentru termenii din grupul (3), scriem la dreapta tabloului (10) coloana întâi şi încă primele ei două elemente,

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & (b_1) & c_1 & d_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & a_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & a_4 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & a_3 \end{array}$$

şi ducem apoi diagonalele indicate; înlocuim elementele b_2 şi b_3 cu b_1 şi avem tocmai termenii din grupul (3), luând înaintea lor semnul—.

Urmând procedeul de mai sus, să considerăm tabloul

$$\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & - & + & - & + \\ (a_1) & (b_1) & (c_1) & (d_1) & [a_1] & [b_1] & [c_1] & [d_1] \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$$

format scriind lângă determinantul dat acelaş determinant, iar dedesubtul acestora, liniile a doua şi a treia a determinantului.

Prin elementele a_1, a_2, a_3 ducem diagonala spre dreapta, prin câte patru elemente, şi înlocuim pe a_2 şi a_3 prin a_1, iar termenii corespunzători $a_1b_2c_3d_4$, $a_1b_3c_4d_2$, $a_1b_4c_2d_3$, îi luăm cu semnul + şi avem grupul (1); prin elementele b_1, b_2, b_3 ducem diagonale spre dreapta, prin câte patru elemente, înlocuim b_2 şi b_3 cu b_1, obţinem termenii $-b_1c_2d_3a_4$, $-b_1c_3d_4a_2$, $-b_1c_4d_2a_3$. pe care i-am luat cu semnul — şi avem grupul (3); prin c_1, c_2, c_3 ducem diagonale spre dreapta,

prin patru elemente, înlocuim pe c_2 şi c_3 cu c_1, luăm termenii cu semnul + şi avem $c_1d_2a_3b_4$, $c_1d_3a_4b_2$, $c_1d_4a_2b_3$, grupul (5); prin d_1, d_2, d_3 ducem diagonale spre dreapta, prin patru elemente, luăm termenii cu semnul — şi avem $-d_1a_2b_3c_4$, $-d_1a_3b_4c_2$, $-d_1a_4b_2c_3$, grupul (7); prin elementele a_1, a_2, a_3, din coloana a cincea, ducem diagonale spre stânga, prin patru elemente, înlocuim pe a_2 şi a_3 cu a_1, luăm termenii cu semnul — şi avem termenii $-a_1d_2c_3b_4$, $-a_1d_3c_4b_2$, $-a_1d_4c_2b_3$ ai grupului (2); prin elementele b_1, b_2, b_3 din coloana a şasea a tabloului, ducem diagonale spre stânga, prin patru elemente, înlocuim b_2 şi b_3 cu b_1, luăm semnul + şi avem termenii $b_1a_2d_3c_4$, $b_1a_3d_4c_2$, $b_1a_4d_2c_3$ ai grupului (4); prin elementele c_1, c_2, c_3 din coloana şaptea a tabloului ducem diagonale, spre stânga, prin patru elemente, înlocuim c_2 şi c_3 cu c_1, luăm semnul — şi avem termenii $-c_1b_2a_3d_4$, $-c_1b_3a_4d_2$, $-c_1b_4a_2d_3$ ai grupului (6); în fine, prin elementele d_1, d_2, d_3 din coloana opta, ducem diagonale, spre stânga, prin patru elemente, înlocuim d_2 şi d_3 prin d_1, luăm semnul + şi avem termenii $d_1c_2b_3a_4$, $d_1c_3b_4a_2$, $d_1c_4b_2a_3$ ai grupului (8).

Prin felul acesta, am obţinut toţi termenii determinantului dat de ordinul al patrulea, cu o regulă analoagă cu aceea a lui SARRUS pentru determinantul de ordinul al treilea.

VLADIMIR I. TUNIŢCHI.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE".

In vacanţa Paştelui viitor, şi anume în zilele de 8, 9 şi 10 Aprilie 1926, va avea loc un concurs general de matematici în Bucureşti, între corespondenţii *„Gazetei Matematice"*, elevi ai claselor V, VI, VII şi VIII ale liceelor din ţară.

Cererile de înscriere se vor trimite *direct de către candidaţi*, iar nu de profesori, părinţi, corespondenţi sau intermediari, D-lui ION IONESCU, Inginer, Strada Căluşei 23, în plicuri recomandate sau înmânate direct D-sale. Cererile se primesc *numai* până la 1 Fevruarie 1926 şi vor arătă:

1. Numele şi pronumele elevului, scrise lizibil.
2. Liceul şi clasa în care urmează candidatul. Pentru cei ce

se pregătesc în particular, şcolile la care au urmat anul precedent, sau au dat examenul de fine de an.

3. Adresa în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei Paştelui.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului, sau dacă unele din aceste mijloace vor trebui să-i fie procurate de Societatea „*Gazeta Matematică*".

5. Materia de matematici, din clasa în care urmează, la care voeşte să treacă proba practică în scris şi alta la care voeşte să dea proba teoretică în scris, probele orale trecându-se la amândouă din ele.

La prima probă, se vor cere calcule numerice şi logaritmice, construcţiuni grafice şi epure şi, prin urmare, elevii vor aduce cu dânşii tabele, compasuri, instrumente de desemn şi vor puteà consultà cărţi, pe când la proba teoretică vor aveà numai tocurile de scris.

Numărul celor admişi la concurs va depinde de mijloacele de transport, de găzduire şi de întreţinere, de care vom puteà dispune; alegerea se va face dintre corespondenţii cari au dovedit o activitate şi o pricepere mai mare de matematici, prin lucrările ce ne-au trimes, căutând a lua elevi din toate clasele şi din toate liceele din ţară. Candidaţii înscrişi, admişi la concurs, vor primì o înştiinţare în care li se va arătà locul unde se va ţine concursul, programul lui, precum şi locul unde vor fi găzduiţi şi vor lua masa cei lipsiţi de mijloace, iar în vacanţa Paştelui, vor primì biletele de drum.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile pentru înscriere şi ţinerea concursului trebuesc respectate cu toată atenţiunea şi exactitatea inerentă ştiinţelor matematice. Sunt cu totul interzise comunicările între candidaţi la probele scrise şi examenele orale, părăsirea sălilor în care se dau probele practice şi teoretice, înainte de predarea lucrărilor.

Comisiunea examinatoare se compune din membri ai Societăţei „*Gazeta Matematică*", ce nu au rude printre candidaţii admişi la concurs.

In seara zilei de 10 Aprilie, va aveà loc o masă comună a membrilor Societăţii, cu candidaţii admişi la concurs.

Rezultatul concursului se va publicà în No. 10 Anul XXXI al

„*Gazetei Matematice*", iar candidaţii cari vor reuşi, vor primì ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni.

Delegaţia Societăţii:
Gh. Em. Filipescu, C. Malcoci
şi G. Borneanu.

PREMIUL „ANGHEL SALIGNY".

Unul dintre membrii Societăţii „Gazeta Matematică", înfiinţează un premiu de 1000 lei, purtând numele de premiul «Anghel Saligny», care să se deà primului reuşit la un concurs de Matematici Superioare, ţinut între elevii Anului I al Şcoalei Politechnice din Bucureşti, odată cu Concursul general din zilele de 8, 9 şi 10 aprilie 1926.

Materiile din care se va ţine concursul sunt: Analiza şi Geometria Analitică.

Condiţiunile concursului sunt aceleaşi ca şi cele din Articolul precedent.

Delegaţia Societăţii.

PREMIUL „VASILE CONTA".

La pagina 14 a volumului XXIX al «Gazetei Matematice», s'a publicat regulamentul premiului «Vasile Conta». In conformitate cu prevederile acestui regulament, urmà să se publice, în numărul de faţă, rezultatul premiului pentru anul trecut.

Deoarece nu s'a primit însă nicio lucrare pânăla data de 1 iulie 1925, se aşteaptă, după prevederile aceluiaş regulament, pânăla 1 iulie viitor, depunerea lucrărilor ce vor concurà la premiul, cumulat pentru doi ani.

Lucrările se vor trimite pe adresa D-lui Inginer Inspector General I. Ionescu, str. Căluşei, 23. Bucureşti.

Delegaţia Societăţii.

NOTE MATEMATICE

9. *Alte zece Matematici diverse.* (Vezi Nota 9, pag. 93 Anul XXX).

31. **Algebrică.** A se vedeà *P. Boutroux*, L'idéal scientifique des mathématiciens. Paris 1920. Pag. 282.
32. **Amfibie.** Idem, pag. 76.
33. **Anteeuclidiană.** *G. Zeuthen.* Histoire des mathématiques Pag. 11.
34. **Contimporană.** Ca la No. 31, pag. 189.
35. **Elenică.** Idem, pag. 147.
36. **Ideală.** Idem, pag. 183.
37. **Preistorică.** Ca la No. 33, pag. 1.
38. **Preştiinţifică.** Idem, pag. 6.
39. **Sintetică.** Ca la No. 31, pag. 219.
40. **Umană.** Idem, pag. 218.

(Va urmà). I. Ionescu.

10. *Asupra notei 24, Anul XXVII.* Generalizarea dată problemei 2621 în acea notă suferă, pe lângă neajunsurile semnalate în nota 69, Anul XXVIII şi de faptul că deşi din:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

se poate scoate

$$\sum_0^{n-1} 10^i\, a_{i+1} \Big/ \sum_0^{n-1} 10^i\, b_{i+1} = \sum_0^{n-1} a_{i+1} \Big/ \sum_0^{n-1} b_{i+1}\,,$$

reciproca nu este adevărată.

O. Popea.

11. *Generalizarea problemei 2964.* Ne propunem a găsì numerele de $2n$ cifre, cu ultimele n cifre identice, care să fie îndoitul patratului unui *număr impar.* Avem:

$$a_1a_2\ldots a_n\overbrace{bbb\ldots b}^{n}=2a^2.$$

Din grupele de 2 cifre, care pot terminà un patrat perfect,

alegem pe acele care înmulțite cu 2 dau două cifre identice. Vom găsi:

$$44,\ 61$$

$$\therefore \quad b = 8,\ 2;$$

iar $a^2 = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p\, 44, \quad a^2 = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p\, 61.$

Dar a^2 fiind impar, ne rămâne numai:

$$a^2 = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p\, 61.$$

Când $n > 2$ ar trebui ca $2\alpha_p + 1$ să se termine cu 2, ceeace e imposibil; când $n \leqslant 2$ soluțiile sunt cunoscute.

Observare. Am dat această generalizare mai mult cu scopul de a lămuri chestiunea generalizării probl. 2964, tratată în G. M. XXX, pag. 329, întrucât demonstrația dată la locul citat, este eronată.

O. Popea.

12. *Asupra problemei 3094.* S'a arătat că triunghiurile dreptunghice cu laturile în progresie aritmetică sunt asemenea.

Același lucru și dacă unghiurile sunt în progresie aritmetică, căci se deduce ușor că unghiurile sunt de 30^0, 60^0, 90^0;

M. A. Dumitrescu.

13. *Raza cercului circumscris în funcție de laturi.* Se știe că expresia razei R a cercului circumscris e:

$$R = abc/4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

și se deduce din:

$$R = abc/4S.$$

In cele ce urmează, voiu indică o cale geometrică elementară pentru găsirea lui R în funcție de laturi.

Fie ABC un triunghiu și O, A_1, B_1, C_1, centrul cercului circumscris și mijloacele laturilor. Patrulaterul OA_1CB_1 e inscriptibil, deci:

$$OC \cdot A_1B_1 = CA_1 \cdot OB_1 + CB_1 \cdot OA_1.$$

Dar:

$$OC = R \ , \ A_1B_1 = c/2 \ , \ CA_1 = a/2 \ , \ CB_1 = b/2,$$

$$OB_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - b^2} \ , \ OA_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Deci:

$$2Rc = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Ridicând odată la patrat, izolând radicalul şi mai ridicând odată, găsim:

$$4R^2(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4) = 4a^2b^2c^2.R^2,$$

sau:

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

$$R = abc/4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad \text{Q. E. D.}$$

CONST. C. POPOVICI.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN BUCUREŞTI.

MECANICĂ RAŢIONALĂ (iunie 1925).

Anul I (Secţia Construcţii).

1. Un tren având o greutate de 120 tone, pleacă din repaus, iar în timp de 2 minute iuţeala sa a crescut în mod uniform dela 0 la 60 km. pe oră. Să se găsiască forţa ce trebue să dezvolte locomotiva, pentruca trenul să capete acceleraţia corespunzătoare datelor de mai sus şi să se învingă şi rezistenţele pasive, care sunt de 0,005 din greutatea trenului.

Se va determină apoi care este forţa ce trebue să o dezvolte locomotiva pe o rampă de 1 %.

2. O bară omogenă AB de greutate P şi lungime $2l$, are unul din capetele sale silit să rămână pe verticala Oy şi este trecută printr'o mică scobitură D, situată pe orizontala Ox, la distanţa a de O. Să se găsiască poziţia de echilibru şi reacţiunile din A şi D, neţinând seamă de frecări; se va luà ca necunoscută unghiul $\theta = OAD$.

3. O dreaptă Ox are o mişcare de rotaţie uniformă, de iuţeală unghiulară ω, în jurul unei verticale $y'Oy$, pe care o întâlneşte în O sub un unghiu α. Să se găsiască poziţia de echilibru relativ a punctului material M de greutate P, care se poate mişcà pe Ox: 1) neţinând seamă de frecări; 2) ţinând seamă de frecarea lui M pe Ox, coeficientul de frecare fiind f.

Anul I (Secţia Electromecanică).

1. Un inel cilindric de fer are diametrul interior de 1 m., cel exterior de 1,10 m., lăţimea lui fiind de 0,20 m. Să se calculeze momentul de inerţie al inelului în raport cu axa lui O, în unităţi tecnice, C. G. S. şi M. T. S. Inelul învârtindu-se în jurul axei lui şi făcând 800 rot/min, să se calculeze energia lui cinetică, în aceleaşi sisteme de unităţi. Densitatea ferului 7, 8.

2. Pe o axă O sunt fixaţi doi scripeţi OA şi OB, de raze R_1 şi R_2. Scripetele OB este prevăzut cu dinţi în care se îmbucă, ca într'o piuliţă (mutelcă), un şurub tăiat pe cilindru MN de rază r, unghiul tăeturii şurubului fiind α; la una din extremităţile şurubului e o roată CD de rază R. Pe scriptele OA e înfăşurat un fir la extremitatea căruia e atârnată o greutate Q, ce este echilibrată printr'o forţă P, aplicată tangenţial roţii CD. Să se găsească — pentru starea de echilibru — relaţia între P şi Q, mai întâi neglijând frecările şi apoi ţinând seama de frecările dintre şurub şi dinţii roţii OB, unghiul de frecare fiind φ.

3. Să se găsiască eforturile pe ctm². de secţiune, datorită forţelor de inerţie, într'un volant care face N rot./min; razele exterioare şi interioare ale volantului sunt R, r; secţiunea un dreptunghiu de laturi $R - r$ şi d (d lăţimea); volantul de fer (densitate 7, 8).

Se vor considera secţiunile obţinute tăind volantul prin planul diametral X'OX.

Masele spiţelor se neglijează.

A se indică, cum se modifică (şi din ce cauză) eforturile, dacă în loc ca volantul să se rotiască uniform, iuţeala sa ar creşte în mod uniform în T sec. dela N la $\frac{5}{4}$ N rot./min ?

Anul I (Secţia Mine).

1. Pe o roată O de rază r, este trecut un fir flexibil ABCDE, de extremităţile firului — care atârnă vertical — este legată o bară MN, al cărei centru de greutate este în G la distanţa x de verticala lui O. Să se găsiască între ce limite poate varia x, ca bara să rămână în echilibru, ţinând seama de frecarea dintre fir şi roată, coeficientul de frecare fiind f.

2. Pentru a transporta minereul dela o mină situată în A, se recurge la un cablu aerian ABCDEF..., pe care se rostogoleşte un scripet O, ce poartă vagonetul cu minereu. Cunoscând înălţimea i a punctului A deasupra planului orizontal X'X, să se determine înălţimile i', i'',... ale punctelor C, E,... deasupra aceluiaşi plan X'X. Se admite că în timpul mişcării scripetului pe cablu trebue învinsă o rezistenţă verticală proporţională cu greutatea vagonetului ($R = f.P$). (Se va aplica teorema energiei cinetice).

3. Un regulator este format din 4 bare egale $OA = AB = BC = CO = a$, de mase neglijabile, articulate între dânsele; O e fix, B se poate mişcă pe verticala lui O; în A şi C avem 2 greutăţi egale cu P, în B o greutate Q;

aparatul având o rotaţie uniformă ω, în jurul verticalei OBx, se cere: 1) poziţia de echilibru relativ ($\sphericalangle \alpha$) şi 2) tensiunile în bare.

Se neglijează frecările.

Anul I (Secţia Industrială).

1. Un corp cilindric de diametru 0,06 m. cuprinde un gaz a cărei presiune este echilibrată cu greutatea unui piston, cântărind 50 kgr. Să se exprime presiunea gazului pe unitatea de suprafaţă: *a)* în sistemul technic; *b)* în sistemul C. G. S; *c)* în sistemul M. T. S; *d)* în atmosfere.

2. Un punct greu *m* este silit să rămână pe o dreaptă orizontală *ox*; el este atras de un punct A situat pe verticala *oy* proporţional cu distanţa. Unde trebuie să se găsiască punctul M, ca el să rămână în echilibru, ţinând seama de frecarea dintre punct şi dreapta *ox*? Coeficientul de frecare este *f*.

3. Un volant porneşte în mod uniform accelerat dela iuţeala V până-ce ajunge în timpul Γ sec. să facă N rotaţiuni pe minut iuţeală de regim. Să se găsiască rezultanta forţelor de inerţie corespunzătoare unei spiţe OA (greutatea spiţei fiind G), asimilând spiţa cu o bară omogenă: 1) la momentul $\frac{1}{2}\Gamma$ şi 2) în stare de regim.

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ (iunie 1925).

Anul I (Secţia Construcţii).

Cadrul obicinuit (250/400). Linia pământului paralelă cu laturile mici, la 160 deasupra marginei inferioare a cadrului.

Se dă:

1. *O sferă*, de centru *oo'* (depărtare = cota = 8), de rază 70. Axa verticală a sferei este la mijlocul lărgimei cadrului.

2. *Un con* născut de dreapta *ab, a'b'*, care se roteşte în jurul unei axe *cd, c'd'*, aceste două drepte aflându-se în planul frontal dus prin centrul sferei. Datele pentru aşezarea acestor 2 drepte sunt: $oa = 48$; $ob = 24$; $o'c' = 36$ (pe axa verticală a sferei); $c'd' = 24$ (pe ecuatorul sferei).

Se cere:

Să se afle curba intersecţie a acestor două solide (puncte curente, puncte remarcabile, linia punctelor duble în proecţie, tangenta într'un punct).

Se va reprezentă Sfera, scoţându-se partea coprinsă în Con.

N. B. Punctul *cc'* de intersecţie al axei conului cu diametrul vertical al sferei, este indicat ca centru al sferelor secante auxillare.

Datele în negru, curba în albastru, construcţiile în carmin; părţile scoase ale sferei, precum şi partea exterioară a conului în negru mixt—.—.—

Se va anexă negreşit *o legendă*, explicând concis construcţiile adoptate şi mersul operaţiunilor.

Anul I (Secţiile Electromecanică şi Mine).

Cadrul obicinuit (250/400), Linia pământului paralelă cu laturile mici şi la 160 deasupra marginei inferioare a cadrului.

Se dă:

1) *Un Cilindru* cu baze paralele: baza inferioară este un cerc în planul orizontal de proecţie, cu centrul în *o* (depărtare 50, distanţa dela marginea stângă a cadrului 40); raza acestui cerc este de 40. Baza superioară este la 170 deasupra planului orizontal de proecţie. Generatoarele sunt nişte frontale, înclinate la 45° pe planul orizontal de proecţie.

2) *O Sferă,* de rază 70. Centrul ei ωω', situat pe generatoarea *ab, a'b'* a cilindrului cea mai apropiată de planul vertical de proecţie, este la distanţa 96 de punctul *aa'*.

Se cere:

Să se afle intersecţia acestor două solide (puncte curente, tangente într'un punct, punctele remarcabile precum: punctele pe conturele aparente, linia punctelor duble în proecţie orizontală, aceste puncte duble chiar, etc.).

Se va reprezenta Cilindrul cu gaura produsă de sferă. Datele în negru; liniile de construcţii în carmin; curba intersecţie în albastru; partea exterioară a sferei, precum şi partea scoasă din cilindru în negru mixt—.—.—

Se va anexă negreşit *o legendă* explicând construcţiile adoptate şi mersul operaţiunilor.

UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

FACULTATEA DE ŞTIINŢE.

Seziunea iunie, 1925.

MATEMATICI GENERALE.

Proba teoretică.

1°. Să se studieze variaţiunea funcţiunii

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1},$$

determinând totodată ecuaţiunile asimptotei oblice şi tangentei de inflexiune, precum şi punctul de intersecţie al acestor drepte. Cantităţile neraţionale se vor păstră în ecuaţiuni sub formă de radicali, iar în tabloul de variaţiuni, se vor trece cu două zecimale.

2°. Să se integreze ecuaţiunea diferenţială:

$$xy' - y - 3x^7 + 5x = 0.$$

(20 iunie, ora 8 dim.).

Proba practică.

Să se calculeze integrala definită:

$$I = \int_2^3 \frac{4t^5 - t^2 - 1}{t^4 - 1}\, dt.$$

(20 iunie, ora 3 p. m.).

ALGEBRA SUPERIOARĂ.

Proba teoretică.

1°. Să se studieze şi să se afle natura seriei:

$$\frac{1}{1(1+r)(1+2r)} + \frac{1}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} + \frac{1}{(1+2r)(1+3r)(1+4r)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{[1+(n-1)r][1+nr][1+(n+1)r]}.$$

2°. Să se discute ecuaţia:

$$x^4 + px^3 + q = 0.$$

3°. Să se rezolve şi să se discute sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + az = a \\ 3x + ay + bz = b, \end{cases}$$

a şi b fiind coordonatele unui punct din plan.

(10 iunie, ora 8 dimineaţa).

Proba practică.

Să se discute ecuaţia

$$x^3 + 4x - 1 = 0$$

şi să se găsiască rădăcinile reale cu două zecimale.

(10 iunie, ora 3 p. m.).

GEOMETRIA ANALITICĂ.

Proba teoretică.

1°. Să se scrie ecuaţia generală a conicelor care trec prin punctele A (1, 0), B(—2,0), C(0,—1), P(0, p).

2°. Să se arate că locul geometric al centrelor acestor conice este o conică (Γ), care trece prin patru puncte ale căror coordonate se cer.

3°. Să se studieze natura conicelor (Γ) după diferitele poziţii ale punctului P pe Oy.

4°. Să se determine conica (Γ) astfel ca să fie o iperbolă (I), cu o direcţie asimptotică paralelă cu dreapta $y = \frac{\sqrt{3}}{2} x$. Să se găsiască în acest caz asimptotele iperbolei (I), ecuaţia axelor, coordonatele focarelor, precum şi ecuaţia redusă a acestei curbe.

(29 iunie, ora 8 dimineaţa).

Proba practică.

Să se construiască curba

$$x^3 + x^2y + x - y = 0.$$

(29 iunie, ora 3 p. m.).

Aplicaţiile geometrice ale calculului diferenţial şi integral.

Proba teoretică.

I. Pe un cilindru (C) cu directoarea $x = f(t)$, $y = g(t)$, este trasată o curbă (Γ), reprezentată de ecuaţiile:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = \varphi(t).$$

Se cere să se determine funcţiunea $\varphi(t)$, aşa încât M fiind un punct al curbei (Γ), şi T punctul de intersecţie al tangentei în M la curba (Γ), cu planul $x0y$, proiecţia segmentului MT să fie constantă şi egală cu a.

II. Se dă suprafaţa (S) $z = x^2 + y^2$.

Se cere: 1°) Să ce determine proiecţia intersecţiei suprafeţei prin planul tangent în punctul M (x, y, z).

2°. Să se determine proiecţia pe planul $z0y$ a liniilor asimptotice.

3°. Se vor găsi apoi traiectoriile ortogonale ale proiecţiilor liniilor asimptotice.

(13 iunie, ora 8 dim.).

Proba practică.

Fiind dată curba

$$y = \frac{x^3}{6}, \quad z = \frac{1}{x}, \quad \text{să se calculeze:}$$

1°. Cosinusurile directoare ale tangentei în punctul M(x, y, z) al curbei.

2°. Planul osculator.

3°. Raza de curbură în acel punct.

(13 iunie, ora 3 p. m.).

ANALIZA MATEMATICA.

Partea I.

Proba teoretică.

1°. Să se calculeze derivata de ordinul x a funcţiunii

$$y = (a - b\,x)^p\,.$$

2°. Să se deducă din rezultatul precedent derivata de ordinul x a funcţiunii

$$y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\,.$$

3°. Să se determine maximele şi minimele funcţiunii

$$z = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}\,.$$

(24 iunie, ora 8 dim.).

Proba practică.

Să se calculeze volumul cuprins între suprafeţele

$$x = 1, \qquad z = 0, \qquad y^2 = 4 - x^2, \qquad y^2 = 3\,z.$$

(24 iunie, ora 3 p. m.).

Partea II.

Proba teoretică.

Să se determine curbele, care taie sub un unghiu dat elipsele

$$\frac{(x - k\,a)^2}{k^2\,a^2} + \frac{y^2}{k^2\,b^2} = 1,$$

a şi b fiind două constante determinate, iar k un parametru variabil.

Să se integreze ecuaţia diferenţială obţinută în următoarele cazuri:

1°. Când elipsele se reduc la cercuri.

2°. Când unghiul de intersecţie al curbelor e drept.

(28 iunie, ora 8 dim.).

Proba practică.

Se dă ecuaţia cu derivate parţiale

$$p\,x + q\,y = \frac{z + q\,y}{p\,y^2}$$

şi se cere:

1°. Să se găsiască integrala completă.

2°. Să se deducă integrala singulară.

3°. Să se studieze forma suprafeţei (S) definită de integrala singulară.

4°. Să se calculeze volumul din primul octant al axelor de coordonate cuprins între suprafeţele: S, $y^2 + z^2 = 1$, $y + z = 1$ şi $x = 0$.

(28 iunie, ora 3 p. m.).

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Vol. XXXIX. No. 8. Octomvrie 1925. Bruxelles. Asupra patrulaterului şi al hexaedrului, de J. Neuberg. O nouă (?) trisectriţă, de Gino Loria. O problemă de cinematică, de L. Meurice. Ludolphe van Ceulen (1540—1610), de H. Bosmans. Generalizarea teoremei lui Mac Laurin, asupra curburii desfăşuratelor conicelor, de R. Goormaghtigh. Transformări deduse din construcţia perechilor de puncte pe laturile unui triunghiu, de B. M. Barbălatt. Construcţia unei parabole cubice, de P. Keelhoff.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. XCIX. No. 1—6. Ianuarie—Iunie 1925. Buenos Aires. Vizita profesorului Albert Einstein, de J. R. Castineiras. Stele rătăcitoare, meteori şi cometa „Biela", de O. Schmiedel. Calculul mecanic al sistemelor elastice, de O. Gottschalk.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. Vuibert. Anul 50. No. 2. Octomvrie 1925. Paris.

Revista matematică din Timişoara. Anul V. No. 8. Octomvrie 1925. Timişoara. Aflarea câtului a două polinoame, de V. Alaci.

Curierul matematic. Vol. I. No. 8. Octomvrie 1925. Bucureşti. (Litografiat). O clasă de polinoame, de M. Ghermănescu.

P. Sergescu. *Monografie asupra ecuaţiilor cu toate rădăcinile reale.* (Litografiat). (Lucrare premiată de Universitatea din Bucureşti cu premiul Hillel). Editura Facultăţii de Ştiinţe, Bucureşti. 1925.

Ion Ionescu. *Anghel Saligny. Note Biographique.* Extras din Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Anul IX. No. 9—10. Bucureşti 1925.

CERERI.

131. Cine a enunţat pentru prima dată teorema de aritmetică, că între un număr şi îndoitul lui există totdeauna un număr prim absolut?

A. Tauber.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2610. *Să se rezolve în numere întregi, ecuaţiunea:*

$$7x^2 + 113 = y^2.$$

P. SERGESCU.

Soluţie analoagă celei date de D-l AUREL N.STOICA (cl. VI, Lic. Cantemir, Bucureşti).

Metoda generală pentru rezolvarea în întregi a ecuaţiilor de gradul al doilea cu două necunoscute, se bazează pe reducerea lor la o ecuaţie, în care termenul liber e 1. Intreaga teorie e expusă pe larg de LAGRANGE (Oeuvres, Tome VII, Pag. 118 şi următoarele). Vom întrebuinţă o schimbare de variabilă, definită de relaţia:

$$y = nx - 113z,$$

unde n e un număr întreg pe care-l vom determină imediat. Această substituţie transformă ecuaţia propusă în:

$$\frac{n^2 - 7}{113} x^2 - 2nxz + 113z^2 = 1.$$

x şi y trebuind să fie întregi, ecuaţia la care am ajuns nu poate fi considerată decât pentru valorile lui n pentru care coeficientul lui x^2 e întreg. LAGRANGE a dovedit că obţinem toate soluţiile deosebite posibile cercetând valorile lui n mai mici, în modùl, ca

$$113/2 = 56{,}5 \text{ şi astfel ca:}$$

$$n^2 = M.\ 113 + 7.$$

Pentru a află aceste valori, scriem tabloul multiplilor lui 113, dela 113 pânăla 3616 şi le adăugăm 7. Din tabloul obţinut, ştergem toate numerele terminate în 2, 3, 7, 8, 5 şi 0 care nu pot fi, evident, patrate perfecte. Mai rămân douăsprezece numere: 346, 459, 911, 1024, 1476, 1589, 2041, 2154, 2606, 2719, 3171, 3284. Numai numărul 1024 e singurul patrat perfect (32^2) din acest şir. Urmează că avem o singură soluţie pentru n şi anume 32.

Substituţia noastră este deci:

$$y = 32x - 113z,$$

iar ecuaţia la care suntem conduşi devine:

$$9x^2 - 64xz + 113z^2 = 1.$$

Vom mai transformă acum membrul I în aşă fel ca să nu conţină decât termenii în patrate, căci astfel avem o ecuaţie mai simplă, uşor de rezolvat. Vom micşorà cât mai mult coeficienţii acestei ecuaţii, întrebuinţând substituţii de noui variabile. Să punem:

$$x = kz + u,$$

unde numărul k îl vom determinà prin condiţia ca coeficientul lui z^2 să fie cel mai mic posibil, în ecuaţia transformată. Ori această ecuaţie este:

$$(9k^2 - 64k + 113)z^2 + (18k - 64)zu + 9u^2 = 1$$

şi coeficientul lui z^2 se reduce la 1 pentru $k = 4$. Deci, făcând schimbarea de variabilă:

$$x = 4z + u,$$

ecuaţia devine:

$$z^2 + 8zu + 9u^2 = 1.$$

In sfârşit, în baza aceluiaş principiu, făcând

$$z = -4u + v,$$

suntem conduşi la ecuaţia simplă cu membrul liber egal cu 1:

$$v^2 - 7u^2 = 1. \qquad (1)$$

Rezolvarea în întregi a acestei ecuaţii e uşoară. Observăm că ea are soluţia banală: $v = \pm 1$, $u = 0$. De asemenea, se obţine imediat soluţia $v = 8$, $u = 3$ (ecuaţia având numai termeni în patrate, putem luà ca soluţii $\pm$ valorile obţinute, în general). Pornind dela această soluţie întreagă $v = 8$, $u = 3$, toate soluţiile întregi ale ecuaţiei în u şi v se găsesc prin raţionamentul următor:

Dacă u şi v verifică ecuaţia, şi numerele:

$$v' = 8v + 21u, \qquad u' = 3v + 8u, \qquad (2)$$

verifică aceiaşi ecuaţie, căci:

$$v'^2 - 7u'^2 = (8v + 21u)^2 - 7(3v + 8u)^2 = v^2 - 7u^2 = 1.$$

Insă, din expresiunea celor două cătimi u' şi v' se obţine:

$$v' \pm u'\sqrt{7} = (8 \pm 3\sqrt{7})(v \pm u\sqrt{7}),$$

unde semnele se corespund. Cum $v = 8$, $u = 3$ e o soluţie întreagă, rezultă că numerele v' şi u' date de relaţiile:

$$v' \pm u'\sqrt{7} = (8 \pm 3\sqrt{7})^2$$

sunt soluţii întregi. Aceste relaţii se mai pot scrie:

$$v' = \frac{(8+3\sqrt{7})^2 + (8-3\sqrt{7})^2}{2}\ ,\ u' = \frac{(8+3\sqrt{7})^2 - (8-3\sqrt{7})^2}{2\sqrt{7}}$$

şi e aproape evident că numerele u' şi v' sunt întregi. Inlocuind în (2) pe u, v, u', v' respectiv prin u', v', u'', v'' căpătăm altă soluţie întreagă, pe care o putem pune sub forma:

$$v'' = \frac{(8+3\sqrt{7})^3 + (8-3\sqrt{7})^2}{2}\ ,\ u'' = \frac{(8+3\sqrt{7})^3 - (8-3\sqrt{7})^3}{2\sqrt{7}}\ .$$

In general, ecuaţiunea (1) are soluţia:

$$(3)\ v = \frac{(8+3\sqrt{7})^n + (8-3\sqrt{7})^n}{2}\ ,\ u = \frac{(8+3\sqrt{7})^n - (8-3\sqrt{7})^n}{2\sqrt{7}}$$

LAGRANGE a arătat (pag. 127) că aceasta e soluţia generală a ecuaţiei (1).

Pentru $n = 0, 1, 2$ avem, în particular, abstracţie făcând de semn: $v = 1$, $u = 0$; $v = 8$, $u = 3$; $v = 127$, $u = 48$.

Odată ce avem soluţia generală a ecuaţiei (1), aceea a ecuaţiei propuse se deduce imediat, dacă ţinem seama de transformările succesive întrebuinţate:

$$z = -4u + v$$

$$x = 4z + u = -15u + 4v\ \ ;\ \ y = 32x - 113z = -28u + 15v.$$

Aceste expresiuni ale lui x şi y, în care u şi v iau valorile date, în general, de formulele (3), reprezintă soluţia generală a ecuaţiei propuse (abstracţie făcând de semn, care poate fi $\pm$). In particular, pentru $n = 0, 1, 2$, obţinem soluţiile cele mai mici ale ecuaţiei propuse şi anume:

I: $x = 4$, $y = 15$; II: $x = 13$, $y = 36$; III: $x = 212$, $y = 561$.

. . . . . .

Orice ecuaţie de tipul celei propuse se rezolvă pe aceiaşi cale.

Notă. S'au primit soluţii empirice şi care nu dau rezultatul general, dela D-nul N. ARCADIAN (Cl. VIII Caracal), care a dat primele două soluţii şi dela D-nii: CORNELIU POPESCU (Cl. V, Giurgiu) şi LONGIN IONESCU (Caracal), cari au dat numai prima soluţie.

PROBLEMA 2891. *Numărul* a, *de două cifre, este nepereche şi are cinci divizori. Numărul* b, *de trei cifre, are numai patru din divizorii săi multipli de* a. *Care sunt numerele* a *şi* b *?*

ST. SOLACOGLU.

Soluţia. Numărul divizorilor unui număr fiind egal cu produsul exponenţilor factorilor lui primi măriţi cu 1, urmează că $a = p^4$, pentrucă $5 = 4 + 1$.

Dar a fiind de 2 cifre, rezultă că $p \leqslant 3$ şi cum $p \neq 2$, căci a este impar, rezultă $p = 3$, deci: $a = 81$.

Numărul b de trei cifre este de forma:

$$b = 81 \,.\, k, \qquad (k \leqslant 12)$$

astfel ca numărul k să aibă 4 divizori.

Numerele mai mici ca 12 care au 4 divizori sunt: 6, 8 şi 10.

Deci soluţiile problemei sunt:

$$a = 81 \quad \text{şi} \quad b = 81 \,.\, 6 = 486,$$
$$b = 81 \,.\, 8 = 648,$$
$$b = 81 \,.\, 10 = 810.$$

Observări. 1°. Au rezolvat problema, găsind cele 3 soluţii, d-nii: † FL. ER. GEORGESCU, M. ADAM, I. S. ANTONIU, D. ATANASIU, B. M. BARBĂLATT, L. BĂNĂRESCU, E. BERCOVICI, C. BERDAN, MARTINIAN BOGDAN, N. BOTEA, I CONSTANTINESCU, TR. DORDEA, I. B. FLORESCU, I. C. GEORGESCU, M. GÂTAN, N. GEORGESCU-ROEGEN, CRISTEA GOILAV, I. O. HUBER, E. ILIESCU, CORNELIU C. IONESCU, I. IONIŢĂ, GH. I. JUJESCU, P. KATZ, F. NEGRETZU, A. T. NICOLAU, A. PAMULA, OV. POPEA, M. PĂTROIANU, T. POPOVICIU, A. SOLOMON, D. SOLOMON, W. SOLOMON, A. SUFLEŢEL, N TAILER, AL. TAUBER şi MIRCEA VASILIU.

2°. Au arătat că problema se poate generaliză, d-nii: M. ADAM şi FL. NEGRETZU.

3°. S'au mai primit foarte multe soluţii necomplete, dând pentru b numai una sau două valori.

4°. D-l BENEDICT REINHORN consideră că numărul a are 6 divizori în loc de 5, cum este în enunţul problemei.

CĂPITAN GR. ZAPAN.

PROBLEMA 2978. *Care este restul diviziunii prin 1155 al expresiunii:*

$$E = 385^{2m} + 231^{4n} + 165^{6p} + 105^{10q},$$

m, n, p, q, *fiind numere întregi variabile?*

GRIGORE ZAPAN.

Soluție și generalizare dată de D-nii: M. ADAM (Constanța), TRAIAN N. ANGELESCU (Giurgiu), O. V. POPEA (Chișinău), L. ROSENFELD (Botoșani), MARIN ȘTEFAN (Constanța) și AL. TAUBER (Botoșani).

Să căutăm mai general restul diviziunii prin $\prod_1^n x_i$ al expresiunii:

$$E \equiv \sum_1^n \left(A_i \prod_1^n x_i \,/\, x_i \right)^{a_i . I(x_i)},$$

în care A_i este prim cu x_i; x_1, x_2, x_3,..., x_n sunt numere întregi oarecare, prime între ele; $I(x_i)$ indicatorul lui x_i; iar a_i număr întreg oarecare ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Avem:

$$E \equiv \left(A_1 \prod_1^n x_i \,/\, x_1 \right)^{a_1 . I(x_1)} + \left(A_2 \prod_1^n x_i \,/\, x_2 \right)^{a_2 . I(x_2)} + \ldots .$$

$$\ldots . + \left(A_n \prod_1^n x_i \,/\, x_n \right)^{a_n . I(x_n)} .$$

Se vede ușor că toți termenii lui E sunt $\mathcal{M}x_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ afară de termenul:

$$\left(A_i \prod_1^n x_i \,/\, x_i \right)^{a_i . I(x_i)} .$$

Dar conform teoremei lui FERMAT, generalizată de EULER acest termen este $\mathcal{M}x_i + 1$. Deci:

$$E \equiv \mathcal{M}x_i + 1 \qquad \therefore \qquad E - 1 = \mathcal{M}x_i .$$

Dând lui i succesiv valorile 1, 2, 3,..., n rezultă că $E - 1$ se divide cu x_1, x_2, x_3,..., x_n și deci și cu produsul lor $\prod_1^n x_i$, căci numerele x_1, x_2, x_3,..., x_n sunt prime între ele. Deci:

$$E - 1 = \mathcal{M} \prod_1^n x_i$$

$$\therefore \qquad E = \mathcal{M} \prod_1^n x_i + 1.$$

Prin urmare restul căutat este 1.

Cazuri particulare:

1°. — Când $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots A_n = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1$, suntem în cazul expresiunei E_1 dela problema 2702 rezolvată şi generalizată de d-l GRIGORE ZAPAN în „G. M." (XXVII, 129 ş. u.)

2°.— Făcând $n = 4$, $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 11$, $a_1 = m$, $a_2 = n$, $a_3 = p$, $a_4 = q$, obţinem expresiunea din problema 2978, al cărei rest prin $\prod_1^4 x_i = 3.5.7.11 = 1155$ este prin urmare 1.

Observări.

1°.—Au rezolvat, problema fără a o generaliză, D-nii: † FL. ER. GEORGESCU (Lic. Cantemir, Bucureşti), M. ADAM, N. ARCADIAN, M. BRĂTESCU-DANUBIU, L. BRÜLL, C. CIORĂNESCU, V. COŞNIŢĂ, ST. FL. LĂZĂRESCU, OV. POPEA, CORNELIU POPESCU, MARIN D. POPESCU, W. SOLOMON, EM. ŞTEFĂNESCU, G. TAILER, N. TEODORESCU, I. C. VASILIU şi MIRCEA VASILIU.

2°. — S'a mai primit o generalizare în cadrul numerelor prime dela d-l EM. ŞTEFĂNESCU.

3°.— D-l MARIN RĂDULESCU (Lic. Spiru-Haret, Bucureşti), arată că problema 2978 e un caz particular al problemei 962 din *«Exercices d'Arithmétique" par F. G. M.*, pag. 341. De fapt însă această problemă e un caz particular al problemei 2702 (G. M. XXVII, 129, 139, 131) şi am propus-o pentru tinerii corespondenţi începători, cu intenţiunea de a-i face să răsfoiască numerele vechi ale *«Gazetei»*, unde totdeauna vor avea de găsit câte ceva nou.

Dar începătorii s'au speriat de ea, lăsând'o pe seama celor mai înaintaţi, cari în graba de a rezolví probleme multe nu prea sunt atenţi la soluţiile ce dau. Astfel, am primit peste 20 de soluţii greşite şi anume: două soluţii dând restul 0, şapte soluţii dând restul 4, o soluţie dând restul 6, o soluţie dând restul 8, o soluţie dând resturi periodice 8 şi 5, o soluţie dând restul 651, şapte soluţii dând restul 886, o soluţie cu o infinitate de resturi şi în fine două soluţii ale unui distins corespondent, găsite pe căi diferite, cu rezultate deasemenea diferite, ce i-au provocat exclamaţia: — *«Nu ştiu cum să-mi explic această diferenţă de rezultate!»*.

Explicaţia e simplă: *lipsa de atenţiune!*

CĂPITAN GR. ZAPAN.

PROBLEMA 3046. *Se consideră un triunghiu* ABC *şi cercul său circumscris* O. *Dreapta* AO *taie a doua oară cercul în A'. Fie* A_1 *piciorul perpendicularei dusă din* A' *pe* BC *şi fie* B_1, C_1 *punctele analoage. Dreapta* AA_1 *tae dreapta* B_1C_1 *în* D. *Din* D *se duce o paralelă la* AC, *care taie pe* CC_1 *în* M. *Pe* CC_1 *se ia* $C_1N = CM$ *şi din* N *se duce o paralelă la* AB, *care taie pe* BC *în* L. *Să se arate că:*

1. *Dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *sunt concurente.*
2. AL *este simediană în triunghiul* ABC.
3. *Când* AA_1 *este bisectoarea unghiului* $C_1A_1B_1$?

O. Orănescu.

Soluţie dată de D-l E. Ballan (student).

1. Se observă că A_1, B_1, C_1 sunt isotomicele picioarelor înălţimilor triunghiului ABC, deci AA_1, BB_1, CC_1 vor concurà în reciprocul ortocentrului triunghiului.

2. Fie P acest punct. Relaţia lui Van Aubel ne dă:

$$CP/PC_1 = CA_1/A_1B + CB_1/B_1A = tgC\ (tgA + tgB)/tgA\ tgB.$$

Triunghiul CC_1B_1, tăiat de transversala AA_1, dă:

$PC/PC_1 . DC_1/DB_1 . AB_1/AC = 1$. Insă $AB_1/AB = tgA/(tgA + tgC)$; deci

$$DB_1/DC_1 = tgC\ (tgA + tgB)/tgB\ (tgA + tgC) = \sin^2C/\sin^2 B = c_2/b^2.$$

Insă $DB_1/DC_1 = MC/MC_1 = NC_1/NC = LB/LC = c^2/b^2$,

deci AL este simediană.

3. Pentruca AA_1 să fie bisectoare în triunghiul $C_1A_1B_1$, trebue ca

$$A_1C_1/A_1B_1 = DC_1/DB_1 = b^2/c^2.$$

Insă $A_1B = b\cos C$ $C_1B = b\cos A$

$$\overline{A_1C_1^2} = b^2\cos^2C + b^2\cos^2A + 2b^2\cos A\cos B\cos C,$$

$$\overline{A_1B_1^2} = c^2\cos^2B + c^2\cos^2A + 2c^2\cos A\cos B\cos C,$$

deci:

$$\frac{\cos^2C + \cos^2A - 2\cos A\cos B\cos C}{\cos^2B + \cos^2A - 2\cos A\cos B\cos C} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{\sin^2B}{\sin^2C}$$

$$\therefore \frac{\sin^2B - 4\cos A\cos B\cos C}{\sin^2C - 4\cos A\cos B\cos C} = \frac{\sin^2B}{\sin^2C} = 1$$

$$\sin B = \sin C,$$

triunghiul ABC trebue deci să fie isoscel.

Generalizare de D-l T. Popoviciu.

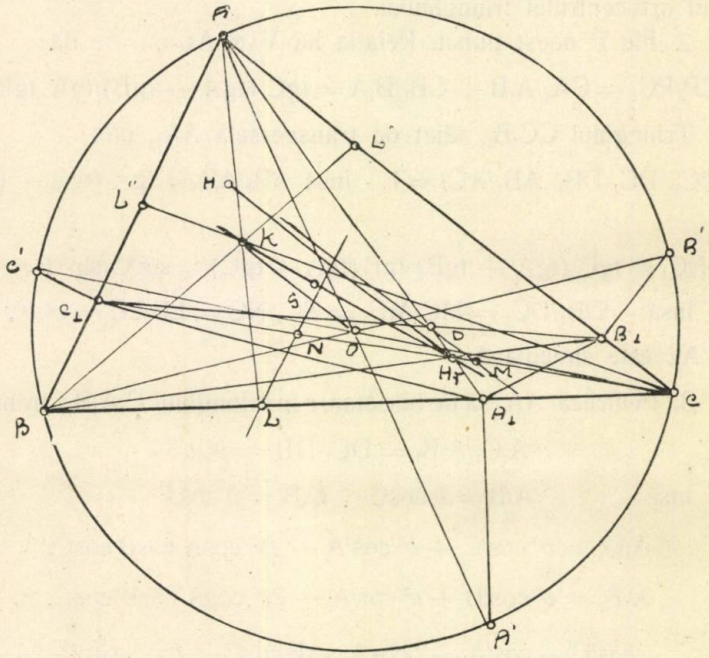
Fie mai general M_0 un punct din planul triunghiului ABC, $A_1B_1C_1$ triunghiul pedal al lui M_0 în raport cu triunghiul ABC, $A_2B_2C_2$

tr. pedal al lui M_0 în raport cu tr. $A_1B_1C_1$,.... $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ tr. pedal al lui M_0 în raport cu $A_n B_n C_n$.

Luăm pe laturile triunghiului ABC punctele A'_n, B'_n, C'_n, aşà fel ca să avem:

$$\frac{A'_nB}{A'_nC} = \frac{A_{n+1}B_n}{A_{n+1}C_n}, \quad \frac{B'_nC}{B'_nA} = \frac{B_{n+1}C_n}{B_{n+1}A_n}, \quad \frac{C'_nA}{C'_nB} = \frac{C_{n+1}A_n}{C_{n+1}B_n}.$$

Evident că AA'_n, BB'_n, CC'_n vor fi concurente într'un punct M_n.



Fie (x_1, y_1, z_1) coordonatele baricentrice ale lui M_0. B_1C_1 taie pe BC în A', avem:

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{A'B_1}{A'C_1}, \quad \text{însă} \quad \frac{A'B_1}{A'C_1} = \frac{CA}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{BA} = 1,$$

deci

$$A_2B_1/A_2C_1 = CB_1.BA/BC_1.CA,$$

şi ţinând seamă de

$$B_1C/B_1A = x_1/z_1, \quad BC_1/AC_1 = x_1/y_1;$$

avem în definitiv

$$A_2B_1/A_2C_1 = A'_1B/A'_1C = (x_1 + y_1)/(x_1 + z_1);$$

deci coordonatele lui M_1 sunt $(y_1 + z_1,\ x_1 + z_1,\ x_1 + y_1)$.

In definitiv, se poate arătà că între punctele M_i $(i=0, 1, 2,...n)$ avem legătura: dacă u, v, w sunt coordonatele lui M_i coordonatele lui M_{i+1} sunt $(v+w,\ u+w,\ u+v)$.

Să vedem câtevà proprietăţi ale punctelor M_i .

I. *Punctele* M_i *sunt toate pe o dreaptă ce trece prin* G, ceace se poate uşor demonstrà observând că de ex. pentru punctele,

$$M_i\ (u,\ v,\ w), \qquad M_j\ (u',\ v',\ w'),$$

avem, sau

$$u + u' = v + v' = w + w' \quad (i + j = \text{impar}),$$

sau

$$u - u' = v - v' = w - w' \quad (i + j = \text{par}).$$

Deci determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = 0.$$

c. c. t. d.

II. Avem

$$M_i\,G/M_j\,G = 2^{j-i} \quad \text{(G centrul de greutate al lui ABC)}$$

de ex. când $i=1$, $j=0$, avem $M_1\ (y_1 + z_1,\ x_1 + z_1,\ x_1 + y_1)$, $M_0\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$

$$M_1G/M_0G = \tfrac{1}{2}.$$

Să vedem acuma câtevà cazuri particulare:

1. *Dacă* M_0 *este centrul de greutate* G *al triunghiului* ABC, *toate punctele* M_i *se confundă în* G.

2. *Dacă* M_0 *este ortocentrul tr.* ABC, *are deci coordonatele*

$$(a/\cos A\ ,\ b/\cos B\ ,\ c/\cos C)$$

M_1 ($a\cos A$, $b\cos B$, $c\cos C$) *este centrul cercului circumscris* şi avem că O, H, G sunt colineare şi

$$OG/HG = \tfrac{1}{2}.$$

3. *Dacă* M_0 *este punctul* Γ *al lui* NAGEL $(p - a,\ p - b,\ p - c)$, *atunci* M_2 *este centrul cercului înscris* (a, b, c) deci:

Γ, I, G sunt colineare şi

$$IG/\Gamma G = \tfrac{1}{2}.$$

4. *Dacă* M_0 *este reciprocul ortocentrului* (cosA/*a*, cosB/*b*, cos C/*c*),M_1 *este punctul* K (a^2, b^2, c^2) *al lui* LEMOINE. Deci K, G, H_r sunt coliniare şi

$$KG/GH_r = \tfrac{1}{2}.$$

O proprietate interesantă e că dreapta OK este paralelă cu dreapta HH_r, ceeace se vede din triunghiurile OKG, HH_r G, care sunt asemenea.

Observând enunţul problemei 3046, vedem că aceasta este un caz particular şi anume A_1, B_1, C_1 sunt evident isotomicele picioarelor înălţimilor, deci AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în reciprocul H_r al ortocentrului. Punctul L este punctul care împarte latura BC în acelaş raport ca D latura B_1C_1, deci AL şi analoagele sale, precum am văzut mai sus, sunt concurente în punctul K al lui LEMOINE, prin urmare AL este o simediană. Rămâne să studiem ultimul punct al problemei.

Pentruca AA_1 să fie bisectoara unghiului $C_1A_1B_1$ trebue ca ea să fie înălţime în triunghiul ABC. Fiindcă o dreaptă se confundă cu isotomica lui numai în triunghiul isoscel, urmează că ABC trebue să fie neapărat isoscel, pentruca să satisfacă punctul 3). In cazul general M_0 trebue să fie pe înălţimea coborîtă din A.

Observaţii. 1. AA_1 este mediană în triunghiul $A_1B_1C_1$, când M_0 este pe mediana laturei BC.

2. AA_1 este înălţime în triunghiul $A_1B_1C_1$, când M_0 descrie curba (cubică) a cărei ecuaţia în coordonate normale este

$$x(z^2 - y^2) + zy(z\cos C - y\cos B) = 0.$$

a) Dacă M_0 este centrul de greutate, triunghiul ABC trebue să fie isoscel.

b) Dacă M_0 este centrul I, triunghiul trebue să fie isoscel.

Notă. 1. Au observat sau conchis, pe cale de calcul simplu, că AA, sunt reciprocele înălţimilor, D-nii: E. BALLAN, N. BOTEA, C. CIORĂNESCU, M. FOCŞENEANU, M. PĂTROIANU, GH. SIMIONESCU, W. SOLOMON, I. VASILIU, S. WEISS, GH. GROFŞOREANU, E. ŞTEFĂNESCU, TR. UDRISKY.

2. Au demonstrat partea a doua, prin consideraţiuni de transversale sau asemănări de triunghiuri, D-nii: E. ŞTEFĂNESCU, W. SOLOMON, GH. SIMIONESCU, E. BALLAN, C. CIORĂNESCU, M. FOCŞENEANU, M. PĂTROIANU.

3. Soluţiuni pentru partea a treia, cu ajutorul calculului trigonometric, au dat D-nii: E. BALLAN, M. PĂTROIANU, GH. SIMIONESCU, W. SOLOMON, E. ŞTEFĂNESCU, TR. UDRISKY.

Soluţiuni geometrice au dat acestei părţi, D-nii : M. Focşeneanu, C. Ciorănescu şi Tr. Udrisky.

4. Soluţiuni în coord. baricentrice au dat pentru întreaga problemă, D-nii : N. Botea şi I. Vasiliu, cu o interesantă generalizare din partea ultimului.

5. Soluţia părţii a doua este redactată după D-l E. Ballan, iar ultima după acesta şi d. E. Ştefănescu.

6. Observaţiuni simple a făcut d. M. Focşeneanu.

M. G.

PROBLEMA 3145. *Un cerc O' de rază constantă se rostogoleşte pe o dreaptă fixă Δ. Ştiind că O este centrul unui cerc fix, se cere să se găsiască : 1) locul geometric al proecţiei lui O pe axa radicală a cercurilor O şi O' ; 2) locul polurilor acestei axe faţă de fiecare din cele două cercuri ; 3) locul centrelor de asemănare a celor două cercuri şi 4) învelitoarea axei lor radicale.*

Locot. Col. Gh. Buicliu.

Soluţie dată de D-l M. Focşeneanu.

Iau ca axe de coordonate dreapta Δ şi perpendiculara din O pe ea. Fie R, R' razele cercurilor O, O' şi O(O, a), O'(λ, R'), λ fiind variabil. Ecuaţiile cercurilor O şi O' sunt respectiv :

(1) $x^2+y^2-2ay+a^2-R^2=0$

(2) $x^2+y^2-2\lambda x-2R'y+\lambda^2=0,$

iar axa lor radicală are ecuaţia

(3) $2\lambda x+2(R'-a)y+a^2-R^2-\lambda^2=0.$

In fine, linia OO', a centrelor, are ecuaţia

(4) $\lambda(y-a)-(R'-a)x=0.$

Fie P proecţia lui O şi O' pe dreapta (3).

1) *Locul lui P.* De oarece P este la intersecţia dreptelor (3) şi (4), locul său se află eliminând pe λ între ecuaţiile (3) şi (4). Rezultatul eliminării este cubica

(5) $2(R'-a)y^3+2(R'-a)x^2y+(3a^2-2aR'-R^2)y^2+(a^2-R'^2)x^2$
$+(2a^2R'-4a^3+2aR^2)y+a^2(a^2-R^2)=0.$

2) *Locul polurilor axei radicale.* Fie P′ polul dreptei (3) față de cercul O și P″ față de cercul O′.

Polara punctului $P'(x_1, y_1)$ față de cercul O este

$$x_1x+(y_1-a)y+a^2-R^2-ay_1=0.$$

Pentruca această dreaptă să se confunde cu (3), trebue să avem:

$$\frac{x_1}{2\lambda}=\frac{y_1-a}{2(R'-a)}=\frac{a^2-R^2-ay_1}{a^2-R^2-\lambda^2}.$$

Eliminând pe λ între aceste 2 relații și trecând la coordonate curente, se găsește că P′ descrie dreapta

$$y-a=0$$

și conica

$$(6)\quad 2(R'-a)(y-a)(a^2-R^2-ay)=(a^2-R^2)(y-a)^2 - (R'-a)^2x^2.$$

La fel polara punctului P″(X, Y) față de cercul O′ este

$$(X-\lambda)x+(Y-R')y+(\lambda^2-\lambda X-R'Y)=0.$$

Ca această dreaptă să se confunde cu (3), trebue să avem

$$\frac{X-\lambda}{2\lambda}=\frac{Y-R'}{2(R'-a)}=\frac{\lambda^2-\lambda X-R'Y}{a^2-R^2-\lambda^2}.$$

Eliminând pe λ între aceste relațiuni și trecând la coordonate curente, se găsește că locul lui P″ este cubica

$$2(R'-a)^2(y-a)x^2+2R'(R'-a)(y-a)^2y+2(R'-a)^3x^2 + (a^2-R^2)(y-R')(y-a)^2-(R'-a)^2(y-R')x^2=0.$$

3) *Locul centrelor de asemănare.* Se știe că coordonatele centrelor de asemănare a 2 cercuri de ecuații:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$$

$$(\lambda-a')^2+(y-b')^2-R'^2=0$$

sunt date de formulele

$$(S)\qquad x=\frac{aR'+a'R}{R+R'}\ ,\quad y=\frac{bR'+b'R}{R+R'}$$

și (S′) $x=\frac{aR'-a'R}{R'-R}$, $y=\frac{bR'-b'R}{R'-R}$.

Aplicând aceste formule la cercurile (1) și (2), se găsește

$$S\left[x=\frac{\lambda R}{R'+R}\ ,\quad y=\frac{aR'+R'R}{R'+R}\right];$$

$$S'\left[x=\frac{-\lambda R}{R'-R}\ ,\quad y=\frac{aR'-R'R}{R'-R}\right].$$

Ordonata lui S și a lui S′ fiind constante, aceste 2 puncte descriu drepte paralele cu Δ.

4) *Învelitoarea axei radicale.* Eliminând pe λ între ecuația (3) și derivata sa în raport cu λ

$$x-\lambda=0,$$

se găsește că învelitoarea cerută este parabola

$$x^2+2(R'-a)y+a^2-R^2=0.$$

II. *Soluție* dată de D-l N. Blaha.

Iau origina în O și axa de x paralelă cu Δ. Ecuațiile cercurilor O și O′ devin:

$$x^2+y^2-R^2=0$$

$$x^2+y^2-2\lambda x-2by+\lambda^2+b^2-R'^2=0.$$

1) Procedând ca la soluția I se găsește că locul lui P este cubica

$$2by^3+2bx^2y-b^2x^2+(R'^2-R^2-b^2)y^2=0.$$

2) Din relația

$$OP\,.\,OP'=R^2,$$

se deduce că locul lui P′ este inversul locului lui P, pol de inversiune fiind O, iar putere R^2.

3) Din relațiunile

$$SO/SO'=S'O/S'O'=R/R',$$

rezultă că S și S′ descriu drepte paralele cu Δ.

4) Procedând ca la soluția I se găsește că învelitoarea cerută este parabola

$$x^2+2by+R'^2-R^2-b^2=0.$$

Observaţiuni. 1°. Soluţia il nu este completă. Ea nu dă locul lui P″. Autorul soluţiei a indicat că pentru a construi puncte de ale locului lui P″, trebuie să se ia simetricul lui P′ faţă de P, deoarece

$$PP' = PP''.$$

Această relaţiune nu este însă totdeauna adevărată.

Iată un mijloc geometric de a construi pe P″. Fie C şi D intersecţia lui OO′ cu cercul O′. De oarece O′C şi O′D sunt constant egale cu R′, urmează că C şi D descriu câte o concoidă. P″ fiind conjugatul lui P faţă de C, D rezultă imediat construcţia lui P″.

2°. Locul lui P se poate găsi şi pe cale geometrică. Se caută mai întâi înfăşurătoarea axei radicale a cercurilor O şi O′. Se găseşte parabola (dela soluţia II):

$$x^2 + 2by + R'^2 - R^2 - b^2 = 0.$$

Locul lui P este podara lui O faţă de această parabolă, podară care se ştie că este o cubică cu punctul dublu în O.

De aici se deduce geometriceşte şi locul lui P′, care este inversul lui P. Se ştie din *Géométrie Analytique* par M. H. Picquet, pag. 575, că inversa unei cubice faţă de punctul dublu, este o conică. Deci locul lui P′ este o conică.

3°. Se pot găsi şi alte proprietăţi interesante particularizând problema, făcând de exemplu ca Δ să treacă prin O, sau dând anumite valori numerice raportului R/R′.

Gh. B.

PROBLEMA 3286. *Dacă* m *şi* s *sunt punctele în care mediana* AA′ *şi simediana* AA_1 *a triunghiului* ABC *întâlnesc cercul* O, *circumscris triunghiului, atunci cercurile* mA′O *şi* sA′O *sunt egale între ele.*

Locot.-Col. Gh. Buicliu.

I. *Soluţie* dată de D-nii: N. Botea, C. T. Ionescu-Bujor, D. Nestor, L. Brüll (Lc. Cantemir, Bucureşti); E. Grünstein (Lc. M. Cogălniceanu, Bucureşti); I. Vlădea (Lc. A. Şaguna, Braşov); N. Teodorescu (Lc. Spiru Haret, Bucureşti); C. C. Popovici (Lc. Internat, Iaşi); Gr. Ioachim (Lc. Militar, Iaşi); I. C. Vasiliu, L. Căldăraru (Lc. particular); L. Scripcă (Iaşi); V. Manafu (Lc. Militar Mânăstirea Dealului), N. I. Manolescu (Lc. Unirea, Focşani), G. Călin, O. Braeşter şi G. Mareş.

Se ştie că mediana şi simediana sunt isogonale şi că mediatricea OA′ trece prin mijlocul *n* al arcului *sm*. De aci rezultă că

unghiurile sOA' şi mOA' sunt egale ca având aceeaşi măsură, iar triunghiurile $mA'O$ şi $sA'O$ sunt egale ca având latura OA' comună, laturele mO şi sO egale ca raze, iar unghiurile mOA' şi sOA' egale după cum s'a văzut. Urmează deci că şi cercurile circumscrise acestor triunghiuri sunt egale.

II. *Soluţie* dată de D-nii: V. DORNEANU, N. VÂRLAN (Lc. Internat, Iaşi); A. POPOVICI (Focşani) şi I. T. POPOVICI.

Ca la soluţia I, se observă că unghiurile $sA'n$ şi $mA'n$ sunt egale. Deci perpendicularele pe mijloacele lui sA' şi mA' se întâlnesc într'un punct I de pe $A'N$. Fie D şi E punctele în care aceste perpendiculare întâlnesc perpendiculara în în mijlocul lui $A'O$. D şi E sunt centrele cercurilor $sA'O$ şi mAO. Se observă că unghiurile IDE şi $sA'n$ sunt egale, ca având laturile perpendiculare. Deasemenea unghiurile IED şi $mA'n$ sunt egale. Se deduce că triunghiul DIE şi prin urmare şi DOE este isoscel. De unde

$$DO = EO,$$

ceeace erà de demonstrat.

Observaţiuni. 1°. D-l N. BOTEA observă că în general se poate demonstrà următoarea proprietate:

Dacă p *şi* p' *sunt punctele în care două isogonale, trecând prin vârful* A *al triunghiului* ABC, *întâlnesc cercul* O *şi dacă* A', B' *sunt două puncte situate pe mediatoarea corespunzătoare laturei* BC, *atunci cercurile* pA'B' *şi* p'A'B' *sunt egale între ele.*

2°. D-l I. C. VASILIU demonstrează că în locul cercului O se poate considerà un cerc concentric cu el, iar în locul punctului O, un punct oarecare de pe mediatoarea laturei BC.

3°. D-l C. C. POPOVICI demonstrează şi egalitatea perechilor de cercuri (mOC, sOB), ($mA'C$, $sA'B$), (mOB, sOC), ($mA'B$, $sA'C$) şi arată că proprietatea rămâne adevărată pentru orice izogonală care pleacă din A.

PROBLEMA 3323. *La un ceasornic secundarul are dela centrul lui până la vârf 5 mm.; minutarul 20 mm. şi orarul 15 mm. În cât timp vârfurile lor parcurg un Km.? Rezultatele se vor da cu o aproximaţie de o secundă.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l C. C. POPOVICI (Liceul Internat, Iaşi).

Fie a lungimea acului în mm., t timpul în care acul face o

rotaţie în secunde şi x numărul secundelor în care vârful acului parcurge 1 km. = 1000000 mm. Acul va face x/t rotaţii şi deci avem:

$$1000000 = 2\pi a.x/t,$$

de unde:

$$x = 500000\, t/\pi a.$$

Pentru cele trei ace avem.

	secundar	minutar	orar
$a =$	5	20	15 mm.
$t =$	60	$60\times60=3600$	$12\times60\times60=43200$ secunde
$x =$	$6000000/\pi$	$90000000/\pi$	$1440000000/\pi$.

Găsim în tabele că $1/\pi = 0{,}3183098861837.....$

Pentru secundar ajung 7 zecimale şi găsim 1909859 secunde=22 zile, 2 ore, 30 minute, 59 secunde.

Pentru minutar ajung 8 zecimale şi găsim 28647889 secunde = 331 zile, 13 ore, 44 minute, 49 secunde.

Pentru orar ajung 10 zecimale şi găsim 458366236 secunde = 5305 zile, 3 ore, 57 minute, 16 secunde.

Toate celelalte soluţiuni primite nu au atins aproximaţia cerută din cauză că nu s'a luat π cu un număr suficient de zecimale.

Astfel au luat $\pi = 3{,}14$, D-nii: A. C. Bassarab, I. I. Iliuţă-Dăbuleni, I. I. C. Brezuica, I. Foca, N. S. Mihăilescu, T. A. Ionescu-Bega, G. M. Călin, I. Nicolau-Dobridor, E. G. Botea, C. T. Ionescu-Bujor.

Au luat $\pi = 3{,}1416$, D-nii: D. G. Nestor, I. C. Cristescu.

A luat $\pi = 3{,}141542$, D-l N. I. Manolescu.

PROBLEMA 3331. *Două numere de acelaşi număr de cifre au pe 729575 cel mai mic comun multiplu şi nu au alt factor comun decât pe 5. Care sunt acele numere?*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l A. Tauber (Şcoala Politechnică din Bucureşti), C. C. Popovici (Liceul Internat, Iaşi), M. Blumen (Liceul Piatra-Neamţ), O. I. Braeşter (Liceul Naţional, Iaşi), B. V. Gataianţu (Liceul Caracal), C. D. Segărceanu (Liceul Fraţii Buzeşti, Craiova), S. S. Aronovici (Liceul Galaţi), M. G. Călin

(Liceul Caracal), I. C. CRISTESCU (Liceul Şincai, Bucureşti), N. I. MANOLESCU (Liceul Focşani), I. I. DAVID (Liceul Piatra).

Avem:

$$729575 = 5^2 \times 7 \times 11 \times 379.$$

Cel mai mare comun divizor al acelor numere fiind 5, produsul lor este $5^3 \times 7 \times 11 \times 379 = 3647875$. Cele două numere având acelaşi număr de cifre, nu pot fi decât de câte patru cifre. Dacă ar aveà numai câte trei cifre, produsul ar fi mai mic ca $10^6 < 3647875$; dacă ar aveà câte cinci cifre ar trece de $10^8 > 3647875$.

Unul din numere trebuie să aibă factorul 379 şi pe 5, deci este $\mathcal{M}(379 \times 5) = \mathcal{M}1895$. Ca să nu aibă mai mult de patru cifre nu am puteà să luăm decât factorul 5 în plus, căci $5 \times 1895 = 9475$, altfel produsul ar aveà mai mult ca patru cifre. Dar atunci rămâne ca al doilea număr să fie $5 \times 7 \times 11 = 385$, care nu are patru cifre. Rămâne a lua primul număr egal cu 1895 şi atunci al doilea va fi $5^2 \times 7 \times 11 = 1925$. Numerele căutate sunt dar 1895 şi 1925.

Primul arată anul înfiinţării *Gazetei Matematice*, al doilea anul curent în care s'a împlinit 30 ani de existenţă al acestei reviste.

EXERCIŢII

13. Să se afle patratele perfecte de trei cifre, astfel ca ultima cifră să arate numărul divizorilor.

GEORGE TAILER.

R. Ultima cifră a unui patrat perfect poate fi: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Eliminăm pe cele pare şi pe 1, ne rămân 5, 9. Pentruca un număr să aibă cinci divizori, se observă că trebuie să fie patratul perfect al unui număr prim ridicat la patrat; se găseşte astfel soluţia 525. Un număr ca să aibă 9 divizori trebuie să se poată pune sub forma unui produs de două patrate diferite a două numere prime, căci $9 = (2+1)(2+1)$; se găsesc astfel soluţiunile: 100, 196, 225, 441, 484, 576.

14. Să se găsiască un număr de forma $N + 5000$, care să se poată scrie *aabbbaac*; N fiind un număr perfect.

ALEXANDRU CH. MLADENOVICI.

R. Se ştie că formula numerelor perfecte este: $2^n(2^{n+1} - 1)$, cu condiţia ca $2^{n+1} - 1$ să fie prim. N fiind de 8 cifre, 2^{2n+1} va fi deasemenea de

8 cifre; în table găsim că aceasta corespunde în numere întregi cu $n = 12$. Căutăm dacă $2^{13} - 1$ e prim şi găsim că da; deci numărul:

$$N = 2^{12}(2^{13} - 1) = 33550336$$

este perfect. Singura soluţie a problemei, aşà dar, este numărul:

$$N + 5000 = 2^{12}(2^{13} - 1) + 5000 = 33550336 + 5000 = \textit{33555336},$$

care are într'adevăr forma cerută.

15. Să se găsiască patratele de trei cifre, astfel ca prima cifră să fie egală cu a doua, micşorată cu unitatea şi cifra a doua să fie de două ori mai mare decât ultima.

B. Gataianţu.

R. Vedem la terminaţiunile de patrate perfecte că numai numerele: 21 şi 84 au cifra zecilor de două ori mai mare decât cifra unimilor. Deci avem numerele $121 = 11^2$ şi $784 = 28^2$, care îndeplinesc toate condiţiunile enunţului.

16. Să se calculeze limita expresiei:

$$y = \left[\frac{\alpha_1 a_1^{\frac{1}{n}} + \alpha_2 a_2^{\frac{1}{n}} + \ldots + \alpha_m a_m^{\frac{1}{n}}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}\right]^n$$

când n tinde către infinit, m fiind un număr întreg oarecare, iar $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$.

M. Adam.

R. Nedeterminarea este de forma 1^∞, aşà că limita este e^λ, în care λ este limita expresiei

$$z = \left(\frac{\alpha_1 a_1^{\frac{1}{n}} + \alpha_2 a_2^{\frac{1}{n}} + \ldots + \alpha_m a_m^{\frac{1}{n}}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m} - 1\right) n. \qquad (1)$$

Ţinând seamă că:

$$a_i^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\mathrm{L}a_i}{n} + \vartheta \frac{(\mathrm{L}a_i)^2}{n^2}. \qquad (2)$$

înlocuind relaţia (2) în (1), găsim:

$$\lim z = \frac{\alpha_1 \mathrm{L}a_1 + \alpha_2 \mathrm{L}a_2 + \ldots + \alpha_m \mathrm{L}a_m}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m},$$

însă

$$e^{\alpha_1 \mathrm{L}a_1} = a_1^{\alpha_1} \quad \text{etc.},$$

deci:

$$\lim_{n \to \infty} y = \left[a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}\right]^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}}.$$

17. Fie A un punct din planul unui cerc O. Polara lui A faţă de cercul O este locul punctelor, de unde se pot duce tangente egale la cercul O şi la cercul descris pe OA ca diametru. S. WEISS.

R. Fie a, b, c punctele de intâlnire ale dreptei OA cu cercul O şi cu polara lui A. Avem:

$$\frac{1}{cA} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ca} + \frac{1}{cb}\right) = \frac{cO}{ca.cb}$$

$$\therefore \quad cA.cO = ca.cb.$$

Deci polara lui A e axa radicală a celor două cercuri.

(Aceasta generalizează teorema 47 din Traitè de Géométrie (Cap. Géométrie du triangle) par E. ROUCHÉ et CH. de COMBEROUSSE).

PROBLEME PROPUSE

3332 *). Din şirul patratelor consecutive se opresc numai ultimele două cifre. Cum se poate deduce fiecare grupă de două cifre din precedenta?

C. C. POPESCU.

3351. O fracţie ordinară are numărătorul şi numitorul de trei cifre fiecare. Ştergând cifrele dela mijloc, valoarea fracţiei nu se schimbă. Cum putem găsi asemenea fracţii? Care este numărul soluţiilor?

I. IONESCU.

3352. Se adună două fracţii una inversa alteia. In ce caz suma este un număr întreg?

G. TAILER.

3353. Se cer patratele de cinci cifre, aşà ca primele patru, sau ultimele patru, să fie cifre consecutive. Suma tutulor cifrelor este 31.

N. TEODORESCU.

1) Problema propusă cu No. 3332 la pag. 39 din „G. M.", anul curent, fiind identică cu problema No. 3011, propusă la pag. 199, vol. XXVIII şi rezolvată la pag. 474, vol. XXVIII, se înlocueşte cu prezenta.

3354. Să se arate că pentru $n \geqslant 5$, indicatorul lui $n!$ este divizibil cu cel puţin 2^n.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

3355. Fie ABCD un patrulater inscriptibil, A', C' proiecţiile vârfurilor A şi C pe diagonala BD; B', D' proiecţiile vârfurilor B şi D pe diagonala AC. Să se demonstreze că laturile patrulaterului A'B'C'D' sunt paralele cu laturile lui ABCD.

EMIL ŞTEFĂNESCU.

3356. Pe un cerc O se ia un punct fix A şi unul mobil M. Fie AT perpendiculara dusă în A pe coarda AM şi Δ simetrica lui AT faţă de tangenta în M la cercul O. Să se demonstreze că dreapta Δ înfăşoară o cardioidă.

MIHAIL I. FOCŞENEANU.

3357. Fie ABCD un patrat înscris în cercul cu centrul O, iar E şi F mijloacele arcelor AB şi AD. Dreptele BF şi CE se intretaie în M, iar DE şi CF în N. Fie H ortocentrul triunghiului CFE. Să se demonstreze că dreapta MN este egală cu raza cercului O, iar dreptele HE şi HF sunt egale cu laturile octogonului regulat înscris în cerc.

GH. GH. VASILIU.

3358. O sferă de rază dată detaşează din altă sferă ce trece prin centrul ei, o calotă de volum maxim. Să se construiască raza acestei din urmă sfere.

LOCOT.-COL. CH. BUICLIU.

3359. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$x^y = y^x + 1.$$

N. GEORGESCU-ROEGEN.

3360. Să se calculeze expresiunile:

$$E_p = (x\,E_{p-1})' \quad , \quad F_p = (x\,F_{p-1})',$$

ştiind că accentul e simbolul derivării şi că $E_0 = \sin x$, $E_1 = (x \sin x)', \ldots$, iar $F_0 = \cos x$, $F_1 = (x \cos x)', \ldots$.

B. IG. BAIDAFF.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aronovici S. (3347); *Bârsănescu V.* (3248, 301); *Blumen M.* (2929, 3282, 342); *Botea E. G.* (3282, 93, 301); *Botea N.* (3269, 322); *Braester O.* (3286, 336); *Brezuica I. I. C.* (3321, R); *Călin M. Gh.* (3237, 82, 86, 95, 322, R); *Coșniță V.* (3338); *David I.* (3218, 82); *Diaconescu T.* (3338); *Dinescu Fl.* (3301); *Dragomir V. S.* (P); *Dumitriu G. N.* (3299); *Foca Ilie* (3288, E); *Gataianțu B.* (3202, 347); *Georgescu Răducanu* (3336); *Grigorescu Mareș* (3299); *Grünstein E.* (3283); *Hulubei Telemac* (3167, 78, 248, 89, 301, 17); *Ioachim Gr.* (3237); *Ionescu-Bujor Th. A.* (3233, 306, 36, 37, 47); *Kahane A.* (3347); *Manolescu I. N.* (3248, 88, 306, 47, P); *Mareș Grigore* (3286, 97, 336); *Mihăilescu N.* (3233, 338); *Miu I.* (3122, 237, 324); *Munteanu Gh.* (3301, 36); *Nestor G. D.* (3233, 48, 306, 36); *Nicolaescu I.* (3326); *Nicolau C. H.* (A); *Nicolescu V. Gh.* (3306, 27); *Novacu V.* (3233, 37); *Popa I.* (3259); *Popea O.* (3259, N); *Popescu Const.* (R); *Popescu N. Corneliu* (3336); *Popovici Aurel* (3218, 56, 89, 99, 301, 06); *Popovici Const.* (3302, 22, 38, N, P); *Popoviciu Th. Ion* (3291, 97, 306, 27, 36, 39, 42, 45, 47); *Schächter O.* (3324, 32, 38); *Spathy R.* (3299, 321, 36); *Stoicescu I. Th.* (3167, 289, 301, 39); *Tăraș Gh.* (3289, 301); *Tăraș V.* (3315, 36); *Teodorescu N.* (3282, 83, 99, 322, 24); *Vasiliu Ion* (3256).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2585, 3113, 79, 252, 87, 311, 32, 33, 40 și 44 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Dlui Asociatiunea pt. Cultura și Literatura Poporului Român

Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1925.

SUMARUL

1. Aritmetica şi Algebra lui Gh. Manu . *Locot.-Col. Gh. Buicliu.*
2. Aşezarea în ordine naturală a rădăcinilor a două ecuaţii de gradul al treilea . . . . . *Th. Angheluţă.*
3. Note Matematice: 14—18.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografii.
6. Cereri: 132, 133.
7. Probleme rezolvate: 1979, 3007, 3062, 3153, 3192, 3272, 3273, 3293, 3294, 3295, 3336.
8. Exerciţii: 18—20.
9. Probleme propuse: 3361—3370.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1925

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică“ având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 94, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 76, 78, 79, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 25, 30, 33, 35, 40, 41, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 56, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69 şi 70.

ARITMETICA ŞI ALGEBRA LUI GH. MANU.

In *Gazeta Matematică*, Vol. XXIII, d-l I. Ionescu a publicat o serie de articole în care arătă relaţiunile dintre matematici şi ştiinţele militare. Ultimul articol, publicat la pagina 151 a volumului citat, se încheie cu constatarea că istoricul făcut de d-sa are mai multe lipsuri între care şi lipsa unui capitol naţional, în care să se arate cu ce au contribuit militarii români la progresul ştiinţelor matematice.

Am prilejul să pun o pietricică la începutul coloanei acestui capitol vorbind despre o lucrare de matematici elementare a generalului de divizie Gheorghe Manu, fost de mai multe ori ministru, fost preşedinte al consiliului de miniştri.

Generalul Gh. Manu, mort la 16 Mai 1911, a fost ofiţer de artilerie în activitate pânăla 11 Martie 1883, când demisionă cu gradul de general. El şi-a făcut studiile la şcoalele de cadeţi din Potsdam şi Berlin şi a servit în armata prusiană pânăla 1858, unde a avut gradul de Sub-Locotenent. A venit în ţară şi-a fost primit în artileria română la 10 Septembrie 1858 cu gradul de căpitan. In acest grad a fost şi profesor la şcoala militară din Bucureşti.

Pe când erà maior, a scris o carte pe care a tipărit-o la Paris şi al cărei titlu complet este «**Arithmetica şi Algebra** cullésă «şi prelucrată pentru şcólele publice din România de George-Ión «Manu, maior în oştirea Română».

Cartea este tipărită în 1863 la Paris la «Imprimeriea lui de «Soye şi Bouchet, Piéţa Pantheonului, 2».

Volumul pe care mi l-am procurat prin amabilitatea d-lui M. Stamatiu, poartă în josul coperţii însemnarea III, sub care este scris cu cifre mari numărul 65. Probabil că acesta este semnul vre-unei biblioteci căreia a aparţinut cartea. Exemplarul este de altfel foarte curat şi în bună stare, ceeace înseamnă că nu a prea a fost citit nici în şcolile publice, nici in biblioteca în care a fost căutat.

Cartea este dedicată

«Scumpului meu părinte
«Vornicului Ión Manu
«Drept semn de recunoşciinţă şi dragoste fiiéscă».

Este semnul bun al timpurilor în care copiii îşi îndreptau recunoştinţa şi spre părinţi, iar nu numai spre puternicii zilei.

Motivul publicărei cărţii îl arată autorul în «Prefaciă», unde spune «Nu cred de trebuinţă a justifică publicarea acestui curs. «Lipsa cărţilor didactice în limba română este cunoscută».

Pentru întocmirea cursului s'a servit de autori germani şi francezi. Autorul însuşi spune că «Părţile lui cele d'ântăiu sunt trase «din cartea germană a lui HALLERSTEIN şi prelucrate româneşce «cu ajutorul cărţilor române ale D-lor PAVEL şi POENARU şi a cur- «sului de Algebră franceză a lui SONNET. Iar părţile din urmă sunt «prelucrate chiar de subsemnatul după notiţiile ce a adunat şi cu «ajutorul autorilor germani şi francezi OHM, AŞENBORN, GARNIER şi alţii».

Din examinarea cursului nu se poate precizà care anume părţi sunt prelucrate de autor şi care sunt «trase» din HALLERSTEIN. El explică «Subsemnatul a preferat a nu trata Arithmetica şi Algebra «în parte, ci a le combina împreună, cum crede că s'ar puté preda «în şcolile publice spre a evita perderea de vreme şi repetarea ce «se aduce terminând ântêiu tótă Arithmetica şi apoi începând Algebra».

Autorul îşi justifică şi ortografia «cu care s'a scris acest curs, «ea cuprinde neapărat âncă multe greşeli neevitabile, când este o «limbă în momentul renaşcerii séle, dar ea'mi s'a părut cea mai «simplă şi raţională».

Cursul are 541 pagini, începe cu o **Prefaciă**, o **Introducere generală** de 2 pagini şi o **Introducere** de XVI pagini şi cuprinde două cărţi:

«I. Sciinţa numerilor şi algebra».

«II. Sciinţa mărimilor».

Fie-care carte este împărţită în părţi şi fie-care parte în paragrafe. Astfel, întregul curs cuprinde 2 cărţi, XIV părţi, 46 capitole şi 413 paragrafe.

Fie-care parte se termină cu o «*Tablă de formulele din Partea...*», şi cu câte-và exerciţii cărora li se dă rezultatul şi câte o dată chiar indicaţiuni de rezolvare.

Nomenclatura nu este mult mai apropiată de cea de azi de cât nomenclatura întrebuinţată de ION ELIADE RĂDULESCU, care scosese aritmetică cu 30 de ani înainte. La definiţiunea sau fixarea diferitelor semne matematice, citează şi numele aceluia căruia i se atribue a fi întrebuinţat pentru întâia-oară acele semne.

In cele ce urmează, voiu înşirà părţile care mi s'au părut mai

interesante, din punctul de vedere al nomenclaturei şi expunerei, pentru a se vedeà cam pe ce treaptă a evoluţiei limbajului matematic stă cartea lui GEORGE IÓN MANU de la 1863. Evident că MANU având alte ocupaţiuni de cât matematicele, nu se poate aşteptà de la el şi de la cartea lui multă influenţă asupra dezvoltărei acestor ştiinţe. Totuşi cartea lui a fost citată în şcolile publice şi nu se poate să nu fi lăsat nicio urmă într'o epocă în care cărţile tipărite în româneşte se puteau numărà.

Chiar în introducere, face un scurt rezumat al definiţiunilor diferitelor operaţiuni, dă unele nomenclaturi şi fixează valoarea semnelor. Este interesant că «Semne (ciffre séu littere) care însem-«nézà o cătime, séu o împreunare de semne (littere şi ciffre îm-«preunate între dînsele prin semne algebrice) se numescu *expre-«ssiuni algebrice**» şi ca să arétâm că duoă expressiuni sunt deo-«potrivă ne slujim cu semnul *deopotrivă* =, care s'a întrodus de «RECORD pe la 1552, şi numim o împreunare, precum este $a=b$, «*o ecuaţiune, o ecualitate* séu *o potrivire*, iar expressiunile *părţile* «séu *membrele* ecuaţiuni». «Semnele > şi < s'au întrebuinţat «ântêiu de HARRIOT»

In **Partea I** se tratează în 3 capitole despre adunare şi scădere. Aici găsim că „Semnul + s'a întrebuinţat pentru prima óră de „către CRISTOF RUDOLF la 1522". Numerele care se adună se numesc „*numere additive*", iar la scădere întrebuinţează termenii „*rest, remas séu ecces*", precum şi „*descădutul* şi *descosul*". Semnul — îl atribue tot lui CRISTOF RUDOLF.

Câtimea pozitivă o defineşte „o summă în care cel d'ântâiu „număr additivu este o nullă, p. e. $0+a$ se numeşce o *cătime „positivă*", pe când «$0-a$ se numeşce o *cătime negativă*».

Partea II tratează despre înmulţire şi împărţire. Aici produsului i se zice „*produs* séu *product*", iar „semnul × s'a în-„trebuinţat pentru prima óră de OUGTHRED (născutu la 1573)". Recomandă că într-un produs factorii să se scrie „după rînduiala „*lexicografică*" ; p. e. *adcnpl* se scrie mai bine *acdlnp*", iar „De „are un product un factor numericu, atunci numim acest factor: „*confactor* séu *coefficient*".

La împărţire numeşte «cătime reală» câtul între două numere care se împart exact unul prin altul. Scoaterea în factor comun o

*) Citaţiunile cu caractere cursive sunt cursive şi la GH. MANU.

numeşte «*extragerea împărţitorului communu*». O fracţie se numeşte «*frângere*» sau «*număr frângerosu*». In fine, un cât al cărui deîmpărţit este 1 se numeşte «*inversul împărţitorului* séu *valórea «reciprocă a împărţitorului*», iar o fracţie ai cărei termeni sunt fracţii se numeşte «*fracţie fracţionară*, séu o *frângere frângerósă*». Nedeterminarea $\frac{0}{0}$ se zice «*symbol de nehotărîre*». Când împărţirea se face exact zice «că împărţirea s'a *realisat*». Fracţiunea subunitară este o «*frângere curată*».

In **partea IV** tratează despre «*Regulile înnălţări la puteri*». Până la această parte a făcut numai aritmetică în afară de definiţiunea numerelor negative. De aici înainte începe să introducă şi noţiuni de algebră. După ce defineşte puterile şi enunţă câte-vă din proprietăţile puterilor cu numere aritmetice şi «lexicografice», zice în § 75 «In regulile 1 şi 2 dela § precedent am arétat cum înnălţâm «o summă séu o differenţă la puterea unei cătimi. Prin urmare dar «pentru puterea $(a \pm b)^n$ n'avem âncă o formulă generală, şi ar fi «o fórte mare greşélă de am vré se scrim $(a \pm b)^n = a^n \pm b^n$. «Formula pentru acest cas este cunoscută subt numele de *formula «binomului* şi se va aréta la Partea X, § 283. Deocamdată dar, «ca se aflâm valórea expressiuni $(a \pm b)^n$ trebue se sovârşim în«mulţirea indicată. Aşà este p. e.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

căci

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \text{şi} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

. . . . . .

Efectuiază la fel produsele $(a \pm b)^3$ şi $(a+b)(a-b)$ şi începe la § 76 cu: «Numim un polinom *rînduitu dupe puterile «descrescênde ale unei littere;* p. e. *ale litteri* x, când va avé «forma:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots mx^2 + nx + p$$

«şi rînduitu dupe puterile crescênde ale unei littere, când va avé «forma

$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots mx^{n-2} + nx^{n-1} + px^n .$$

«Littera ce luom ca ântêitóre se zice *littera principală*».

E de observat că nu face deosebire între coeficientul lui x^n şi gradul polinomului.

(Va urmà). LOCOT.-COL. GH. BUICLIU.

AȘEZAREA IN ORDINE NATURALĂ A RĂDĂCINILOR A DOUĂ ECUAȚII DE GRADUL AL TREILEA [1]).

Intr'un articol ([1]) m'am ocupat cu aşezarea rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al doilea şi alta de gradul al treilea. In ceeace urmează, tratez aceeaşi chestiune pentru două ecuaţii de gradul al treilea.

Se va vedeà din cele ce urmează că se desemnează o metodă generală. Pentru aceasta, am crezut nimerit să tratez acest caz.

Fiind date ecuaţiile de gradul al treilea sub formă canonică:

$$(1) \qquad f(x) = x^3 + px + q = 0$$
$$(2) \qquad \varphi(x) = x^3 + mx + n = 0,$$

coeficienţii p, q, m, n fiind reali, *îmi propun să dau criteriile după care putem decide ordinea mărimei rădăcinilor ecuaţiilor (1) şi (2), fără a fi nevoe să le rezolvăm.*

Fie α, β, γ rădăcinile ecuaţiei (1) şi α', β', γ' rădăcinile ecuaţii (2). In cazul când α, β, γ vor fi reale, putem presupune că am ales notaţiile ca să avem $\alpha < \beta < \gamma$.

Acelaş lucru pentru rădăcinile α', β', γ'.

Vom considerà şi aici eliminantul celor două ecuaţii (1) şi (2).

Eliminantul este expresiunea

$$E = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma) = (\alpha-\alpha')(\alpha-\beta')(\alpha-\gamma') \times (\beta-\alpha')(\beta-\beta')(\beta-\gamma') \times (\gamma-\alpha')(\gamma-\beta')(\gamma-\gamma'),$$

sau putem considerà expresiunea $E' = f(\alpha')f(\beta')f(\gamma')$ şi se vede că avem $E = -E'$.

Graţie faptului că eliminantul este simetric şi în raport cu α, β, γ şi în raport cu α', β', γ', el se poate calculà în funcţie raţională de coeficienţii celor două ecuaţii. Pentru a calculà pe E nu e nevoe de a procedà direct, ci un mic raţionament ne poate dispensà de un calcul puţin cam lung. Pentruca ecuaţiile (1) şi (2) să aibă o rădăcină comună, trebue şi e de ajuns ca eliminantul să fie nul. Pe de altă parte, dacă cele două ecuaţii au o rădăcină comună, acea rădăcină este

$$x = (n-q)/(p-m).$$

[1]) Acest articol este în strânsă legătură cu articolul ce am publicat în „G. M.“, noemvrie 1924.

Deci, ca cele două ecuații să aibă o rădăcină comună, trebue și e de ajuns să avem

$$(3) \qquad (n-q)^3 + m(n-q)(p-m)^2 + n(p-m)^3 = 0.$$

Deci E și cu expresiunea (3), nu pot diferì decât prin un factor constant, independent de coeficienții celor două ecuații.

Dar am avut

$$E = (\alpha^3 + m\alpha + n)(\beta^3 + m\beta + n)(\gamma^3 + m\gamma + n).$$

Dacă facem $m = n = 0$,

obținem

$$E = \alpha^3\beta^3\gamma^3 = -q^3$$

și în acelaș timp (3) se reduce la $-q^3 = 0$.

Deci avem

$$E = (n-q)^3 + m(n-q)(p-m)^2 + n(p-m)^3.$$

Această expresiune joacă un rol fundamental.

a. Să presupunem întâi cazul cel mai simplu, când cele două ecuații au numai câte o singură rădăcină reală, cu alte cuvinte presupunem că avem:

$$27q^2 + 4p^3 > 0,$$
$$27n^2 + 4m^3 > 0.$$

Presupunem că rădăcinile reale sunt γ și γ'.

Cum α și β sunt imaginare conjugate, rezultă că avem

$$\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) > 0.$$

Prin urmare, dacă presupunem

I. $E > 0$, rezultă că avem $\varphi(\gamma) > 0$

și deci cele două rădăcini reale sunt dispuse astfel $\gamma' \gamma$.

Dacă însă avem

II. $E < 0$, rezultă $\varphi(\gamma) < 0$ și deci vom aveà $\gamma \gamma'$.

b. Să considerăm acum cazul când numai una din ecuații are toate rădăcinile reale.

Să presupunem ca α, β sunt imaginare, iar γ, α', β', γ' sunt reale.

Avem

$$27q^2 + 4p^3 > 0,$$
$$27m^2 + 4n^3 < 0.$$

Să presupunem că avem

I. $E > 0$, rezultă $\varphi(\gamma) > 0$, prin urmare rădăcinile pot fi dispuse în următoarele două feluri

$$\alpha' \gamma \beta' \gamma' \quad ; \quad \alpha' \beta' \gamma' \gamma.$$

Pentru a puteà să le distingem, fie $-a'$, a', rădăcinile ecuației derivate

$$\varphi'(x) = 0. \tag{4}$$

Rădăcina γ poate fi așezată față de aceste două rădăcini în următoarele feluri

$$\gamma \ -a' \ a' \quad ; \quad -a' \ \gamma \ a' \quad ; \quad -a' \ a' \ \gamma.$$

Dar acum am ajuns la așezarea în ordinea mărimei a rădăcinilor ecuației de gradul al doilea

$$\varphi'(x) = 0$$

și a ecuației de gradul al treilea (1). Această problemă am tratat-o în articolul [1] amintit mai sus și ne găsim tocmai în cazul a din acel articol.

Dacă avem

$$\gamma \ -a' \ a',$$

rădăcinile γ, α', β', γ' pot fi dispuse astfel:

$$\gamma \ \alpha' \ \beta' \ \gamma'$$

sau

$$\alpha' \ \gamma \ \beta' \ \gamma'.$$

Prima așezare este imposibilă, căci ar urmà $\varphi(\gamma) < 0$, contrar cazului în care ne găsim.

Să presupunem că avem

$$-a' \ \gamma \ a',$$

urmează că putem aveà

$$\alpha' \ \gamma \ \beta' \ \gamma'$$

$$\alpha' \ \beta' \ \gamma \ \gamma'$$

și din acelaș motiv ca mai sus a doua așezare nu este posibilă.

Dacă avem $-a' \ a' \ \gamma,$

atunci vom aveà $\alpha' \ \beta' \ \gamma \ \gamma'$

$$\alpha' \ \beta' \ \gamma' \ \gamma$$

și se vede că nu putem aveà decât așezarea a doua.

In rezumat, în cazul b. I. vom aveà așezarea

$$\alpha' \ \gamma \ \beta' \ \gamma',$$

dacă pentru rădăcinile lui $\varphi'(x)$ şi pentru rădăcina reală γ a lui $f(x)$ vom aveà aşezarea

$$\gamma \; -a' \; a'$$

sau $$-a' \; \gamma \; a'$$

Vom aveà $$\alpha' \; \beta' \; \gamma' \; \gamma,$$

dacă vom aveà $$-a' \; a' \; \gamma.$$

b. II. Fiind tot în cazul *b*, să presupunem acuma

$$E < 0$$

$$\therefore \quad \varphi(\gamma) < 0.$$

Urmează că rădăcinile pot fi dispuse astfel

$$\gamma \; \alpha' \; \beta' \; \gamma' \; ; \; \alpha' \; \beta' \; \gamma \; \gamma'.$$

Ca mai sus vom considerà pe γ faţă de $-a', a'$ rădăcinile ecuaţiei (4) şi avem următorul rezultat:

La aşezarea $\gamma \; -a' \; a'$,

corespunde aşezarea $\gamma \; \alpha' \; \beta' \; \gamma'$,

iar la aşezarea $-a' \; \gamma \; a'$,

sau la aşezarea $-a' \; a' \; \gamma$,

corespunde aşezarea $\alpha' \; \beta' \; \gamma \; \gamma'$.

c. Să presupunem acuma că ecuaţiile (1) şi (2) au amândouă rădăcinile reale. Vom despărţi şi acest caz în două după semnul lui E.

I. Să presupunem dar că avem

$$E > 0.$$

Putem aveà următoarele succesiuni de semne pentru factorii lui E:

1. $\varphi(\alpha) > 0 \quad \varphi(\beta) > 0 \quad \varphi(\gamma) > 0.$
2. $\varphi(\alpha) < 0 \quad \varphi(\beta) < 0 \quad \varphi(\gamma) > 0.$
3. $\varphi(\alpha) < 0 \quad \varphi(\beta) > 0 \quad \varphi(\gamma) < 0.$
4. $\varphi(\alpha) > 0 \quad \varphi(\beta) < 0 \quad \varphi(\gamma) < 0.$

La fiecare din aceste succesiuni de semne, corespund aşezările notate cu acelaş număr:

1. $\alpha' \; \alpha \; \beta \; \gamma \; \beta' \; \gamma' \; ; \; \alpha' \; \alpha \; \beta \; \beta' \; \gamma' \; \gamma \; ; \; \alpha' \; \alpha \; \beta' \; \gamma' \; \beta \; \gamma \; ; \; \alpha' \; \beta' \; \gamma' \; \alpha \; \beta \; \gamma.$
2. $\alpha \; \beta \; \alpha' \; \gamma \; \beta' \; \gamma' \; ; \; \alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma \; ; \; \alpha' \; \beta' \; \alpha \; \beta \; \gamma' \; \gamma \; ; \; \alpha \; \beta \; \alpha' \; \beta' \; \gamma' \; \gamma.$
3. $\alpha \; \alpha' \; \beta \; \beta' \; \gamma \; \gamma'.$
4. $\alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma'.$

Ţinând seamă că avem:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 0,$$

urmează că aşezările următoare

$$\alpha' \alpha \beta' \gamma' \beta \gamma \; ; \; \alpha' \beta' \gamma' \alpha \beta \gamma \; ; \; \alpha \beta \alpha' \gamma \beta' \gamma' \; ;$$
$$\alpha' \beta' \alpha \beta \gamma' \gamma \; ; \; \alpha \alpha' \beta \beta' \gamma \gamma'$$

sunt imposibile.

Deci în cazul c. I, avem de decis între următoarele aşezări:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha' \alpha \beta \gamma \beta' \gamma' \; ; \; \alpha' \alpha \beta \beta' \gamma' \gamma \; ; \; \alpha \alpha' \beta' \beta \gamma' \gamma \; ; \\ \alpha \beta \alpha' \beta' \gamma' \gamma \; ; \; \alpha' \alpha \beta' \beta \gamma \gamma'. \end{cases}$$

Ne rămâne deci a distinge între aceste cinci aşezări. Calea urmată în cazul b. o vom utiliză şi aici, completând-o ca şi acolo. Va fi simplu de dat criterii, afară de câtevà cazuri, în care graţie unui mic artificiu, vom puteà decide şi pentru acestea. Vom considerà şi aici pe deoparte rădăcinile α, β, γ şi cu $-a', a'$ şi pe dealtă parte pe α', β', γ' cu $-a, a$ unde $-a', a'$ sunt rădăcinile ecuaţiei derivate (4), iar $-a, a$ sunt rădăcinile ecuaţiei derivate

$$(5) \qquad f'(x) = 0.$$

Pentru aceasta, vom formà pe deoparte eliminantul e dintre $f(x)$ şi $\varphi'(x)$, adică expresia

$$e = f(-a')f(a'),$$

iar pe de altă parte, eliminantul între $\varphi(x)$ şi $f'(x)$, adică expresia

$$e_1 = \varphi(-a)\varphi(a).$$

Dacă am aveà $\qquad e > 0,$

atunci între α, β, γ şi $-a', a'$ am aveà următoarele aşezări posibile:

$$(7) \quad -a' \alpha \beta a' \gamma \; ; \; \alpha \beta -a' a' \gamma \; ;$$
$$\alpha -a' a' \beta \gamma \; ; \; \alpha -a' \beta \gamma a'.$$

Pentru distingerea acestor aşezări am dat criterii în articolul citat şi ne găsim în cazul *b* notat acolo.

(Va urmà). TH. ANGHELUŢĂ.

NOTE MATEMATICE

14. *Alte zece Algebre diferite.* (Vezi Nota 25, pag. 170. Anul XXX).

61. **Carteziană.** A se vedeà *P. Boutroux.* L'idéal scientifique des mathématiciens. Paris. 1920. Pag. 92.

62. **Directivă.** *J. Neuberg.* Vezi *Mathesis* I. pag. 123.

63. **Greacă.** *Nesselmann.* Algebra der Griechen. 1892.

64. **Imaginară.** Ca la No. 61. pag. 139.

65. **Infinitului.** Idem. pag. 124.

66. **Istorică.** *John Wallis.* Treatise of algebra both historical and practical. 1685.

67. **Multiplă.** Vezi *Bulletin of the American mathematical Society.* Vol. XXX. pag. 289.

68. **Operaţiunilor.** Ca la No. 61. pag. 142.

69. **Retoricei.** *) Vezi C. WARGNY. Historia de las matematicas. Pag. 73.

70. **Sincopată.** *) Idem. Pag. 72.

(Va urmà). I. IONESCU.

15. *Asupra indicatorilor.* In «*Gazeta Matematică*», Anul XXIX pagina 17, se afirmă că dacă $I(n) = I(n+1)$, adică dacă două numere consecutive au acelaşi indicator, atunci cel mai mare dintre ele este o putere a lui 2. Această condiţiune nu este necesară, căci de exemplu 104 şi 105 au indicatorul 48, numerele 164 şi 165 au indicatorul 80, numerele 194 şi 195 au indicatorul 6, etc., fără ca cel mai mare dintre cele două numere să fie o putere a lui 2. Prin urmare, consecinţele care se trag din acea afirmaţiune, precum şi cea din nota No. 78 din acelaşi an, nu sunt riguroase. Chestiunea dar de a se şti dacă *trei numere consecutive pot aveà acelaşi indicator*, rămâne deschisă.

I. IONESCU.

16. In G. M. XXI — 138 se dă o nouă demonstraţie a teoremei ortopolului. Teorema *a* într'adevăr e foarte elegantă şi simplă; cât despre al doilea punct se observă imediat că e eronat. Enunţul este:

*) Comunicate de D-l TR. DORDEA.

«Fie α, β, γ punctele unde dreapta D întâlneşte laturile BC, CA, AB ale triunghiului. Centrul radical al cercurilor descrise pe $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ca diametre, este tot ω, ortopolul dreptei D».

Insă se vede că $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sunt diagonalele patrulaterului complet $ABC\alpha\beta\gamma$. Atunci centrele celor trei cercuri sunt pe o aceiaşi dreaptă (dreapta lui GAUSS), iar centrul radical e la infinit. De altfel cele trei cercuri au o aceiaşi axă radicală.

(Nouvelles Annales de Math. 1862. p. 17).

ION C. VASILIU.
Clasa VIII particulară.

17. *Asupra unor exerciţii.*

1. *In exerciţiul No. 22* (XXX), se cere să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2xz + 2yz.$$

In cele ce urmează voiu indică o soluţie mai simplă, unde z poate lua valori dela $-\infty$ la $+\infty$.

Observăm că ecuaţia se mai poate scrie succesiv:

$$(x-y)^2 + z^2 = 2z\,(x+y)$$

$$\therefore \quad (x-y)^2 + z^2 = 2z\,(x-y) + 4zy$$

$$\therefore \quad [(x-y)-z]^2 = 4zy$$

$$\therefore \quad x - y - z = \pm 2\sqrt{zy}.$$

Din ultima ecuaţie se vede că trebue să avem: $y = \alpha^2 . z$, ceeace ne dă:

$$x - \alpha^2 z - z = \pm 2\alpha z,$$

de unde vedem iar că $x = \beta z$, astfel că ne rămâne:

$$\beta - \alpha^2 - 1 = \pm 2\alpha$$

$$\therefore \quad \beta = (\alpha \pm 1)^2,$$

deci soluţiunile sunt:

$$x = (\alpha \pm 1)^2 z \quad ; \quad y = \alpha^2 z \quad \text{şi} \quad z = z.$$

2. *Exerciţiul No. 59* (XXX) cere patratele de trei cifre, cari rămân tot patrate intervertindu-se ultimele două cifre, şi autorul dă pe cale algebrică soluţiile: 169 şi 196.

Dacă s'ar fi studiat mai serios chestiunea şi mai ales pe cale aritmetică, ţinându-se seamă de ultimele două cifre cu care se termină un patrat, se găseau şi soluţiile: 100; 400; 900; 144.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

18. *Maximul expresiunii* $\cos A \cdot \cos B \cos C$, *în care* A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu.* S'a aflat prin diferite căi că maximul acestei expresiuni are loc când triunghiul este echilateral. Iată o altă metodă simplă.

Maximul expresiei considerate va avea loc o dată cu maximul îndoitului cubului ei, adică odată cu al expresiei

$$E = 2\cos^3 A \cos^3 B \cos^3 C.$$

Această expresie se poate scrie sub forma:

$$E = \cos^2 A . \cos^2 B . \cos^2 C . 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Insă suma factorilor acestui produs e constantă, căci se ştie că avem

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$$

Deci maximul lui E va avea loc când

$$\cos^2 A = \cos^2 B = \cos^2 C = 2 \cos A \cos B \cos C,$$

relaţiuni din care deducem

$$A = B = C = 60^0,$$

singurile valori care fac egali toţi factorii.

CONST. C. POPOVICI.
Elev Cl. VIII, Liceul Internat, Iaşi.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

FACULTATEA DE ŞTIINŢE.

Seziunea iunie, 1925.

TEORIA FUNCŢIUNILOR

Proba teoretică.

1°. Se consideră corespondenţa

$$(1) \qquad 2z = z^n + \frac{1}{z^n},$$

unde n e un număr întreg şi pozitiv. In planul variabilei z se ia un domeniu (d), limitat de dreptele OA şi OB şi arcul de cerc AB.

$$OA = OB = 1, \qquad \sphericalangle AOB = \Pi/n.$$

Se cere să se determine în regiunea (D) din planul variabilei z, corespunzătoare prin relaţia (1) domeniului (d).

Ce corespunde în domeniul (D) dreptelor din (d) trecând prin O.

Să se demonstreze că corespondenţa între (D) şi (d) e biunivocă.

2°. Funcţiunea $f(z)$ fiind olomorfă în interiorul cercului (C) cu centrul în O şi de rază $R = 1$, să se determine valoarea integralei

$$\int_C \frac{f(z)dz}{(e^z - 1)^2}.$$

(15 iunie, ora 8 dim.).

Proba practică.

Să se calculeze, cu ajutorul teoriei reziduurilor, integrala definită

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sin t + a)(\cos t + a)} \qquad (a > 1).$$

(15 iunie, ora 3 p. m.).

MECANICA RAŢIONALĂ.

Partea I.

Proba teoretică.

1°. Se dă o elipsă, şi pe ea un punct mobil M, care se învârteşte în jurul vârfului A' după legea ariilor.

Se cere: viteza, acceleraţia şi poziţia mobilului în funcţiune de timp.

2°. Se consideră într'un plan vertical două axe rectangulare, Oy fiind verticală. Un punct material de massă m pe lângă greutatea lui mai este supus unei forţe proporţionale cu distanţa dela punct la axa Ox.

Se cere: funcţia de forţă; liniile de nivel; liniile de forţă; travaliul celor două forţe în deplasarea mobilului între A(0,1) şi B(4,0), presupunând unităţile în sistemul C. G. S., $m = 2$, $\omega = \sqrt{2}$ şi $g = 980$.

Să se determine mişcarea mobilului aşezat la momentul iniţial într'un punct dat al axei Ox, cu o viteză paralelă cu Oy.

(7 iunie, ora 8 dim.).

Partea II.

Proba teoretică.

O placă omogenă şi grea poate oscilă în jurul uneia din muchiile sale orizontale. Rezistenţa aerului asupra fiecărui element de suprafaţă este proporţională cu viteza şi dirijată în sens invers acelei viteze.

Să se scrie ecuaţia de mişcare a plăcii şi să se studieze mişcarea în cazul când deviaţia plăcii dela poziţia verticală este foarte mică.

(21 Iunie, ora 8 dim.).

Proba practică.

Un cilindru de revoluţie greu şi omogen se învârteşte în jurul uneia din generatoarele sale presupusă verticală; cilindrul e fixat în O şi A. Ce viteză iniţială trebue să dăm cilindrului, pentru ca punctul de jos al axei să nu sufere nicio reacţiune?

(21 iunie, ora 3 p. m.)

ASTRONOMIA.

Proba teoretică.

Să se studieze în mişcarea parabolică, variaţia diferenţei $v - \zeta$ dintre anomalia adevărată v' şi cantitatea

$$\zeta = \frac{k}{\sqrt{2}\, 9^{3/2}} (t - T). \qquad (1)$$

Se va rezuma discuţia într'un tablou în care se vor înscrie valorile principale ale cantităţilor

$$t - T,\ \zeta,\ v,\ \frac{d(v-\zeta)}{dt},\ v - \zeta.$$

(10 iunie, ora 8 dim.).

Proba practică.

Cu ajutorul datelor din C.*d*.T., să se calculeze viteza lineară de pe paralelul de latitudine geografică 48° de pe elipsoidul terestru, luându-se ca unitate de timp, secunda de timp mijlociu.

(10 iunie, ora 3 p. m.).

CONCURSUL PENTRU ADMITEREA ÎN ŞCOALA MILITARĂ DE ARTILERIE.

Comisia dela Iaşi, 10 August 1925.

ALGEBRĂ.

Se dă ecuaţia:

1) $$x^2 - px + q = 0$$

şi se cere să se formeze ecuţia ale cărei rădăcini sunt valorile pe care le ia expresia

$$\frac{x-2}{2x-1},$$

când se înlocuieşte în ea x succesiv prin rădăcinile ecuaţiei (1).

In ecuaţia astfel formată se face

$$2q = (m-1)\,p - 36$$

şi se cere valoarea lui m pentru ca această ecuaţie să aibă rădăcinile egale între ele.

GEOMETRIE.

Se dă un triunghiu ABC înscris într'un cerc 0. Bisectoarea unghiului A taie cercul în D. Prin D se duc paralele la laturile AB şi AC, care taie laturile AC şi AB respectiv în M şi N. Se cere:

1) Să se demonstreze că linia MN trece prin punctul 0.

2) Să se arate că triunghiul AMN este isoscel.

3) Dacă se dă lungimea l a lui AM, să se arate că MN va fi egal cu $2\,l \sin \frac{1}{2}A$.

(Timpul acordat 4 ore).

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN BUCUREŞTI.

Examenul de admitere în anul I.

(19 octomvrie, 1925),

GEOMETRIE.

Intr'un trapez ABCD, înscris în cercul O de rază R, laturile paralele BC şi AD sunt respectiv egale cu latura exagonului şi cu latura triunghiului echilateral înscris în acel cerc.

Să se arate :

1°. Că laturile AB şi CD sunt egale cu latura patratului înscris în cerc.

2°. Diagonalele AC şi BD ale trapezului sunt perpendiculare una pe alta.

3°. Baza AD fiind fixă, iar latura BC variind ca poziţie, însă păstrându-şi aceiaşi lungime, trapezul devine un patrulater oarecare.

Se cere locul geometric al punctului de întâlnire a laturilor AB şi CD.

4°. In cazul când patrulaterul este un trapez, se cere expresiunea laturilor şi diagonalelor lui, în funcţiune de raza R.

ALGEBRA.

1. Se dă ecuaţiunea

$$f(x) = x^5 + x^4 + ax^3 + (1-b)cx + bc = 0,$$

în care suma a două rădăcini este egală cu — 1. Să se găsiască ecuaţiunea de condiţiune şi să se descompună membrul întâiu într'un produs de două polinoame, respectiv de gradul 3 şi de gradul 2.

Să se discute rădăcinile pentru diferitele valori ale coeficienţilor b şi c.

2. Să se studieze variaţiunea funcţiunei:

$$y = \frac{1-x}{1+x^2} - 2\operatorname{arc\,tg} x + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + 3L\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-x+1}},$$

când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

3. Să se indice valorile lui x pentru care seria

$$\sum_0^{\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^n,$$

este convergentă.

TRIGONOMETRIE.

Într'un cerc de raza R se prelungeşte o coardă AB cu distanţa BC şi se cere:

1°. Aria segmentului de cerc AMB, când se cunoaşte raza R şi unghiul AOB.

2°. Ştiind că triunghiurile AOB şi BOC sunt echivalente, se cere unghiul BOC.

GEOMETRIE DESCRIPTIVA

Pe pagina a doua a coalei de hârtie distribuită, se trasează linia pământului, la mijloc, paralelă cu laturile lungi ale paginei. Se însemnează punctul O mijloc al liniei pământului.

Prin punctul O trece planul de profil Q'βQ, în care se află o dreaptă VH înclinată la 45° pe planele de proecţie;

V(vv') este urma sa verticală, a cărei cotă este 55 mm., iar H(hh') este urma de orizontală.

Această dreaptă VH este una din laturile triunghiului VHC (punctul C(cc') este dat prin $O\gamma = 40$, luat pe linia pământului, la dreapta punctului O; cota = 60 m.m., depărtare = 50 m.m.). Se cere să se afle adevărata mărime a triunghiului VHC printr'o rabatere, la stânga planului PαP. al acestui triunghiu pe planul orizontal de proecţie. Prin centrul de gravitate G(gg') al acestui triunghiu se duce o perpendiculară pe planul PαP' al triunghiului.

Se cere să se afle unghiul format de această dreaptă cu planul orizontal de proecţie, întrebuinţându-se metoda rotaţiilor.

Toată epura se va execută în creion: datele şi rezultatele în trăsături pline, iar construcţiile în trăsături mixte.

Pe celelalte pagini se va scrie o legendă, explicând metodele adoptate şi mersul construcţiilor.

MECANICA.

1. Ce este iuţeala sau viteza?
Care sunt elementele care definesc complet noţiunea de iuţeală?
Câte feluri de iuţeli sunt?
Care sunt unităţile practice cu care se măsoară iuţeala?
Cum se compun iuţelile?

2. Un aeroplan are o iuţeală de 144 m. pe oră şi trebue să parcurgă un drum dela Vest la Est de 144 km., pe un vânt care suflă dela Nord-Est, cu o iuţeală de 15 m. pe sec. In cât timp se va parcurge distanţa de 144 km. dela Vest la Est şi ce distanţă trebue să ia aeroplanul pentru a parcurge această distanţă în linie dreaptă?

BIBLIOGRAFIE.

Journal de mathématiques élémentaires. Publicat de H. VUIBERT. Anul 50. No. 3 şi No. 4. Noemvrie 1925. Paris.

Foaia Matematică. Anul II. No. 10. Octomvrie 1925. Chişinău. Asupra ecuaţiilor algebrice cu toate rădăcinile reale, de P. SERGESCU.

Foaia matematică. Anul II. No. 11 Noemvrie 1925. Chişinău. Asupra unei identităţi, de TR. DORDEA.

Revista matematică din Timişoara. Anul V. No. 9. Noemvrie 1925. Timişoara. Asupra unor serii, de AL. STOIENESCU.

Curierul matematic. Vol. I. No. 9. Noemvrie 1925. Bucureşti. Generalizarea unor teoreme de geometrie, de N. G. Botea.

CERERI.

132. Cine mi-ar puteà procura Vol. I din *Revista matematică din Timişoara?*

B. V. GATAIANŢU.

133. Se afirmă că în *«Formularul de matematici»* de D-nii Ingineri: V. COMAN şi N. MALLA ar fi erori de tipar la tabelele de puteri şi rădăcini. Poate cinevà arătà asemenea erori?

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

PROBLEME REZOLVATE *)

PROBLEMA 1979. *Să se discute natura rădăcinilor ecuației*

$$3\beta x^4 - 4\alpha\beta x^3 + 6\alpha^2\beta^2 x^2 + \alpha^2\beta^2 - 1 = 0,$$

când α *și* β *iau toate valorile reale.*

P. SERGESCU.

Soluție dată de D-l EMIL ȘTEFĂNESCU (student, București). Se aplică teorema lui ROLLE. Derivata este:

$$12\beta x^3 - 12\alpha\beta x^2 + 12\alpha^2\beta^2 x.$$

Deci rădăcinile ecuației derivate sunt

$$0, \quad x_1 = \tfrac{1}{2}\alpha(1+\sqrt{1-4\beta}), \quad x_2 = \tfrac{1}{2}\alpha(1-\sqrt{1-4\beta}).$$

Șirul lui ROLLE e dat de câtimile:

$$f(0) = \alpha^2\beta^2 - 1$$

$$2f(x_1) = R_1 = (-6\beta^3 + 6\beta^2 - \beta)\alpha^4 + 2\beta^2\alpha^2 - 2 - (1-4\beta)\beta\alpha^4\sqrt{1-4\beta}$$

$$2f(x_2) = R_2 = (-6\beta^3 + 6\beta^2 - \beta)\alpha^4 + 2\beta^2\alpha^2 - 2 + (1-4\beta)\beta\alpha^4\sqrt{1-4\beta}.$$

Observăm că pentru $\beta > \frac{1}{4}$ ecuația derivată are rădăcini imaginare, deci ecuația propusă are cel puțin două rădăcini imaginare.

Pentru cunoașterea semnelor câtimilor din șirul lui ROLLE, trebue să studiem curbele $R_1 = 0$ și $R_2 = 0$.

E evident că ele nu sunt reale decât dacă $\beta < \frac{1}{4}$, și trec prin:

$$\alpha = \pm\sqrt{\sqrt{68} - 2} \qquad \beta = \tfrac{1}{4}.$$

Sunt simetrice, în planul $\alpha O\beta$, față de axa $O\beta$, căci nu conțin decât termeni în α^2 și deci nu se schimbă când înlocuim pe α prin $-\alpha$.

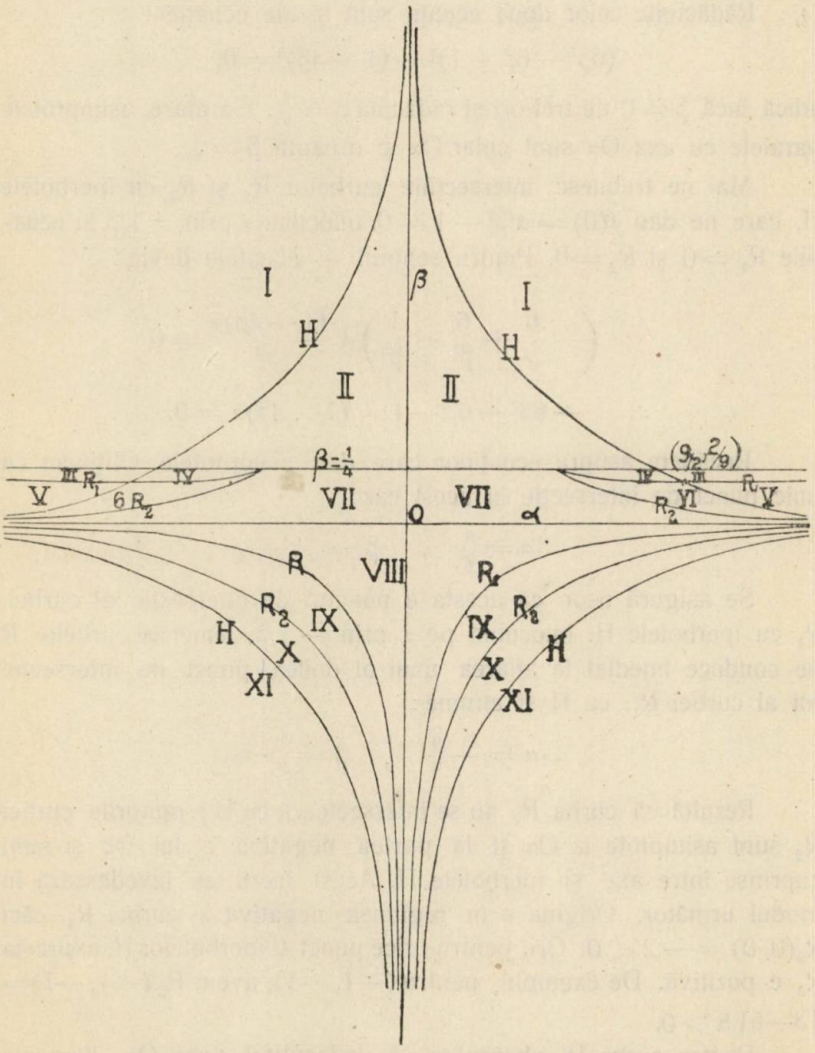
Pentru direcțiile asimptotice, observăm că ansamblul terme-

*) *Rectificare.* In enunțul Problemei 3235, rezolvată în G. M. Vol XXX pag. 428, s'a omis a se adăogă la sfârșitul enunțului cuvintele . . . . *care au laturile paralele cu diagonalele patrulaterului.* Enunțul complet al acestei probleme trebuie deci citit astfel:

Se cere să se afle locul geometric al centrelor de greutate ale triunghiurilor în care se pot descompune paralelogramele înscrise într'un patrulater dat, care au laturile paralele cu diagonalele patrulaterului.

(V. C.)

nilor de gradul cel mai înalt e: $-6\beta^8\alpha^4$, deci numai direcţiile $O\alpha$ şi $O\beta$ sunt asimptotice. Pentru aflarea asimptotelor paralele cu $O\beta$, facem $\beta \to -\infty$, căci pentru $+\infty$, R e imaginar. Ecuaţia se re-



duce, după împărţirea prin β^8, la $-6\alpha^4 = 0$, ceeace arată ca asimptota e însăşi partea negativă a axei $O\beta$.

Pentru asimptotele paralele cu $O\alpha$, împărţim ecuaţia $R = 0$ cu

puterea cea mai mare a lui α pe care o conține, adică α^4 și facem apoi $\alpha \to \infty$. Obținem rădăcina $\beta = 0$ și:

$$-6\beta^2+6\beta-1 \mp (1-4\beta)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Rădăcinile celor două ecuații sunt și ale ecuației:

$$(6\beta^2 - 6\beta + 1)^2 - (1 - 4\beta)^3 = 0,$$

adică încă $\beta = 0$ de trei ori și rădăcina $\beta = \frac{2}{9}$. Ca atare, asimptotele paralele cu axa $O\alpha$ sunt chiar $O\alpha$ și dreapta $\beta = \frac{2}{9}$.

Mai ne trebuesc intersecțiile curbelor R_1 și R_2 cu iperbolele H, care ne dau $f(0) = \alpha^2\beta^2 - 1 = 0$. Inlocuim α prin $\pm 1/\beta$ în ecuațiile $R_1 = 0$ și $R_2 = 0$. Pentru semnul + ecuațiile devin:

$$\left(-\frac{6}{\beta} + \frac{6}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^3}\right) \mp \frac{(1-4\beta)^{\frac{3}{2}}}{\beta^3} = 0$$

$$\therefore \quad -6\beta^2 + 6\beta - 1 \mp (1-4\beta)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Recădem asupra ecuațiilor care dau asimptotele. Obținem ca unic punct de intersecție în acest caz:

$$\alpha = \frac{9}{2} \quad , \quad \beta = \frac{2}{9}.$$

Se asigură ușor că acesta e punctul de intersecție al curbei, R_1 cu iperbolele H. Inlocuind pe α prin $-1/\beta$, simetria curbelor R ne conduce imediat la aflarea unui al doilea punct de intersecție tot al curbei R_1, cu H și anume:

$$\alpha = -\frac{9}{2} \quad , \quad \beta = \frac{2}{9}.$$

Rezultă că curba R_2 nu se intersectează cu H; ramurile curbei R_2 sunt asimptote la $O\alpha$ și la partea negativă a lui $O\beta$ și sunt cuprinse între axe și iperbolele H. Acest lucru se învederează în modul următor. Origina e în regiunea negativă a curbei R_2, căci $R_2(0, 0) = -2 < 0$. Ori, pentru orice punct al iperbolelor H, expresia R_2 e pozitivă. De exemplu, pentru $(-1, -1)$, avem $R_2(-1, -1) = 13 - 5\sqrt{5} > 0$.

Pentru curba R_1 observăm că dedesubtul axei $O\alpha$, lucrurile se petrec în mod analog ca pentru R_2 și chiar se poate preciză poziția ramurelor R_1 și R_2 una față de altă. Ele nu se întâlnesc la distanță finită, căci coordonatele punctelor de intersecție ar trebui

să verifice sistemul $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ şi deci $R_2 - R_1 = 0$. Ori, această din urmă ecuaţie, nu are decât rădăcinile $\alpha = 0$, sau $\beta = 0$, sau $\beta = \frac{1}{4}$, soluţii care conduc sau la punctele dela infinit de pe axe, sau la punctele de pe dreapta $\beta = \frac{1}{4}$, considerate mai sus. Pentru $\beta < 0$, *ramura curbei* R_1 *e cuprinsă între axe şi ramura corespunzătoare a curbei* R_2. In adevăr, curbele neintersectându-se la distanţă finită, e de ajuns să considerăm poziţia respectivă a două puncte de pe cele două ramuri, care au aceiaşi ordonată. Ori, pentru $\beta = -1$ ecuaţiile $R_1 = 0$ şi $R_2 = 0$ au respectiv rădăcinile:

$$\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{27+10\sqrt{5}}}{13+5\sqrt{5}}} \quad \text{şi} \quad \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{27-10\sqrt{5}}}{13-5\sqrt{5}}}$$

şi se verifică imediat că primele sunt mai mici, în modul, decât cele din urmă, ceeace demonstrează proprietatea.

Rezultatele precedente sunt îndestulătoare pentru împărţirea planului $\alpha O\beta$ în regiuni după natura rădăcinilor ecuaţiei propuse $f(x) = 0$. Câtimile $f(0), f(x_1), f(x_2)$ din şirul lui ROLLE, fiind continue, nu-şi schimbă semnul decât prin anulare. Vom construi deci, ţinând seama de cele ce preced, curbele:

$$H = \alpha^2\beta^2 - 1 = 0, \qquad R_1 = 0, \qquad R_2 = 0.$$

In lungul fiecăreia din ele, α şi β sunt astfel că $f(x) = 0$ şi $f'(x) = 0$, au o rădăcină comună, deci ecuaţia propusă are o rădăcină dublă. Aceste curbe împart planul în mai multe regiuni, după cum sunt indicate în figura alăturată.

In regiunile I şi II avem $\beta > \frac{1}{4}$, derivata are rădăcini imaginare; şirul lui ROLLE se reduce la:

$$f(-\infty), \quad f(0), \quad f(+\infty) \qquad \therefore \quad +\infty \ , \ \alpha^2\beta^2 - 1 \ , \ +\infty.$$

Ca atare, în regiunile I, unde $\alpha^2\beta^2 - 1 > 0$ ecuaţia are *toate rădăcinile imaginare.*

In regiunea II avem $\alpha^2\beta^2 - 1 < 0$, şirul lui ROLLE prezintă două variaţii de semn; deci avem *două rădăcini reale.*

In regiunile III, IV, V, VI, 6 şi VII, β e cuprins între 0 şi $\frac{1}{4}$, deci x_1 şi x_2 sunt de acelaş semn. Atunci, şirul lui ROLLE este:

1. *Când* $\alpha > 0$

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f(x_2)$	$f(x_1)$	$f(+\infty)$
+	H	R_2	R_1	+

2. *Când* $\alpha < 0$

$$\begin{array}{ccccc} f(-\infty) & f(x_2) & f(x_1) & f(0) & f(+\infty) \\ + & R_2 & R_1 & H & + \end{array}$$

In regiunile III: $H > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, şirul lui ROLLE prezintă numai permanenţe, deci *nicio rădăcină reală.*

In regiunile IV: $H < 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$; succesiunea de semne e $+ - + + +$ sau $+ + + - +$, după cum α e pozitiv sau negativ. In orice caz, ecuaţia are *două rădăcini reale şi două imaginare.*

In regiunile V: $H > 0$, $R_1 < 0$, $R_2 > 0$; când $\alpha > 0$ succesiunea de semne e: $+ + + - +$, iar când $\alpha < 0$ ea este $+ + - + +$; ca atare *două rădăcini reale.*

In regiunile VI şi 6: $H < 0$, $R_1 < 0$, $R_2 > 0$. Pentru $\alpha > 0$ semnele sunt $+ - + - +$, iar pentru $\alpha < 0$ ele sunt $+ + - - +$. Ca atare:

In regiunea VI ecuaţia are *toate rădăcinile reale.*

In regiunea 6 ecuaţia are *două rădăcini reale.*

In regiunea VII: $H < 0$, $R_1 < 0$, $R_2 < 0$, deci: *două rădăcini reale.*

In toate regiunile neexaminate încă β e negativ şi prin urmare, x_1 şi x_2 sunt de semne contrare. După cum α e pozitiv sau negativ, şirul lui ROLLE e respectiv:

$$-R_2HR_1- \quad \text{sau} \quad -R_1HR_2-,$$

căci cum coeficientul lui x^4 în $f(x)$ e negativ şi, ca atare, polinomul devine negativ pentru valorile foarte mari ale lui x. In consecinţă:

In regiunea VIII: $H < 0$, $R_1 < 0$, $R_2 < 0$: *nicio rădăcină reală.*
In regiunea IX: $H < 0$, $R_1 > 0$, $R_2 < 0$: *două rădăcini reale.*
In regiunea X: $H < 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$: *toate rădăcinile reale.*
In regiunea XI: $H > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$: *două rădăcini reale.*

PROBLEMA 3007. *Se dă ecuaţia*

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c = 0$$

şi se cere să se determine c, *astfel ca ecuaţia în* y *ce se obţine făcând transformarea*

(1) $$y = \frac{x}{x-1}$$

să fie de gradul al treilea. Să se arate că f(x) = (x — 1) φ (x) *şi să se explice rezultatul. Să se determine apoi* b, *astfel ca ecuaţia* φ'(x) = 0 *să admită rădăcini raţionale. Să se discute ecuaţia* f(x) = 0 *în acest caz,* a *fiind un parametru variabil.*

N. Abramescu.

Soluţie dată de D-nii: M. I. Focşeneanu, C. E. Georgescu, M. Georgescu-Roegen, Al. I. Guţu, Sterian Măcrineanu, Al. Niculescu, Pincu Katz, Gr. C. Moisil, Edgar C. Russu, I. St. Teodorescu, I. D. Vasilescu.

Din relaţia (1) deducem

$$x = y/(y-1)$$

pe care înlocuind-o în $f(x)$, avem ecuaţia în y

$$(1+a+b+c)y^4 - (a+2b+4c)y^3 + (b+6c)y^2 - 4cy + c = 0.$$

Pentru ca această ecuaţie să fie de gradul al treilea, trebue ca

$$1+a+b+c = 0,$$

de unde

$$c = -(a+b+1).$$

Inlocuind în $f(x) = 0$ pe c cu această valoare, se vede că această ecuaţie admite rădăcina $x = 1$, căci făcând pe x egal cu 1, avem

$$1+a+b+c = 0.$$

Aceasta se explică astfel. Ecuaţia $f(x) = 0$ având rădăcina $x = 1$, urmează din transformarea (1) că $y \to \infty$ pentru $x \to 1$; deci ecuaţia în y are o rădăcină ce tinde către ∞, şi prin urmare, coeficientul lui y^4 din această ecuaţie trebue să tindă către zero, adică

$$1+a+b+c = 0.$$

Ecuaţia $f(x) = 0$ devine în acest caz

$$f(x) = (x-1)\varphi(x), \quad \varphi(x) = x^3 + (1+a)x^2 + (1+a+b)x + 1 + a + b = 0.$$

Avem

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 2(1+a)x + (1+a+b) = 0.$$

Pentru ca această ecuație să admită rădăcini raționale, trebue ca realizantul

$$R = (1+a)^2 - 3(1+a+b) = a^2 - a - 3b - 2$$

să fie sau un patrat perfect, sau nul.

1°. Ca să fie patrat perfect oricare ar fi a, trebue ca realizantul ecuației în a,

$$a^2 - a - (3b+2) = 0,$$

să fie nul, adică

$$1 + 4(3b+2) = 0, \qquad b = -\tfrac{3}{4}.$$

Ecuația $\varphi(x) = 0$ devine în acest caz

$$\varphi(x) = 4x^3 + 4(a+1)x^2 + (4a+1)x + 4a + 1 = 0,$$

care se mai poate scrie

$$4x^3 + 4x^2 + x + 1 + a(x^2 + x + 1) = 0.$$

Suntem deci conduși a studià numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$F(x) = \frac{4x^3 + 4x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} + a = 0,$$

care se mai poate scrie

$$F(x) = \frac{4x^3 + 3x^2}{x^2 + x + 1} + 1 + a = 0.$$

Numitorul $x^2 + x + 1$ neanulându-se, funcțiunea $F(x)$ este continuă pentru toate valorile lui x, așà că putem a-i aplicà teorema lui ROLLE. Avem

$$F'(x) = \frac{x(2x+1)(2x^2+3x+6)}{(x^2+x+1)^2},$$

care se anulează numai pentru $x = 0$ și $x = -\frac{1}{2}$. Formând șirul lui ROLLE, avem tabloul:

a	$f(-\infty)$	$f(-\frac{1}{2}) = 4a + \frac{4}{3}$	$f(0) = 4a + 1$	$f(\infty)$	Rădăcinile x
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$+$	una reală poz.
$-\frac{1}{3}$	$-$	0	$-$	$+$	$-\frac{1}{2}$ dublă; una reală poz.
	$-$	$+$	$-$	$+$	trei reale.
$-\frac{1}{4}$	$-$	$+$	0	$+$	O dublă; una reală neg.
∞	$-$	$+$	$+$	$+$	una reală neg.

2°. Când realizantul $R = 0$, avem $a^2 - a - 3b - 2 = 0$, de unde

$$b = (a^2 - a - 2)/3,$$

deci

$$c = -\left(1 + a + \frac{a^2 - a - 2}{3}\right) = \frac{-(1+a)^2}{3},$$

iar ecuația $\varphi(x) = 0$ devine

$$\varphi(x) = x^3 + (a+1)\,x^2 + \frac{(a+1)^2}{3}\,x + \frac{(a+1)^2}{3} = 0,$$

care se mai poate scrie

$$\left(x + \frac{a+1}{3}\right)^3 - \left(\frac{a+1}{3}\right)^3 + \frac{(a+1)^2}{3} = 0,$$

sau

$$\left(x + \frac{a+1}{3}\right)^3 = \frac{(a+1)^2\,(a-8)}{27}.$$

Rădăcina reală a acestei ecuații este

$$x = -\frac{a+1}{3} + \frac{\sqrt[3]{(a+1)^2\,(a-8)}}{3}.$$

Când $a = -1$, sau $a = 8$, ecuația $\varphi(x) = 0$ admite câte o rădăcină triplă.

PROBLEMA 3062 și 3272. *Se cer patratele mai mici ca un milion, având cifrele patrate* (0, 1, 4, 9).

D. SOLOMON.

Cu această chestiune se ocupă și problema 2158 pentru patratele mai mici ca 1000, cari sunt în număr de zece: 0, 1, 4, 9, 49, 100, 144, 400, 441, 900.

Ne vom ocupă în cele ce urmează de patratele de cinci și șase cifre, cele de patru cifre deducându-se din cele de șase, cari se termină cu două zerori.

Fie N rădăcina patrată a unuia din numerele căutate, având cifrele a, b, c. Faptul că N^2 începe cu una din cifrele *1, 4, 9*, arată că N este cuprins între limitele următoare:

$$\text{(I)}\quad \begin{matrix} 100 \leqslant N < 143 \\ 200 \leqslant N \leqslant 223 \\ 300 \leqslant N \leqslant 316 \end{matrix} \qquad \text{(II)}\quad \begin{matrix} 316 < N \leqslant 447 \\ 632 < N \leqslant 707 \\ 948 \leqslant N < 1000 \end{matrix}$$

Grupul (I) se referă la patratele de cinci cifre, iar (II) la cele de şase cifre.

N^2 terminându-se cu *0, 1, 4, 9*, c nu poate fi decât *0, 1, 2, 3, 7, 8, 9*. Apoi, din egalitatea:

$$N^2 = 10000\,a^2 + 100\,b^2 + 2000\,ab + 200\,ac + 20\,bc + c^2,$$

se vede uşor că ultimele două cifre ale lui N^2 sunt aceleaşi ca ale lui $(20\,bc + c^2)$.

Să examinăm pe rând valorile posibile ale lui c.

$c = 0$. b nu poate fi decât 0, 1, 2, 3, 7, 8, 9, dar (I) arată că nu poate fi decât cel mult 3. Rees numerele:

100 110 *120* 130
200 *210* 220
300 310

dintre care numai

$100^2 = 10000$ $120^2 = 14400$ $200^2 = 40000$
$210^2 = 44100$ $300^2 = 90000$,

sunt soluţii ale problemei.

Trecând la grupul (II) se vede că N ar puteà fi

320, 330, 370, *380,* 390, 400, 410, 420, 430
670, 680, 690, *700, 970,* 980, 990,

dintre care numai

$$380^2 = 144400, \quad 700^2 = 490000, \quad 970^2 = 940900$$

sunt soluţii ale problemei.

Din acestea se deduc şi cele trei soluţii de patru cifre:

$$38^2 = 1444, \quad 70^2 = 4900, \quad 97^2 = 9409.$$

$c = 1$. $2b$ se termină cu *0* sau *4*, deci $b = 0, 2, 5, 7$.

Pentru (I) $b = 0, 2$, care dau numerele:

101, 121, 201, 221, 301

singura soluţie fiind

$$201^2 = 40401.$$

Pentru (II) găsim numerele:

321, 351, 371, 401, 421
651, 671, *701, 951,* 971

dintre care sunt două soluții:

$$701^2 = 491401 \quad 951^2 = 904401.$$

$c = 2$. $4b$ se termină cu *0* sau *4,* deci $b = 0, 1, 5, 6$.
Pentru (I) $b = 0,1$ de unde rezultă numerele:

102, 112, 202, *212,* 302, 312

cu soluțiile:

$$102^2 = 10404 \qquad 212^2 = 44944.$$

(II) ne dă numerele:

352, 362, 402, 412
652, 662, 702, 952, 962

fără nici o soluție.

$c = 3$. $6b$ se termină cu 0, 4, deci $b = 0, 4, 5, 9$.
Pentru (I) nu putem luă decât $b = 0$, ceeace ne dă numerele:

103, 203, 303,

care nu sunt soluții.

Pentru (II) obținem numerele:

343, 353, 393, 403, 443
643, 653, 693, 703, 953, 993,

care nu sunt soluții.

$c = 7$. $14b + 4$ se termină cu 0, 4, deci $b = 0, 4, 5, 9$.
Pentru (I) $b = 0$, care dă numerele:

107, 207, 307

cu soluția

$$107^2 = 11449.$$

Pentru (II) avem numerele:

347, 357, 397, 407, 447
647, 657, 697, 707, 957, *997*

cu singura soluție

$$997^2 = 994009.$$

$c = 8$. $16b + 6$ se termină cu 0, 4, deci $b = 3, 4, 8, 9$.

Pentru (I) găsim numărul 138, care dă soluția

$$138^2 = 19044.$$

Pentru (II) găsim numerele:

338, 348, 388, 398, 438, 638,
648, 688, 698, 948, 988, 998

cu singura soluție

$$648^2 = 419904.$$

$c = 9$. $18b + 8$ se termină cu *0, 4, deci* $b = 2, 4, 7, 9$.
Pentru (I) $b = 2$ și găsim numărul *129,* care nu dă soluție.

Pentru (II) găsim numerele:

329, 349, 379, 399, 429
649, 679, 699, 949, 979, 999,

care nu dau nici o soluție.

In rezumat, problema are următoarele soluții în număr de treizeci:

0, 1, 4, 9, 49, 100, 144, 400, 441, 900.
1444, 4900, 9409, 10000, 10404, 11449, 14400, 19044,
40000, 40401, 44100, 44944, 90000
144400, 419904, 490000, 491401
904401, 940900, 994009.

Notă. Ca și la problema 3072, soluțiile primite dau loc la aceleași observațiuni.

Deși metoda infailibilă a încercărilor, a fost întrebuințată de toți corespondenții, totuș puțini au găsit mai toate soluțiile problemei.

Au găsit soluții la această problemă D-nii: I. Coșereanu (30), N. Arcadianu, C. Ciorănescu, St. Lăzărescu, A. Roșu (29), I. Vasiliu, Longin Ionescu, F. Negrețu (28) M. Adam, Mișu Dumitrescu, L. Weiss (27), Dima Iliescu, M. Pătroianu (26), P. Ionescu (25), G. Grofșoreanu, M. G. Dumitrescu, I. Georgescu-Racoviță (24), Spirea Popescu (21) C. D. Mihăescu, I. Miu (19), Gh. David (15), I. Popovici (12), Gh. Nicolau (11).

Soluții cevă mai conștiincioase au trimis D-nii: E. Ștefănescu (30), N. Botea și E. Schlifca (28).

M. G.

PROBLEMA 3153. *Tangent laturei* AB *şi trecând prin vârful* A *şi ortocentrul* H *al unui triunghiu* ABC, *se duce un cerc cu centrul în* A_c. *Fie* B_c *centrul cercului construit la fel şi trecând prin* B, *iar* C' *intersecţia dreptelor* AB, $B_c A_c$. *Să se arate: 1) că punctul* C' *şi celelalte 2 obţinute la fel sunt colineare; 2) că cercurile* A_c *şi* B_c *se întâlnesc pe cercul* ABC; *3) că axele radicale ale cercurilor* A_c, B_c *şi ale celorlalte perechi, analog obţinute, trec prin mijloacele laturilor triunghiului* ABC; *4) ce devin aceste proprietăţi, când* H *e un punct oarecare în plan?*

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU.

I. *Soluţie* dată de d-nii: M. ADAM (Lc. Constanţa) şi O. POPEA.

1. Fie D proecţia lui A_c pe AH. Pe figură se vede că

$$\sphericalangle A A_c D = \sphericalangle BAH = \tfrac{1}{2}\pi - B,$$

apoi din triunghiul $AA_c D$ se scoate

$$AA_c = AD/\cos B$$

şi cum $$2AD = AH = 2R\cos A$$

rezultă (1) $$AA_c = (\cos A/\cos B)R,$$

R fiind raza cercului ABC. In mod analog se găseşte

(2) $$BB_c = (\cos B/\cos A)R.$$

Din triunghiurile $C'AA_c$, $C'BB_c$ se scoate, ţinând seamă de (1) şi (2)

(3) $$C'A/C'B = AA_c/BB_c = \cos^2 A/\cos^2 B.$$

In mod analog se deduce

(4) $$B'C/B'A = \cos^2 C/\cos^2 A \text{ şi } A'B/A'C = \cos^2 B/\cos^2 C.$$

Inmulţind (3) cu (4) se găseşte

$$A'B/A'C \cdot B'C/B'A \cdot C'A/C'B = 1,$$

ceeace dovedeşte că punctele A', B', C' sunt colineare.

2. Fie M intersecţia cercurilor A_c, B_c. Se observă că

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMH + \sphericalangle BMH,$$

dar $$\sphericalangle AMH = \sphericalangle BAH = \tfrac{1}{2}\pi - B$$

şi $$\sphericalangle BMH = \sphericalangle ABH = \tfrac{1}{2}\pi - A$$

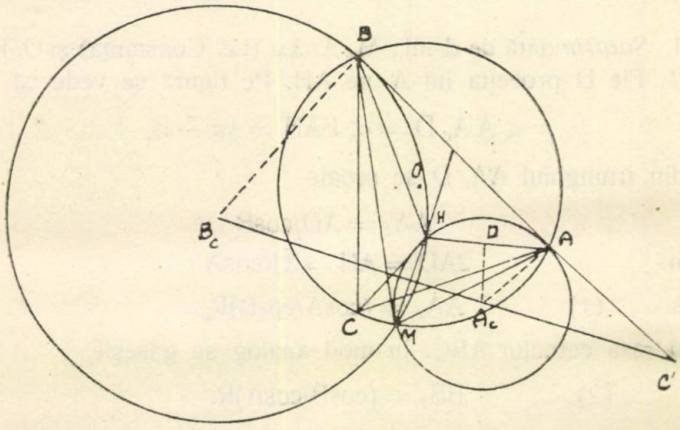
$$\sphericalangle AMB = \pi - A - B = C.$$

Deci patrulaterul AMCB este inscriptibil, ceeace demonstrează punctul 2).

3. Deoarece AB este tangenta comună a cercurilor A_c, B_c este evident că axa radicală a acestor cercuri va trece prin mijocul lui AB.

4. Fie H un punct oarecare în planul triunghiului ABC. Insemnăm prin:

$$\gamma_a = \sphericalangle HAB; \quad \beta_a = \sphericalangle HAC; \quad \beta_c = \sphericalangle HCA;$$
$$\alpha_c = \sphericalangle HCB; \quad \alpha_b = \sphericalangle HBC; \quad \gamma_b = \sphericalangle HBA.$$



Triunghiul AA_cD dă

$$2AD = AH = 2AA_c \cos DAA_c = 2AA_c \sin \gamma_a$$
$$\therefore \quad AA_c = AH/2\sin \gamma_a .$$

La fel se găseşte

$$BB_c = BH/2\sin \gamma_c ,$$

aşă că se va puteà scrie

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = \frac{AA_c}{BB_c} \cdot \frac{BB_a}{CC_a} \cdot \frac{CC_b}{AA_b} = \frac{\sin \gamma_b}{\sin \gamma_a} \cdot \frac{\sin \beta_a}{\sin \beta_c} \cdot \frac{\sin \alpha_c}{\sin \alpha_b} .$$

Pentru ca punctele A', B', C' să fie colineare, va trebui să avem

$$(5) \qquad \sin \alpha_c \sin \beta_a \sin \gamma_b = \sin \beta_b \sin \beta_c \sin \gamma_a .$$

Intre unghiurile α, β, γ şi A, B, C există relaţiuni de forma

$$\pm \gamma_a \pm \beta_a = A,$$

semnele luându-se după felul în care se prezintă figura.

Pentru ca cercurile A_c, B_c să se întâlniască pe cercul ABC trebue să avem

$$\sphericalangle HMA + \sphericalangle HMB = C$$

$$\therefore \quad \sphericalangle HBA + \sphericalangle HAB = C.$$

Axul radical al cercurilor A_c, B_c trece prin mijlocul lui AB, ori care ar fi H. Deci numai proprietatea 3) se menţine în cazul general.

II. *Soluţie* dată de d-l I. C. Vasiliu, (Lc. Mânăstirea Dealului).

Partea 1) ca la prima soluţie. Pentru proprietatea 2) scriem ecuaţiile baricentrice

$$(A_c) \qquad F/\partial = \beta c^2 + \gamma(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)/(a^2 + c^2 - b^2)$$

şi $$(B_c) \qquad F/\partial = \alpha c^2 + \gamma(b^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)/(b^2 + c^2 - a^2)$$

ale cercurilor A_c şi B_c. Interceptând axul radical al acestor cercuri cu dreapta AB de ecuaţie $\gamma = 0$, se găseşte

$$\beta c^2 = \alpha c^2$$

$$\therefore \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0,$$

adică mijlocul lui AB.

3. A doua intersecţie a cercurilor (A_c), (B_c) este punctul M de coordonate:

$$1/c^2(b^2 + c^2 - a^2), \quad -1/c^2(a^2 + c^2 - b^2), \quad 1/(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2),$$

care verifică şi ecuaţia cercului ABC.

4. Ca la prima soluţie.

Notă. 1°. D-l I. Vasiliu este singurul care a găsit relaţia de condiţie sub forma (5).

2°. Nu au fost menţionaţi rezolvitorii care la punctul 4) au răspuns că proprietatea 1) se menţine.

PROBLEMA 3192. *Care sunt cuburile mai mici ca un milion, la care ultimile trei cifre formează un pătrat?*

I. Dragomir.

Numărul N^3 fiind mai mic ca 10^6, rădăcina sa cubică N este mai mică ca 10^2. Vom distinge două cazuri, după cum N este de o cifră, sau de două cifre.

1^0. $N < 10$. Pentru a îndeplini condițiunile problemei, trebue ca N^3 să fie și pătrat perfect, trebue să luăm deci $N = n^2 \leqq 9$, adică $N = 1, 4, 9$ și ca urmare avem următoarele soluțiuni :

1, 64, 729.

2^0. $N > 10$. In acest caz vom considerà (a) $N = \mathcal{M}10$ și (b) $N \neq \mathcal{M}10$.

a) In primul subcaz avem evident următoarele soluțiuni : 1.000, 8.000, 27.000, 64.000, 125.000, 216.000, 343.000, 512.000 729.000.

b) In al doilea subcaz să punem $N = 10a + b$.

Ultimile trei cifre ale cubului formând un pătrat perfect, cubul cerut se sfârșește cu 1, 4, 5, 6, 9, deci b este una din cifrele 1, 4, 5, 6, 9.

Dacă $b = 1$, avem $N^3 = \mathcal{M}100 + 30a + 1$; deci ultimile două cifre sunt date de $30a + 1$ și pentru a obține o terminațiune de pătrat perfect trebue să luăm $a = 2, 4, 6, 8$.

In mod analog dacă : $b = 4$ avem $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$b = 5$ » $a = 2, 4, 6, 8.$
$b = 6$ » $a = 1, 2, 3, 6, 7, 8$
$b = 9$ » $a = 2, 4, 6, 8.$

Așà dar, următoarele numere ar puteà fi rădăcinile cuburilor căutate :

21, 41, 61, 81, 25, 45, 65, 85, 29, 49, 69, 89

14, 24, 34, 44, 64, 74, 84, 94, 16, 26, 36, 66, 76, 86.

Insă patratele perfecte impare fiind de forma $\mathcal{M}8 + 1$, cuburile respective sunt de aceiași formă ; deci vom înlătură dintre numerele de mai sus, care sunt de una din formele $\mathcal{M}8+1$ sau $\mathcal{M}8+5$, pe acelea care sunt de forma $\mathcal{M}8 + 5$, ale căror cuburi sunt de aceiași formă ; adică înlăturăm numerele 21, 61, 45, 85, 29, 69.

Ridicând la cub pe cele rămase găsim următoarele soluțiuni :

$25^3 = 15.625$, $26^3 = 17.576$, $64^3 = 262.144$, $65^3 = 274.625$

și $81^3 = 531.441$.

A găsit toate soluțiunile problemei D-nul Const. T. Ionescu-Bujor.

Au rezolvat în parte problema D-nii : N. Botea, A. Stoica, E. Pălărieru, I. C. Vasiliu, P. I. Ionescu, C. I. Ciorănescu, G. Simionescu, I. M. Miu.

PROBLEMA 3273. *Să se arate că dacă*

$$\varphi_\alpha(17^\beta) = 2,$$

atunci $\alpha = 4\beta$; $\varphi_n(1)$ *fiind indicatorul de ordinul* n *al lui* 1.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: N. BOTEA (cl. VII, Lc. Cantemir-Vodă), ALEX. MLADENOVICI (cl. VI, Lc. Cantemir Vodă), CORNELIU POPESCU (cl. V R, Lc. Ion Maiorescu, Giurgiu), ION C. VASILIU (cl. VII, Lc. Mânăstirea Dealului).

Calculând succesiv avem:

$$\varphi_1(17^\beta) = 17^{\beta-1}.16 = 17^{\beta-1}.2^4$$

$$\varphi_2(17^\beta) = 17^{\beta-2}.2^3.16 = 17^{\beta-2}.2^{4+3.1}$$

$$\varphi_3(17^\beta) = 17^{\beta-3}.2^{4+3.1-1}.16 = 17^{\beta-3}.2^{4+3.2}$$

$$\varphi_4(17^\beta) = 17^{\beta-4}.2^{4+3.2-1}.16 = 17^{\beta-4}.2^{4+3.3}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_{\beta-1}(17^\beta) = 17^1.2^{4+3(\beta-2)}$$

$$\varphi_\beta(17^\beta) = 2^{4+3(\beta-1)}$$

$$\varphi_{\beta+1}(17^\beta) = 2^{4+3(\beta-1)-1}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_{\beta+k}(17^\beta) = 2^{4+3(\beta-1)-k}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_{\beta+3\beta}(17^\beta) = 2^{4+3(\beta-1)-3\beta} = 2.$$

Deci $\alpha = 4\beta$.

c. c. e. d. d.

Soluţie şi generalizare dată de D-nii: N. BOTEA, O. POPEA şi D. POPOVICI-PUIU.

Fie $A = 2^t + 1$ un număr prim absolut; *să se arate că dacă:*

$$\varphi_\alpha(A^\beta) = 2,$$

atunci avem $\alpha = \beta . t$.

Raţionându-se ca mai sus, găsim că:

$$\varphi_\beta(A^\beta) = 2^{\beta(t-1)+1}.$$

Apoi avem:

$$\varphi_{\beta+k}(A^\beta) = 2^{\beta(t-1)+1-k}.$$

Ori cum:

$$\beta(t-1) + 1 - k = 1,$$

urmează că:

$$\beta(t-1) = k.$$

Deci

$$\alpha = t\beta.$$

c. c. e. d. d.

Notă. Problema s'ar puteà extinde şi la numerele de forma:

$$N = (2^{t_1} + 1) . (2^{t_2} + 1) \ldots (2^{t_m} + 1),$$

unde toţi factorii sunt primi absolut şi atunci:

$$\varphi_{\beta+k}(N^\beta) = 2^{\beta . \Sigma t - (\beta-1)m - k}.$$

Ori dacă voim să avem relaţia:

$$\beta . \Sigma t - (\beta - 1)m - k = \gamma,$$

atunci vom puteà spune că:

$$\varphi_\alpha(N^\beta) = 2^\gamma,$$

dacă:

$$\alpha = \beta . \Sigma t - (\beta - 1)m + \beta - \gamma.$$

In cazul problemei *3273*, avem:

$$\Sigma t = 4 \quad , \quad m = 1 \quad \text{şi} \quad \gamma = 1.$$

Observaţie. D-l DAN POPOVICI-PUIU a studiat cazul cevà mai general, luând:

$$\varphi_\alpha\left[(2^t + 1)^\beta\right] = 2^\gamma,$$

găsind că:

$$\alpha = t . \beta - \gamma + 1.$$

I. L.

PROBLEMA 3293. *Dacă procentul anual al unei sume dată cu dobândă este 10, care este procentul lunar maximum şi minimum ?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: N. BOTEA, E. BOTEA, C. ST. C. FELIX, N. TEODORESCU.

Procentul zilnic este $10/365=2/73$ în anii ordinari şi $10/366=5/183$ în anii bisextili. Procentul maximum este în lunile de 31 zile ale anilor ordinari şi anume $2\times31/73=0{,}84931$; sau rotund 0,85. Procentul minimum are loc în luna fevruarie şi este $2\times28/73$ în anii ordinari şi $5\times29/183$ în anii bisextili. Comparând aceste două fracţii, găsim că prima este mai mică. Deci procentul minimum este $2\times28/73=0{,}76712\ldots$, sau rotund 0,77.

Notă. Problema admite o *soluţie singulară* pentru luna Aprilie 1919, când s'a schimbat calendarul în mod oficial. Acea lună s'a scurtat cu 13 zile şi deci procentul pentru dânsa a fost $17\times10/365=0{,}47$ rotund.

I. I.

PROBLEMA 3294. *Fie* I *centrul cercului înscris în triunghiul* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *triunghiul său complimentar. Să se demonstreze că centrele cercurilor lui* EULER *ale triunghiurilor* BIC, CIA, AIB *sunt situate pe bisectoarele triunghiului complimentar* $A_1B_1C_1$.

MICU GRÜNBAUM.

Soluţie dată de D-nul CONST. C. POPOVICI (Elev Liceul Internat, Iaşi).

In triunghiul BIC fie O_a, H_a, M centrul cercului circumscris, ortocentrul şi punctul eulerian de pe înălţimea vârfului I (mijlocul segmentului IH_a). Fie apoi I_a centrul cercului exînscris în unghiul A al triunghiului ABC.

O_a e situat pe bisectoara AI, căci bisectoara interioară şi exterioară a unghiului ABC, spre exemplu, fiind perpendiculare, I şi I_a vor fi diametral opuse în cercul BIC. Unind pe A_1 (mijlocul laturei BC) cu M, se ştie că dreapta A_1M trece prin centrul cercului lui EULER al triunghiului BIC. Se mai ştie însă că dreptele A_1O_a şi MI sunt egale şi paralele; patrulaterul A_1MIO_a este deci un paralelogram. Rezultă că A_1M este paralelă cu IO_a şi deci ea este bisectoara interioară a unghiului A_1 a triunghiului complimentar.

PROBLEMA 3295. *Să se demonstreze că ortopolurile laturilor unui patrat în raport cu un triunghiu oarecare din planul patratului, sunt vârfurile unui pseudopatrat.*

N. G. BOTEA.

Soluție dată de D-nii: ION M. MIU (Elev cl. VII, Liceul Ioniță Assan, Caracal), ISTINIE I. C. BREZUICA (Elev cl. VI, Liceul Ioniță Assan, Caracal) și MIHAIL I. FOCȘENEANU (Sublocotenent).

Se cunoaște următoarea teoremă:

Dacă o dreaptă Δ se deplasează paralel cu ea însăși, ortopolul ei ψ în raport cu un triunghiu oarecare fix din planul dreptei, descrie o dreaptă d perpendiculară pe Δ; în această mișcare ortopolul ψ suferă o translație egală cu translația dreptei Δ*).

Rezultă imediat din această teoremă că ortopolurile a două laturi opuse ale patratului, se găsesc pe o direcție perpendiculară pe direcția laturilor și la o distanță unul de altul egală cu latura patratului. Deci ortopolurile ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 ale laturilor unui patrat în raport cu un triunghiu coplanar, sunt vârfurile unui patrulater $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$ ale cărui diagonale sunt egale și perpendiculare (pseudopatrat).

Au dat bune soluții și D-nii: ION C. VASILIU, AUREL POPOVICI (Focșani), EUGEN MASSLER (Liceul Cantemir), CONST. C. POPOVICI (Iași), N. I. MANOLESCU (Liceul Focșani), CONST. IONESCU-BUJOR și ANDREI IONESCU-BUJOR (Liceul Cantemir), VALERIU MANAFU, dând soluțiuni care se reduc la demonstrarea teoremei de mai sus, din care primii trei au și utilizat prima parte.

D-nii: M. I. FOCȘENEANU, I. C. VASILIU și CONST. IONESCU-BUJOR observă că problema subsistă și pentru cazul *isopolului.*

PROBLEMA 3336. *Fie* A_1, B_1, C_1 *simetricele vârfurilor unui triunghiu* ABC *în raport cu laturile opuse,* H, H_a, H_b, H_c *ortocentrele triunghiurilor* ABC, A_1BC, B_1CA, C_1AB, *iar* $A'B'C'$, $A'B_aC_a$, $B'C_bA_b$, $C'A_cB_c$ *triunghiurile ortice ale acestor triunghiuri.*

Să se demonstreze că:

1. H_a, H_b, H_c *sunt pe cercul* ABC;

---

*) J. NEUBERG, Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe pag. 76.

Idem, „Mathesis" 1922, pag. 210.

2. *Cercurile circumscrise triunghiurilor* A_1BC, B_1CA, C_1AB *se întretaie în* H;

3. H *este centrul cercului înscris în triunghiul* $H_a H_b H_c$;

4. *Grupurile de puncte* (A_b, B', C', A_c), (B_c, C', A', B_a), (C_a, A', B', C_b) *sunt colineare.*

CONST. C. POPOVICI.

Soluție dată de D-nii: CORNELIU N. POPESCU (Elev cl. VI, Liceul I. Maiorescu, Giurgiu), ION TH. POPOVICI, VASILE TĂRAȘ (Elev Liceul A. Șaguna, Brașov), EMN. GH. GAIU (Elev Cl. VII, Liceul Codreanu, Bârlad), GRIGORE MAREȘ (Liceul Bacău), CONST. IONESCU-BUJOR și ANDREI IONESCU-BUJOR (Liceul Cantemir Vodă), N. I. MANOLESCU (Liceul Unirea, Focșani), N. ȘT. MIHĂILESCU (Elev cl. VII, Liceul Matei Basarab), GH. MUNTEANU (Elev cl. VI, Liceul Militar, Craiova), ARNO KAHANE, OTTO I. BRAEȘTER (Liceul Național, Iași), R. I. SPATHY (Liceul Matei Basarab), RĂDUCAN I. GEORGESCU (Elev cl. VIII, Liceul Lazăr, București), DUMITRU G. NESTOR, GH. M. CĂLIN (cl. VI, Liceul Caracal), VIRGIL RÂPEANU și AVRAM LUPU (Liceul Internat, Iași), ERNEST GRÜNSTEIN (cl. VIII, Liceul Kogălniceanu, Iași), G. TAILER și DAVID HAIM (Liceul Bârlad), ADRIAN C. GHEORGHIU (Liceul Pitești), I. NICOLAU-DOBRIDOR (cl. VI, Liceul Militar, Craiova).

1. Triunghiurile A_1BC și ABC sunt egale și simetrice în raport cu latura lor comună BC. Prin urmare toate elementele omoloage ale acestor triunghiuri vor fi simetrice în raport cu latura BC; deci H_a este simetricul lui H față de BC. Ori, se știe că simetricul ortocentrului unui triunghiu în raport cu laturile opuse se află pe cercul circumscris triunghiului. Deci H_a se află pe cercul ABC și analog demonstrăm că H_b și H_c se află pe același cerc.

2. Triunghiul ABC este simetricul lui A_1BC în raport cu latura lor comună BC; deci H este simetricul ortocentrului H_a a triunghiului A_1BC față de BC și prin urmare pentru un motiv analog cu cel de mai sus, H se află pe cercul A_1BC. La fel arătăm că H se află și pe cercurile B_1CA și C_1AB.

3. Se știe că ortocentrul H este centrul cercului înscris în triunghiul ortic A'B'C'. Am demonstrat însă că A', B', C' sunt respectiv mijloacele segmentelor HH_a, HH_b, HH_c și deci triunghiurile A'B'C' și $H_a H_b H_c$ sunt homotetice, având pe H ca centru de ho-

motetie, iar raportul de homotetie 1 : 2. Urmează de aici că H este centrul cercului înscris în triunghiul $H_a H_b H_c$.

4. Am văzut că patrulaterul $CHAB_1$ este inscriptibil şi fiindcă dreptele AC', AB', AA_b sunt respectiv perpendiculare pe laturile CH, HB_1, B_1C ale triunghiului CHB_1, rezultă că $C'B'A_b$ este dreapta lui SIMSON a punctului A faţă de triunghiul CHB_1. La fel demonstrăm că $B'C'A_c$ este dreapta lui SIMSON a punctului A faţă de triunghiul HBC_1. Ori aceste două drepte având punctele B' şi C' comune, punctele A_b, B', C', A_c sunt colineare. Demonstraţie analoagă pentru grupurile (B_c, C', A', B_a), (C_a, A', B', C_b).

EXERCIŢII

18. Se cer patratele de patru cifre la care o cifră este suma celorlalte trei.

S. KATZ.

R. In tabele de patrate găsim soluţiile: 1089; 1296; 1681; 2916; 3025; 3294; 3481; 5041; 9216; 9801.

19. Se cer patratele *szu* egale cu suma numerelor *sz*, *su*, *zu*.

S. KATZ.

R. Dacă B este baza de numeraţie avem:

$$sB^2 + zB + u = (sB + z) + (sB + u) + (zB + u),$$

$$sB(B - 2) = z + u.$$

Cum z şi u sunt cifre în sistemul cu baza B, se vede că $(z + u) = B$ şi deci $s(B - 2) = 1$, de unde $s = 1$, $B = 3$. Patratul căutat este $(1.3^2 + 3z + 3 - z) = 2z + 12$. Cum z nu poate fi decât 0, 1, 2 se găseşte că numai ultima valoare face expresia patrat perfect. Singura soluţie este numărul 121, scris în sistemul ternal de numeraţie, care corespunde lui 16 scris în sistemul zecimal.

20. Rădăcina patrată a unui patrat de şase cifre este patratul numărului format de ultimele două cifre.

M. BERNSTEIN.

R. Numărul căutat n este de forma $(100a+10z+u)$ şi deci $n=(10z+u)^4 = 100a+(10z+u)$. Se vede că u^4 trebuie să se termine cu ceeeace cere $u=0$, 1, 5 sau 6. Prima cere $z=0$, inadmisibil. Putem scrie $(10z+u)\ (10z+u)^3-1 = 100a$. Cifra zecilor din paranteza drepliniară o dă numai $(30zu^2+u^3-1)$. Pentru $u=1$, cifra zecilor este dată de unităţile lui $3z$. Deci $z=0$, care nu convine, căci $(10z+u)^4$ nu are şase cifre. Pentru $u=5$ numărul $(10z+u)$ se termină cu 5, parenteza drepliniară cu 4. Deci $(10z+u)$ trebuie să conţină pe 5^2 şi nu poate fi decât 25, 50, 75. Dar numai primul ridicat la puterea patra dă un număr de şase cifre. Deci avem $n=25^4=390625$, a cărui rădăcină este $625=25^2$. Dacă $u=6$, avem $(30zu^2+u^3+1)=5(216z+43)$. Parenteza trebuie să mai conţină pe 5, deci $z=2\,;6$. Deci $(10z+u)=26\,;76$. Primul nu conţine factorul 4; al doilea ridicat la puterea patra dă mai mult de şase cifre. Deci singura soluţie este numărul 390625.

PROBLEME PROPUSE.

3361. Pentru construcţiunea unei linii ferate, o fabrică de şini le oferă cu dobândă de $10^0/_0$ plătibile în 20 ani, iar alta cu $6^0/_0$ în 25 ani. La a doua fabrică însă şinile sunt cu $20^0/_0$ mai scumpe ca la prima. Care ofertă este mai avantajoasă? Anuităţile constante în ambele cazuri.

I. Ionescu.

3362. Să se găsiască numerele de trei şi de patru cifre, care sunt dublele unor patrate şi la care suma cifrelor adunate ca simple unităţi este un cub.

C. D. Mihăescu.

3363. Se cere un cub de cinci cifre, aşà ca suma primelor trei cifre să fie egală cu suma ultimelor două, iar cifra zecilor aceiaşi cu a miilor.

G. Tailer.

3364. Care numere înmulţite cu cifra a ne dau numere scrise numai cu cifra b, exceptând ultima cifră?

Căpitan I. Linteş.

3365. Să se găsiască un şir de numere satisfăcând relaţia

$$u_n + u_{n-1} = (u_n - u_{n-1})^2.$$

N. Kaufmann.

3366. Fie ABCD un patrulater inscriptibil, în care A şi C sunt două vârfuri opuse; A_d intersecţia perpendicularei în A pe AD cu BC şi A_b intersecţia perpendicularei în A pe AB cu CD. Să se demonstreze că $A_b A_d$ trece prin centrul cercului circumscris patrulaterului ABCD.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU.

3367. Se împart laturile triunghiului ABC în acelaş raport $m : n$, mergând în acelaş sens. Fie A_1, B_1, C_1 punctele astfel căpătate respectiv pe laturile BC, CA, AB. Procedăm la fel cu triunghiul $A_1B_1C_1$ împărţind laturile sale tot în raportul $m : n$. Fie S, S_1, S_2, S_3,....ariile triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, etc. Se cere să se afle în funcţie de S, m şi n limita sumei

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_p + \ldots\ldots$$

EUG. BALAN.

3368. Să se stabiliască identitatea

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-1)^{p+i-1} \cdot \frac{C_{2(p+i)}^{2p} C_{2p}^{p-i}}{4p+2i+1} = \frac{2^{2p}(4p)!}{(2p)!\,(2p+1)(2p+3)\ldots(6p+1)}.$$

T. POPOVICIU.

3369. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu avem relaţiunile:

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A + \frac{p}{a}\sin^2\tfrac{1}{2}A = \cos^2\tfrac{1}{2}B + \frac{p}{b}\sin^2\tfrac{1}{2}B = \cos^2\tfrac{1}{2}C + \frac{p}{c}\sin^2\tfrac{1}{2}C = 1 + \frac{r}{4R}.$$

N. I. MANOLESCU.

3370. Să se arate că curbele definite de sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx}{lx - ry + qz} = \frac{dy}{rx + ly - pz} = \frac{dz}{-qx + py + lz}$$

sunt situate pe conuri de rotaţie, una oarecare tăind sub unghiu constant generatoarele conului pe care este situată. Să se afle ecuaţiile acestor curbe.

N. ABRAMESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Radu (3345, 55); *Arcadian N.* (3339, 47, P, R); *Bădescu R.* (3338); *Baidac-Gradini M. D.* (3301, R); *Bârsănescu V.* (3233, 317, 38); *Bassarab A.* (3338); *Bleiweiss P.* (R); *Botea Emil* (3067, 233, 83, 338); *Braester Otto* (3353, 55, 57); *Brezuica I. I. C.* (C, E, R); *Căldăraru L.* (3289); *Călin M. Gh.* (3263, 338, 45, 47, 57, E); *Dimitriu D. Emil* (3357); *Dinescu Fl.* (3233, 53, 342, 47); *Focșa I.* (R); *Focșeneanu M.* (3328); *Gaiu G. Em.* (3347, 55); *Gataianțu B.* (3233, 357, 59); *Georgescu-Racoviță I.* (R); *Georgescu-Răducanu* (3355); *Gheorghiu Adrian* (3345, 55, 57); *Gheorghiu S.* (N, P); *Gorciu Vasile* (3357); *Grünstein E.* (3338); *Haim David* (3355, 57); *Hulubei T.* (3315, 38, 55, 57); *Iliuță Dăbuleni* (3233, 72, 353, E, R); *Ioachim Grigore* (3317, 19, 27, 38, 47, 55, 57, R); *Ionescu-Brezuica I.* (N); *Ionescu-Bujor A.* (3283, 338); *Ionescu-Bujor C.* (3345); *Kahane A.* (3338); *Katz L.* (3355, 57); *Lupu A.* (3347); *Manafu V.* (R); *Manolescu N.* (3233, 58, 96, 317, 42, 45, 53, 55, 57, E); *Mărdărescu R.* (P); *Mareș Gr.* (3338); *Marinaș M.* (3301, 53); *Mariș Marius* (3339, 57); *Munteanu G.* (3338); *Nestor D.* (3326, 55, 57); *Nicolau G.* (3338, 47, E); *Nicolau-Dobridor I.* (3338); *Nicolescu V. G.* (3289, 317, 42, 47, 53, 57); *Novacu V.* (2929, 3162, 342, 47); *Păun C.* (3342); *Petruțiu I.* (3338); *Popescu N. Corneliu* (3122, 218, 42, 63, 89, 315, 19, 22, 34, 37, 45, 47, 55, 57, 59, P); *Popovici A.* (3317); *Popovici I.* (3262, 72, 338); *Raiciu V. C.* (3301); *Răpeanu V.* (3347, 55, 57, 58); *Roșu A.* (R); *Rusanda G.* (3347); *Schächter O.* (3136); *Segal L.* (N, R); *Segârceanu N.* (3329); *Spathy R.* (3338, R); *Stoicescu T.* (3317, 53, 55, 57); *Tailer G.* (3338, 42, 53, 55, 57, E, P); *Themo Togo* (3233, 301, 17, 57); *Vasilescu Bartolomeu* (3338, 42, 57); *Vasiliu I. C.* (3338, R).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2358, 96, 421, 43, 578, 654, 861, 972, 3059, 197, 233, 39, 48, 49, 52, 59, 68, 69, 73, 79, 82, 99, 303. 11, 12, 21, 24, 32, 33, 44, 48, 52 și 56, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE"

30 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.

M2525 Dnor Asociaţiunea pentru cultura literatura poporului Român din Sibiu

Biblioteca „ASTRA" — SIBIU —

0 - MAR. 2014

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1926.

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAŢIUNII" SIBIU

SUMARUL

şi Algebra lui Gh. Manu
şi sfârşit) . . . . . *Locot.-Col. Gh. Buicliu.*
n ordine naturală a rădăcinilor a două ecuaţii de gradul al treilea (urmare şi sfârşit) . . *Th. Angheluţă.*
3. Note Matematice: 19—23.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografii.
6. Cereri: 134, 135.
7. Probleme rezolvate: 2898, 3136, 3144, 3155, 3214, 3263.
8. Exerciţii: 21—26.
9. Probleme propuse: 3371—3380.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1926

74303

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu**, Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci**, Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu**, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 94, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 76, 78, 79, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 25, 30, 33, 35, 40, 41, 43, 44, 50, 54, 60, 61, 64, 65, 66, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXI *SUPLIMENT* No. 5

RECREAŢIUNI

1. **Numărul misterios 40.** Oricine cine citeşte *Biblia*, vede că numărul 40 se iveşte foarte des în chestiuni la care nu se poate găsi nici un motiv de ce nu ar fi alt număr, ci tocmai 40. Aşà de exemplu, se spune că potopul a ţinut 40 zile şi 40 nopţi. In viaţa lui Moise îl găsim de câtevà ori: el a fost păstor de vite 40 ani; după trecerea Mării Roşii a stat cu Israeliţii în pustiu 40 ani şi s'a rugat lui Dumnezeu în munte, în două rânduri, câte 40 zile şi 40 nopţi; iar când au ajuns, la hotarele Chanaanului, a trimis, pentru recunoaştere, câte un om, care s'au întors toţi după 40 zile, fără ca să vie unul mai de vreme şi altul mai târziu! Israeliţi au stat sub Filisteni 40 ani. David a domnit 40 ani şi a ucis 40 mii de Amoniţi. Solomon a domnit tot 40 ani şi aveà în grajdurile lui 40 mii cai. Proorocul Ilie a mers 40 ani până să ajungă la muntele Hereb. Oraşul Niniva a fost distrus după 40 zile dela sosirea lui Iona acolo. Idolului Bel i se sacrificà 40 oi pe zi. Turburările din Erusalim au ţinut 40 ani. etc. etc.

Dela Evrei, acest misticism a trecut la Creştini. După 40 de zile dela naştere, Isus este dus în Templul Erusalimului, după botez a stat 40 zile în pustiu postind, iar după 40 zile dela înmormântare s'a ridicat la Ceruri.

In scrierile Apostolilor, găsim de asemenea pasagii cu numărul 40.

— „Că acelora erea mai mult de 40 ani, în care se făcuse semnul acela al vindecării".

— „Şi ereau mai mulţi de 40 cei ce făcuseră acest jurământ".

— „Şi asupra cărora s'au mâniat 40 ani".

— „Dela Iudei au luat de 50 ori câte 40 fără 1 locuitori".

Al doilea exemplu, arată că 40 se lua ca termen de comparaţie pentru numere nedeterminate, pe când ultimul arată că 40 aveà şi rolul unei baze de sistem de numeraţiune.

Ceeace este curios este faptul că în zicătorile populare dela noi, întâlnim pe 40 tot ca termen de comparaţiune, sau fără valoare precisă. Iată câtevà exemple:

— „Il aştept cu 40 ochi".

— „Noi râdem de unul, de doi, iar 40 râd de noi".

— „Dacă la 40 nu am putut, la 80 ce o să pot".

— „Averea mai mult de 40 ani nu stă la un loc".

Numărul 40 scapă uneori şi din condeiul poeţilor. Iată două exemple din „*Muma lui Mihai*" şi „*Traianida*" de D. BOLINTINEANU.

— „Maică schimnică, supusă, Nu mai este fiul tău! Ce nu a putut răpune *Patruzeci* de lupte mari, Au răpus, vai! îţi voi spune. Două săbii de tâlhari".

— Mândru se apără cei doi cu bâtele! Ei atrag către ei cete vrăşmaşe. De trei ori 40 capi ai Germanilor, cad sub măciucile lor uriaşe Dela păretele unde e bătaia Răură sângele, pare un isvor. Iară sub numărul care îi înconjoară Ca doi munţi se răstorn, Gem, apoi mor"!

La noi este un sat cu numele de *„40 de cruci"*.

Iată şi versuri franceze în care 40 joacă acelaş rol:

— Puisqu 'ainsi dans 2 mois,' tu prend 40 villes, Assuré des bons vers dont ton bras me repond Je t'attends dans 2 ans au bord de l'Hellespont".

— „Qu'au bout de 40 ans, Cinna, Pompée, Horace, Reviennent à la mode et retrouvent leur place" (*Corneille*).

De ce apoi Academia Franceză are 40 membri?

Din toate cele spuse până aci, se vede că 40 jucă odată un rol oarecare în omenire, care a făcut să mai rămâie urme şi până azi. Din punct de vedere ştiinţific, explicarea nu ar puteà fi decât în faptul că 40 a fost pe vremuri un termen de comparaţiune al numerelor mai mari, fiind numărul totul al degetelor dela mâini şi dela picioare dela două persoane, poate bărbatul şi soţia lui, sau ca fiind îndoitul lui 20, care a servit ca bază a sistemului de numeraţiune la unele popoare, din care a mai rămas şi azi nume ca *quatre-vingts* la Francezi: Din acest punct de vedere se poate urmări cele ce am scris în *Natura*, Anul X. No. 1 şi 2, sub titlul *„Aritmetica preistorică"*.

I. I.

* * *

2. **Problemă militară.** La un concurs pentru admitere în o şcoală militară, s a dat candidaţilor următoarea problemă: „Ştiind că un soldat ocupă în front 0,73 m., iar distanţele între rânduri dela piept sunt de 0,65 m. şi că soldaţii unui batalion sunt aşezaţi pe teren într'un triunghiu isoscel, să se determine":

1. In ce punct al triunghiului să se aşeze comandantul de batalion, pentru ca el să fie punctul de intersecţie al perpendicularei duse pe jumătatea secantei unui cerc, care ar trece prin vârful triunghiului de soldaţi şi prin jumătatea bazei acestui triunghiu.

2. Să se arate o construcţiune geometrică a figurei ce va rezultà.

I. D. T.

* * *

3. **Câtevà definiţii.** Extrag din *„Dicţionar de buzunar"* pentru tălmăcirea cuvintelor *radicale* de A. Stăncescu.

„Catetă. Baza unui triunghiu rectangular (în geometrie)". (Un triunghiu are 3 baze, şi 2 catete; care din ele?!)

„*Perpendicular*. Ce cade drept pe o suprafaţă formând un unghiu drept".

Ce cade? Dar dacă sunt mai multe unghiuri drepte, cade poliperpendicular?

„*Meridian*". — Cerc mare al sferei închipuit că trece prin poli şi care împarte globul pământesc în două emisfere".

Definiţia este supraabondentă. Apoi un cerc mare conţine o infinitate de poli.

„*Dicţionar*. Carte în care se coprinde cuvintele unei limbi ..... tălmăcite cu deamănuntul.....".

Ca mai sus?

P. Ţ.

* * *

4. **Formula plăcerii.** Dacă p este plăcerea de a câştigá o sumă s de bani, când jucătorul are averea a, atunci după calculul probabilităţilor de H. Poincaré avem:

$$p = \log \frac{s+a}{a} .$$

Pentru $a = 0$ plăcerea este infinită; pentru $s = 0$ plăcerea este nulă.

C. I. Ciorănescu.

* * *

5. **Spiritism.** Din o scrisoare a lui Babinet: „Vă va fi foarte greu să convingeţi pe om de adevăr; el este orb, el pune o bandă peste ochi ca să vază şi mai puţin. Credinţele spiritualiste sunt frumoase, însă ele tind să devină ridicole, dacă nu ştii să te serveşti de ele. Asta se întâmplă ca majoritatea adepţilor lor. Tu care eşti inteligent vei şti să dirijezi chestiunea pe partea cea bună, nu lucrà ca oamenii politici care nu ştiu ce vreà".

El credeà că în unele circomstanţe voinţa umană poate să neutralizeze legile atracţiunii.

I. I.

* * *

6. **Dadaismul în ştiinţă.** De când cu apariţia teoriei lui Einstein, se constată o oarecare tendinţă de arbitrariu în concepţiunile elevilor, în legătură cu noţiunile de definiţii bătrâneşti. Astfel un elev dela Şcoala de pilotaj a Aviaţiei (nu îndrăznesc să-i spun gradul, căci risc să nu fiu crezut), întrebat cari sunt ale trei dimensiuni ale unei corp, răspunde prompt:

„*Greutatea, volumul şi*....." şi după o profundă gândire, salvat în fine de un binefăcător sufleur, continuă: „*Culoarea*".

Căpitan Gr. Zapan.

* * *

7. **Iuţeala oratorică.** In „Universul" din 23 Septemvrie 1925, găsim următoarele la *„Mozaicuri"* :

„Când lua cuvântul VIVIANI, mort de curând, băgă în sperieţi pe stenografi, pentru că ţineà recordul pe care-l aveà înainte DÉROULÈDE şi PRESSEUSÈ. VIVIANI atingeà 200 de cuvinte pe minut. Urmaşul său este PÉRIER senator, care vorbeşte cu 190 cuvinte pe minut. La Cameră LOUIS MARTIN are 185 ; BRIAND vorbeşte cu 145 pe minut, MILLERAND şi HERRIOT cu 130. Marele orator JAURÈS vorbeà mai rar: 120".

Iată o iuţeală care numai depinde de *constanta gravitaţiei*, ci de *gravitatea .... momentului.*

C. C. POPOVICI.

* * *

8. **Matematica în literatură.** In volumul *„Balaurul"* al D-lui H. P. BENGESCU extragem următoarele, care întăresc afirmaţiile făcute de Lt.-Col. G. B. în Volumul XXIX. No. 17, recreaţia 7 :

Aşà dar puteai să te simţi ferm, stăpân pe un *echilibru fericit*, numai pentru că te opriseşi în dreptul unei *mici axe corespunzătoare*. Adineaurea căutarea ei păreà o *înclinare*. Pe când alergà pe asfaltul umed al peronului, simţirea care o mâna schimbà *poziţia aparentă* a trupului svelt ; ereà aplecat pe un *plan lunecător* şi devià sau se apropià de *punctul* spre care pornise. Iată că găsise *intersecţia* unde să afle isbânda. Un biet om ! *o mică cifră complimentară* după *socoteli necunoscute* şi migăloase în ţesătura firelor convergente" ! (pag. 44).

Tot acolo, la pag. 258 găsim definiţia lui Dumnezeu :

„Dumnezeu este poate un om la un coeficient infinit de măsură".

C. H. N.

* * *

9. **Infinit colorat.** In *„Le rêve"* de ZOLA găsim:

„.... Ses yeux ou se reflétait l'infini bleu de sa vision".

C. C. POPOVICI.

ARITMETICA ŞI ALGEBRA LUI GH. MANU

(Urmare) *).

Partea V tratează «**Despre cătimile numerice**». Prin aceasta autorul înţelege sistemele de numeraţiune, câte-vă teoreme asupra operaţiunilor aritmetice, aflarea c. m. m. m. c. şi a. c. m. m. d. c., calcule cu fracţiunile ordinare şi zecimale, precum şi fracţiile continue. In această parte găsim «*caracteristica systemei*» în loc de baza de numeraţiune, iar numeraţiunile sunt numite «*diadică*» séu «*binară* (întrebuinţată la Malacca)», «*triadică* séu *terneră* (la je- «vons popor în America meridională)», «*tetradică* séu *cuaterneră* «(la Flora insulă în resăritul insulei Java»), «*pentadică* séu *cuineră* «la Chinezi şi Malai)» şi «*numerarea decadică*, séu *zecimală*». Tot aci «Numim operaţiunea de a scri un număr în ciffre, *ciffra- «rea;* p. e. numărul sésse miimi, cinci sutimi, patru zecimi şi trei «unimi se va ciffra:

$$6z^3 + 5z^2 + 4z + 3».$$

Cuvintele zecimi, sutimi, miimi... în loc de zeci, sute, mii, se întrebuinţează şi azi în unele părţi şi în unele păturі.

Numerele prime le numeşte «*numere simple absolute*», iar numerele prime între ele sunt «*numere simple relative*» şi le defineşte ast-fel la § 91: «Numerele ale câror cel mai mare împărţitor «commun este 1 se numescu *numere simple relative;* p. e. 3 şi «7; 5, 11 şi 17. Nu este neapărat ca fie-care număr în parte se «fie un număr simplu absolutu; p. e. 4, 9, 25 séu 3, 7, 94 sunt «assemené numere simple relative».

La regulele de divizibilitate, după ce se găsesc condiţiile de divizibilitate prin 2, 3,... se constată în o «*Insemnare*» dela finele § 95, că «Caracterul împărţibilităţi unui număr prin 7, 13, ş. c. l. «nu este destul de simplu ca se aduce înlesnire pentru calcul».

Factorii primi sunt numiţi „*factori primitivi*". Iată dispozitivul de calcul pentru descompunerea lui 360 în factori primi:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

*) A se vedeà începutul în G. M. Anul XXXI, pag. 121.

iar dispozitivul calculelor pentru aflarea c. m. m. m. c. al numerelor 12, 16, 20, 24 şi 30 este

2	12 ,	16 ,	20 ,	24 ,	30
2	6 ,	8 ,	10 ,	12 ,	15
2	3 ,	4 ,	5 ,	6 ,	15
3	3 ,	2 ,	5 ,	3 ,	15
5	1 ,	2 ,	5 ,	1 ,	5
2		2 ,	1 ,	1 ,	1
		1			

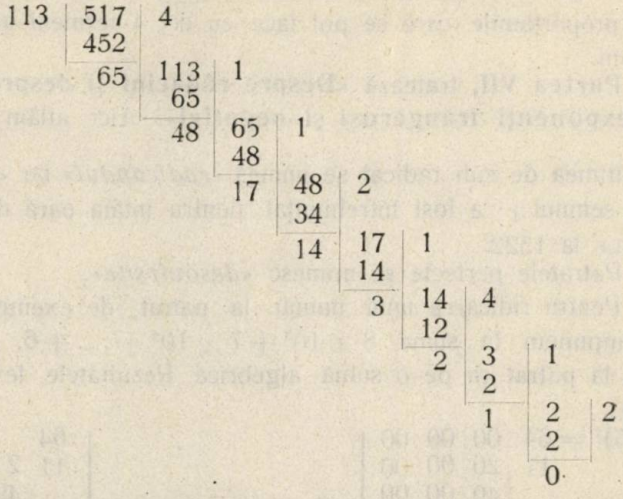
Când ajungem la numerele zecimale găsim că «A prescurta «o frăgere zecimală va să zice, *a lepăda una séu mai multe din «cele din urmă ciffre în drépta virgulei;* p. e. a scri în loc de «2,5621 numai 2,56».

Fracţiilor continue le dă următoarea definiţie: «O frăngere a «cârii numărător este 1 şi a cârii numitor este un număr întregu, «plus o frăngere, a cârei numărător este iarăşi 1 şi a cârei nu«mitor este un număr întregu, plus o frăngere; ş. c. l. adică o expressie de forma:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

«se numeşce frăngere continuă. Fie-care frăngere în parte, care «compune frăngerea continuă se numeşce *termenul* ei, séu *frăn«gerea integrantă*», aşà că $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$,... ar fi primul, al doilea,... termen sau prima, a doua,... frângere integrantă. In cele ce urmează, mai numeşte pe $1/a$ şi cea «d'ântêiu frăngere parţială» pe $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}$ «cea d'al duoilea frăngere parţială» etc. Dispoziţia calcu-

lului pentru transformarea în fracție continuă a lui 113/517, d. e. este:



Sunt interesante definițiile din **Partea VI,** care tratează despre «rapporturi și proporțiuni». Citez întreg paragraful 129: «Duoă «cătimi se potu compara între dînsele în duoă chipuri; séu cer- «cetând *cu cât covîrșéșce* una pe cealaltă séu *de căte ori coprinde* «una pe cealaltă. Resultatul acestei comparâri este în casul d'întêiu «un *ecces, o differență;* în casul din urmă *un cât* și se numește «un *rapport.* Acest rapport se numește, când este aflatu prin îm- «părțire *un rapport cătalu.* O potrivire între duoă rapporturi dif- «ferențiale (între duoă eccese) p. e. $a - b = c - d$ se citește *a, «se are differențial către b, ca c, către d* și se numește *o pro- «porție arithmetică* séu o *ecuidifferență.* O potrivire între duoă «rapporturi cătale (între duoă cătimi) p. e. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ séu $a:b = c:d$ «séu $a:b::c:d$ se citește *a, se are către b, ca c, către d* și se «numește *o proporție geometrică,* séu *o proporție,* séu *o analogie.*

«In amînduoă potrivirile se numescu *a, b, c* și *d, termenii «proporțiuni; a* și *c, antecedenții omologi; b* și *d, următorii «omologi; a* și *d, terminii de margine* séu *extremii; b* și *c, ter- «menii de mijloc* séu *medii*».

«De sunt într'o proporțiune amînduoi medii deopotrivă; p. e. «$a - b = b - d$ séu $a:b = b:d$ atunci se numește proporția con- «ținută; în parte numim atunci într'o ecuidifferență pe *b, mediul «ecuidifferențialu* și într'o proporțiune pe *b, mediul proporționalu*».

La § 135 al acestei părţi defineşte *«strămutârile proporţiunii»* de care nu face uz nicăiri în curs. Aceste strămutări sunt toate proporţiunile care se pot face cu cei 4 termeni ai unei proporţiuni.

Partea VII, tratează **«Despre rădăcini şi despre puterile «cu exponenţi frângeroşi şi negativi».** Aici aflăm că având $\sqrt[b]{a}$ cătimea de sub radical se numeà *«radicandul»* iar *«b indisul»* şi că semnul $\sqrt{\ }$ a fost întrebuinţat pentru întâia oară de Cristof Rudolf la 1522.

Patratele perfecte se numesc *«desovîrşite»*.

Pentru ridicarea unui număr la patrat, de exemplu 8746, îl descompunem în suma $8 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + \ldots + 6$, pe care o ridică la patrat ca pe o sumă algebrică. Rezultatele le pune sub forma:

$$(8746)^2 = \left.\begin{array}{r|r|r|r} 64 & 00 & 00 & 00 \\ 11 & 20 & 00 & 00 \\ & 49 & 00 & 00 \\ & 69 & 60 & 00 \\ & & 16 & 00 \\ & 10 & 48 & 80 \\ & & & 36 \\ \hline 75 & 49 & 25 & 16 \end{array}\right\} \text{„Séu lăsând nullele care nu au nici o influenţă assupra resultatului, la o parte".} \left\{\begin{array}{r|r|r|r} 64 & & & \\ 11 & 2 & & \\ & 49 & & \\ & 69 & 6 & \\ & & 16 & \\ & 10 & 48 & 8 \\ & & & 36 \\ \hline 76 & 49 & 25 & 16 \end{array}\right.$$

şi scoate regula «Luom pătratul celei d'ântêiu ciffre; apoi îndoitul «product din cele duoă d'ântêiu ciffre, apoi pătratul celei d'al duoilea «ciffre din stânga, apoi...».

Pentru extragerea rădăcinei patrate procedează la fel şi dispune calculele:

$$\sqrt{12|02|00|89} = \pm\ 3\,4\,6\,7$$

$$\begin{array}{rr|l} (a^2 =) & 9 & \\ \hline (2a =) & 6 & 302 \\ (2ab =) & 24 & 256 \\ (b^2 =) & 16 & \\ \hline (2\alpha =) & 68 & 4600 \\ (2\alpha\beta =) & 408 & 4116 \\ (\beta^2 =) & 36 & \\ \hline (2A =) & 692 & 48489 \\ (2AB =) & 4844 & 48489 \\ (B^2 =) & 49 & \\ \hline & & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{a\ b}_{\alpha\ \beta}$$

$$\underbrace{\alpha\ \beta}_{A\ B}$$

La fel procedează pentru ridicarea la cub şi extragerea rădăcinei cubice.

In **Partea VIII** începe studiul ecuaţiunilor. Defineşte «*Algebra* este sciinţa, care învéţă a întocmi ecuaţiuni pentru un scop óare-care, şi a afla apoi dintr'însele valórele necunoscutelor aşa, încât ecuaţiunile se se prefacă în indentităţi».

Ecuaţiunea de gradul al doilea este numită şi «*pătrată*», cea de gradul III şi IV respectiv «*cubică*» şi «*bipătrată*», chiar când este complectă. Când se trec toţi termenii eunei ecuaţiuni în membrul I se zice că s'a „*redus ecuaţiunea la nullă*".

Partea IX tratează despre „*progresiunile ecuidifferenţiale*", care nu sunt de cât progresiile aritmetice ale căror raţii se numesc „*differenţa, raţiea* sau *cuvântul progressiuni*". Produsul termenilor unei progresii aritmetice este „*factoriellă*", ea se scrie $a^{n|d}$ şi se citeşte «a^n *cu diferenţa d.* Aci numim în parte pe *a, baza* sau «*dignandul*; pe *n exponentul* şi pe *d, differenţa factorielli.* Aşà «dar este după explicaţiune

$$a^{n|d} = a.(a+d).(a+2d)\ldots(a+(n-1)d)$$

«unde poate fi *d* negativu sau positivu» şi dă exemplele

$$7^{3|1} = 7.8.9 \quad \text{şi} \quad 7^{4|-3} = 7.4.1.(-2).$$

In special «factoriella $1^{n|1}$ séu $1^{n|-1}$ însemnéză dar productul «$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$. Acéstă factoriellă se scrie mai simplu $n!$ «séu (n) şi se numeşte *facultatea n* séu a *n^lea facultate*; iar *n, baza* «*facultâţi*».

«Câtul $\frac{a^{n|-1}}{n!}$ se însemnéză mai simplu prin a^n, se citeşce «*a, cu indisul n* şi se numesce *coefficientul binomalu*, Aci numim «în parte *a câtimea coefficientului binomalu*, şi *n indisul lui*».

In fine în acest capitol tratează şi „*Despre progressiunile «ecuidifferenţiale de un grad superioru*» pe care le defineşte: «De avem un şir de numere óre-care; de scădem fie-care număr «din numărul următoru şi de formămu aşa *ântêiul şir de diferenţe*; «De scădem apoi fie-care număr al acestui şir din numărul următoru «şi de formăm aşa *al doilea şir de differenţe*; De urmâm apoi «tot assemené, ajungem în sfîrşit la un şir de differenţe, *p. e. la «al n^lea şir de diferenţe*, care se compune numai din termeni deopo- «trivă între dînşii. Numim atunci şirul primitivu de numere *o «progressie ecuidifferenţială de gradul al n^lea* séu *superioru*».

La analiza combinatoare numeşte aranjamentele «*variaţiuni* «séu *rânduiri*» şi le notează cu simbolul «$\overset{(m)}{\text{K}}_{(n)}$», combinările le nu- «meşte *conjugâri* séu *combinaţiuni*» şi le notează cu «$\overset{(m)}{\text{C}}_{(n)}$», iar permutările, aranjamentele şi combinaţiunile se numesc la un loc «*grămădiri*».

In **Partea XI** întrebuinţează noţiunea «$\log^a b$» pentru $\log_a b$. Numărul «$\log^a b$» îl citeşte «*logarithmul b pentru baza a*». In «parte se numeşce dar cătimea *a baza*; iar cătimea *b*, *logarithmandul* séu numărul»; Intrebuinţează şi notaţiunea «$\text{Log}^a b$».

Complimentul unui număr faţă de 10 se numeşce «*compli-* «*nirea decadică* séu *arithmetică* a numărului *a*; şi se însemnéză «prin CD*a*».

«CD*a*» are întrebuinţările cologaritmului.

Cartea II cuprinde o singură parte, **Partea XIV** formată din 7 capitole şi tratează despre **„Sciinţă Mărimilor"**. Această ştiinţă a mărimilor este un şir de aplicaţiuni numerice cu probleme asupra regulilor de trei, a dobânzilor, a anuităţilor, aliajelor («séu *legămînt*»), etc. Mai toate calculele sunt cu numere complexe. Se fac numeroase probleme asupra cursurilor valorilor, chiar se şi dă la pagina 424 un tabel de cursul poliţelor şi banilor la Berlin din ziua de 18 Ianuarie 1825. Aceasta dovedeşte că problema valutară era la acea epocă tot atât de principală ca şi azi.

Cartea se termină cu o **„Scara"** şi cu o erată intitulată **„greşeli «de tipar principale"**. Aceste greşeli sunt în număr de 19 ceia ce este puţin pentru o carte de 541 pagini tipărită la acea epocă în româneşte la Paris.

Cartea lui GEORGE-IÓN MANU este elementară, expusă cu simplicitate şi are importanţă din punctul de vedere al istoriei dezvoltărei limbajului matematic, precum şi acela enunţat la început, al contribuţiei militarilor la studiul matematicilor în ţara noastră, şi, din acest punct de vedere va trebui să se scrie aici şi despre rolul decedatului general J. LAHOVARY, fost profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

AȘEZAREA IN ORDINE NATURALĂ A RĂDĂCINILOR A DOUĂ ECUAȚII DE GRADUL AL TREILEA [1]).

(Urmare) [2]).

Să presupunem acum că în cazul în care ne găsim *c.*l avem în acelaș timp

$$e > 0, \quad e_1 > 0,$$

deci avem așezările (7) și așezările analoage (8).

$$(8) \qquad \begin{array}{l} -a'\ \alpha\ \beta\ a'\ \gamma\ ;\ \alpha\ \beta\ -a'\ a'\ \gamma\ ; \\ \alpha\ -a'\ a\ \beta\ \gamma\ ;\ \alpha\ -a'\ \beta\ \gamma\ \alpha. \end{array}$$

Combinând fiecare așezare din șirul (7) cu fiecare așezare din șirul (8), se găsesc numai așezările scrise mai jos posibile, cărorà le corespund așezările rădăcinilor celor două ecuații (1) și (2), așezări pe cari le-am trecut așà cum se corespund:

$$\left.\begin{array}{l} -a'\ \alpha\ \beta\ a'\ \gamma \\ \alpha'\ \beta'\ -a\ a\ \gamma' \end{array}\right\} \alpha'\ \alpha\ \beta'\ \beta\ \gamma\ \gamma'$$

$$\left.\begin{array}{l} -a'\ \alpha\ \beta\ a'\ \gamma \\ \alpha'\ -a\ a\ \beta'\ \gamma' \end{array}\right\} \alpha'\ \alpha\ \beta\ \beta'\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\ \beta\ -a'\ a'\ \gamma \\ -a\ \alpha'\ \beta'\ a\ \gamma' \end{array}\right\} \alpha\ \beta\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\ \beta\ -a'\ a'\ \gamma \\ \alpha'\ -a\ \beta'\ \gamma'\ a \end{array}\right\} \alpha'\ \alpha\ \beta\ \beta'\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\ -a'\ a'\ \beta\ \gamma \\ -a\ \alpha'\ \beta'\ a\ \gamma' \end{array}\right\} \alpha\ \alpha'\ \beta'\ \beta\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\ -a'\ a'\ \beta\ \gamma \\ \alpha'\ -a\ \beta'\ \gamma'\ a \end{array}\right\} \alpha\ \alpha'\ \beta'\ \beta\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\ -a'\ \beta\ \gamma\ a' \\ \alpha'\ \beta'\ -a\ a\ \gamma' \end{array}\right\} \alpha'\ \alpha\ \beta'\ \beta\ \gamma\ \gamma'$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\ -a'\ \beta\ \gamma\ a' \\ \alpha'\ -a\ a\ \beta'\ \gamma' \end{array}\right\} \alpha'\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \beta'\ \gamma'.$$

[1]) Acest articol este în strânsă legătură cu articolul ce am publicat în „G. M.“, noemvrie 1924.

[2]) A se vedeà începutul în „G. M.“, vol. XXXI, pag. 125.

Să presupunem acum că tot în cazul *c.*I am aveà

$$e<0, \quad e_1<0.$$

Intre rădăcinile α, β, γ şi $-a', a'$ pe deoparte şi între α', β', γ şi $-a, a$ pe de altă parte, avem următoarele dispoziţii posibile, cărorà le-am trecut în drept aşezările corespunzătoare ale rădăcinilor ecuaţiilor (1) şi (2):

$$\left.\begin{matrix} -a' & \alpha & \beta & \gamma & a' \\ \alpha' & -a & \beta' & a & \gamma' \end{matrix}\right\} \quad \alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma'$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha & -a' & \beta & a' & \gamma \\ -a & \alpha' & \beta' & \gamma' & a \end{matrix}\right\} \quad \alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha & -a' & \beta & a' & \gamma \\ \alpha & -a & \beta' & a & \gamma' \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma' \\ \alpha' \; \alpha \; \beta \; \beta' \; \gamma' \; \gamma \\ \alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma. \end{matrix}$$

Se vede în acest caz că la ultima aşezare a rădăcinilor ecuaţiilor şi derivatelor, corespunde nu numai o singură aşezare a rădăcinilor ecuaţiilor, ci trei. Trebuesc deci deosebite aceste trei aşezări una de alta.

Pentru aceasta, vom formà ecuaţia care are ca rădăcini expresiile $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$. Nu avem decât să eliminăm pe x între ecuaţiile:

$$x^3 + px + q = 0$$

$$x^3 + mx + n - y = 0$$

şi se obţine ecuaţia căutată

$$(9) \quad y^3 - 3(q-n)y^2 + [3(n-q)^2 + p(p-m)^2]y - E = 0,$$

unde E este eliminantul găsit mai sus. Fiindcă am presupus α, β, γ reale, rădăcinile acestei ecuaţii vor fi şi ele reale. Este vorba de a distinge următoarele aşezări:

$$\alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma'$$

$$\alpha' \; \alpha \; \beta \; \beta' \; \gamma' \; \gamma$$

$$\alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma.$$

Se observă uşor că pentru aşezarea a doua avem

$$\varphi(\alpha)>0, \quad \varphi(\beta)>0, \quad \varphi(\gamma)>0,$$

iar pentru celelalte aşezări $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$ nu mai au aceste semne. Pentru a distinge deci aşezarea a doua, de celelalte, vom căutà dacă ecuaţia (9) are toate rădăcinile pozitive. Insă dacă considerăm ecuaţia de gradul al treilea

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0,$$

care are toate rădăcinile reale, se ştie că pentru ca să aibă toate rădăcinile pozitive trebue să avem:

$$a_1 < 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 < 0 \tag{10}$$

şi reciproc. Deci dacă în cazul în care ne găsim vom aveà inegalităţile (10) pentru ecuaţia (9), vom aveà aşezarea

$$\alpha' \; \alpha \; \beta \; \beta' \; \gamma' \; \gamma.$$

Dacă inegalităţile nu vor fi adevărate rămân posibile aşezările:

$$\alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma'$$

$$\alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma.$$

Se observă că pentru prima din aceste aşezări avem

$$\varphi(\alpha) > 0, \quad \varphi(\gamma) < 0,$$

iar pentru a doua avem tocmai invers. Dacă deci vom aveà

$$\varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) > 0, \tag{11}$$

avem aşezarea $\alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma,$

iar dacă

$$\varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) < 0, \tag{12}$$

vom aveà $\alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma'.$

Trebue să exprimăm condiţiile (11) sau (12) în funcţie de coeficienţii celor două ecuaţii. Pentru aceasta avem:

$$\varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) = (\gamma - \alpha)(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 + m).$$

Prin notaţii avem însă

$$\gamma - \alpha > 0,$$

iar pe de altă parte din cauza relaţiei

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

avem $\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2=\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$

şi deci inegalitatea (11) poate fi înlocuită cu

$$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)+3m>0,$$

sau încă

$$m-p>0.$$

Deci şi în acest caz putem şti cum sunt dispuse rădăcinile ecuaţiilor (1) şi (2).

Să presupunem că suntem tot în cazul c. I, adică rădăcinile ecuaţiilor (1) şi (2) sunt presupuse toate reale şi încă $E>0$ şi că avem acuma

$$e>0,\quad e_1<0.$$

In aceste condiţiuni avem următoarele aşezări între rădăcinile ecuaţiilor şi derivatelor şi ca mai sus am pus în drept aşezările corespunzătoare ale rădăcinilor ecuaţiei (1) şi (2):

$$\left.\begin{matrix}-a'\ \alpha\ \beta\ a'\ \gamma\\ \alpha'\ -a\ \beta'\ a\ \gamma'\end{matrix}\right\}\ \alpha'\ \alpha\ \beta'\ \beta\ \gamma\ \gamma'$$

$$\left.\begin{matrix}-a'\ \alpha\ \beta\ \alpha'\ \gamma\\ \alpha'\ -a\ \beta'\ a\ \gamma'\end{matrix}\right\}\ \alpha'\ \alpha\ \beta\ \beta'\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\ \beta\ -a'\ a'\ \gamma\\ -a\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'\ a\end{matrix}\right\}\ \alpha\ \beta\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\ \beta\ -a'\ a'\ \gamma\\ \alpha'\ -a\ \beta'\ a\ \gamma'\end{matrix}\right\}\ \alpha'\ \alpha\ \beta\ \beta'\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\ -a'\ a'\ \beta\ \gamma\\ -a\ a'\ \beta'\ \gamma'\ a\end{matrix}\right\}\ \alpha\ \alpha'\ \beta'\ \beta\ \gamma'\ \gamma$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\ -a'\ a'\ \beta\ \gamma\\ \alpha'\ -a\ \beta'\ a\ \gamma'\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\alpha'\ \alpha\ \beta'\ \beta\ \gamma\ \gamma'\\ \alpha\ \alpha'\ \beta'\ \beta\ \gamma'\ \gamma\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\ -a'\ \beta\ \gamma\ a'\\ \alpha'\ -a\ \beta'\ a\ \gamma'\end{matrix}\right\}\ \alpha'\ \alpha\ \beta'\ \beta\ \gamma\ \gamma'.$$

Numai în două cazuri ne rămâne să decidem

Intre aşezările

$$\alpha'\ \alpha\ \beta'\ \beta\ \gamma\ \gamma'$$

$$\alpha'\ \alpha\ \beta\ \beta'\ \gamma'\ \gamma,$$

vom decide ca mai sus cu ajutorul inegalităţilor (10), scrise pentru ecuaţia (9).

Între dispozițiile

$$\alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma'$$
$$\alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma,$$

vom decide ca mai sus cu ajutorul semnului cantității

$$m - p,$$

așà cum s'a explicat acolo.

Ne rămâne să considerăm cazul c. I cu inegalitățile

$$e < 0, \quad e_1 > 0.$$

Dăm mai jos așezările corespunzătoare acestui caz, după cum am făcut și mai sus:

$$\left.\begin{matrix} -a' \; \alpha \; \beta \; \gamma \; a' \\ \alpha' \; \beta' \; -a \; a \; \gamma' \end{matrix}\right\} \; \alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma'$$

$$\left.\begin{matrix} -a' \; \alpha \; \beta \; \gamma \; a' \\ \alpha' \; -a \; a \; \beta' \; \gamma' \end{matrix}\right\} \; \alpha' \; \alpha \; \beta \; \gamma \; \beta' \; \gamma'$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha \; -a' \; \beta \; a' \; \gamma \\ -a \; \alpha' \; \beta' \; a \; \gamma' \end{matrix}\right\} \; \alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha \; -a' \; \beta \; a' \; \gamma \\ \alpha' \; \beta' \; -a \; a \; \gamma' \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma \\ \alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma' \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha \; -a' \; \beta \; a' \; \gamma \\ \alpha' \; -a \; a \; \beta' \; \gamma' \end{matrix}\right\} \; \alpha' \; \alpha \; \beta \; \beta' \; \gamma' \; \gamma$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha \; -a' \; \beta \; a' \; \gamma \\ \alpha' \; -a \; \beta' \; \gamma' \; a \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \alpha' \; \alpha \; \beta \; \beta' \; \gamma' \; \gamma \\ \alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma. \end{matrix}$$

Există și aici două cazuri, în care ne rămâne a decide. Între așezările:

$$\alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma$$
$$\alpha' \; \alpha \; \beta' \; \beta \; \gamma \; \gamma',$$

vom decide cu semnul lui $m - p$. Între așezările:

$$\alpha' \; \alpha \; \beta \; \beta' \; \gamma' \; \gamma$$
$$\alpha \; \alpha' \; \beta' \; \beta \; \gamma' \; \gamma,$$

vom decide cu ajutorul inegalităților (10). Cazul când rădăcinile ecuațiilor (1) și (2) sunt toate reale și $E < 0$, se reduce la cazul

c. I tratat, căci atunci avem $E' > 0$. Am urmărit în această lungă discuţie posibilitatea chestiunei propuse şi nu m'am preocupat de simplificările posibile. Se vede câtă complicaţie ar fi în cazul ecuaţiei complete de gradul al treilea, dar cred că din cele de mai sus reese o idee generală, ce în aplicaţiuni s'ar puteà folosì în cazuri destul de întinse.

TH. ANGHELUŢĂ.

NOTE MATEMATICE

19. *Alte zece aritmetici diverse.* (Vezi Nota No. 72, pag. 450 Anul XXX).

101. **Infinitului.** *Emerson.* The arithmetic of infinites.

102. **Intregilor complexi.** Vezi Bulletin of the American Mathematical Society. Anul XXX, pag. 251.

103. **Intorsăturilor.** Idem. Anul XXVIII. Pag. 97.

104. **Mistică.** Vezi *Gino Loria.* Le scienze essate nell'antica Grecia. Milan 1914. Pag. 817.

105. **Nodurilor.** Ca la No. 103.

106. **Pitagorică.** Vezi *L. Brunswig.* Les étapes de la philosophie mathématique. Pag. 396.

107. **Pură.** Idem. Pag. 818.

108. **Quaternionilor.** Ca la No. 102.

109. **Simplificată *)** *R. Boteanu.* Aritmetica simplificată şi aplicată la arta militară. Bucureşti 1871.

110. **Teologumenă.** *Victorio de Fulco-Jamblicus.* Theologumena arithmeticae. Lipsca 1922.

(Va urmà). I. IONESCU.

*) Comunicată de D-l E. ILIESCU.

20. *Asupra exercițiului 36.* Exercițiul No. 36 afară de soluțiile:

$$22500 = 150^2,\ 44100 = 210^2 \text{ și } 44944 = 212^2$$

care sunt arătate, mai admite și următoarele soluții care s'au pierdut din vedere:

$$23716 = 154^2 - 32761 = 181^2 \text{ și}$$
$$18769 = 137^2 - 81796 = 286^2.$$

Aflarea soluțiilor din urmă, fiind analoagă, nu o mai arăt.

GH. VASILIU.

21. *Asupra teoremei lui* AUBERT *).

Se cunoaște teorema lui AUBERT:

Dacă două triunghiuri ABC și A'B'C' înscrise într'o conică sunt homologice și se ia un punct M pe conică, punctele de întâinire α, β, γ ale dreptelor BC și MA', CA și MB' AB și MC', sunt situate pe aceași dreaptă Δ, ce trece prin centrul de homologie D.

Să presupunem acum că conica este un cerc, în care ABC și A'B'C' sunt 2 triunghiuri homologice și înscrise în cercul O. Fie A'' piciorul isogonalei cevienei AA', pe cerc. Conform teoremei lui AUBERT, dreptele A''B', A''C' și A''A' taie pe CA, AB și BC în 3 puncte colineare pe dreapta ce trece prin centrul de homologie D. Fie β, γ și α aceste puncte. Dreapta A''A' însă e paralelă cu BC, deci punctul α este la infinit, adică dreapta $\beta\gamma$ e paralelă cu BC și trece prin D.

La fel, dreptele $\gamma_1\alpha_1$, $\alpha_2\beta_2$ obținute cu ajutorul picioarelor isogonalelor cevienelor BB' și CC' sunt respectiv paralele cu laturile CA și AB ale lui ABC și concurente în centrul de homologie D, al celor două triunghiuri ABC și A'B'C'.

Această proprietate pune în evidență o nouă construcție a punctelor isogonale.

Cunoscând un punct M, pentru a-i construi isogonalul lui, facem operațiile următoare:

Construim punctele A', B', C', ducând cevienele lui M; prin punctul M ducem paralele la laturile lui ABC, pe care le taie în β, γ; γ_1, α_1; α_2, β_2.

---

*) A se vedea: *Rouché* et *de Comberousse, Traité de Géométrie 2—e partie,* pag. 453.

Perechile de drepte $B'\beta$, $C'\gamma$; $C'\gamma_1$, $A'\alpha_1$; $A'\alpha_2$, $B'\beta_2$, se taie două câte două pe cercul ABC, în picioarele isogonalelor cevienelor lui M, pe cercul ABC; deci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 se taie în isogonalul punctului M, față de ABC.

Figura mai are și alte proprietăți:

S'au format două triunghiuri $\alpha_1\beta_2\gamma$ și $\alpha_2\beta\gamma_1$, care sunt homologice, căci vârfurile lor sunt pe cele 3 paralele duse prin centrul de homologie D.

Deci perechile de drepte $(\gamma\alpha_1, \beta\gamma_1)$, $(\gamma_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2)$, $(\alpha_2\beta, \beta_2\gamma)$ se intersectează pe o dreaptă Δ.

Dreptele $\beta\gamma$, $\gamma_1\alpha_1$, $\alpha_2\beta_2$ fiind paralele la laturile triunghiului ABC, urmează că și paralelele duse prin vârfurile triunghiului ABC, la laturile triunghiurilor $\alpha_1\beta_2\gamma$ și $\alpha_2\beta\gamma_1$, sunt concurente în două puncte M_1 și M_2.

Reciproca acestei teoreme este următoarea:

Dacă unind un punct M de pe o conică circumscrisă la două triunghiuri ABC și A'B'C', cu vârfurile unuia din triunghiuri, intersecțiile acestor drepte cu laturile celuilalt triunghiu sunt colineare, cele două triunghiuri sunt homologice.

Această teoremă se demonstrează ușor cu ajutorul homografiei; ea are o aplicație frumoasă:

Dacă considerăm proecțiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghiu ABC, pe laturile acestui triunghiu, făcute sub un unghiu α, ele sunt colineare și deci punctele unde aceste proectante taie a doua oară cercul, sunt vârfurile unui triunghiu homologic și isologic cu ABC. Fie A'B'C' acest triunghiu.

Acesta este cazul dreptei lui Simson.

Când $\alpha = 90^0$ triunghiurile sunt homologice și ortologice.

De aici decurge soluția altei probleme:

Să se construiască, înscris în acelaș cerc cu un triunghiu ABC, un alt triunghiu homologic și isologic cu acesta.

Când $a = 0^0$ sau 180^0, triunghiurile ABC și A'B'C' devin metaparalele (paralelogice), homologice și invers asemenea.

De aici teorema:

Două triunghiuri invers asemenea înscrise în acelaș cerc, sunt homologice.

Centrele de isologie, în cazul general, sunt ambele pe cercul ABC.

Un caz particular al reciprocei teoremei lui AUBERT este şi problema 3054, din «G. M.» Vol. XXVIII, p. 360.

MIHAIL I. FOCŞENEANU.
Sub-Locotenent.

22. Domnul O. POPEA în *Nota 65* din «G. M.» vol. XXX p. 379, găsind soluţiunile (3) şi (4), se încredinţează în prima *Observare* că din ele poate deduce formulele date de mine în *Nota 33* „G. M." vol XXIX pag. 172.

Se poate observà că reciproc formulele găsite de D-sa (3) şi (4) se deduc respectiv din (7) şi (8), întrebuinţând ca formule de reversibilitate respectiv:

$$A = u,\ B = m,\ C = u + v \quad \text{şi} \quad A = u + v,\ B = m,\ C = u.$$

Concluziunea se degajează dela sine.

O. ŢINO.

23. *Asupra problemei 3158.* Soluţia dată acestei probleme a fost probabil desprinsă din cadrul unei metode generale pentru rezolvarea ecuaţiunilor asemenea celei din problema 3158. In cazul particular însă al acestei probleme, cred că ar fi trebuit separat indicată şi soluţia simplă:

$$(1 + i)^x = (1 + i)^4 \cdot \frac{x}{4}.$$

sau

$$(1 + i)^4 = -4,$$

deci ecuaţia se mai poate scrie:

$$\overset{x}{(-4)^4} + x = 0,$$

unde prin operaţiunile de ridicare la puterea a 4-a nu s'a pierdut nici un semn, şi de unde se vede uşor că $x = 4$ este singura soluţie.

CĂP. I. LINTEŞ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ.

Seziunea Octomvrie, 1925.

MATEMATICI GENERALE.

20 Octomvrie 1925.

Proba teoretică.

1°. Să se studieze variaţiunea funcţiunii

$$y = \frac{2x^4}{(x+1)^3}$$

şi să se reprezinte grafic.

2°. Să se determine coordonatele punctului în care asimptota oblică a curbei precedente, este tăiată de tangenta dusă la curbă în punctul cu abscisa 1.

3°. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$3y''' - 2y'' - 5y' = 10x^2 - 2x - 1 + 17\cos x.$$

Proba practică.

1°. Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\cdot 4} \frac{2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 6}{x^6 - 4x^4 - x^2 + 4}\, dx.$$

ALGEBRA SUPERIOARĂ.

25 Octomvrie 1925.

Proba teoretică.

1°. Să se studieze ecuaţia:

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x + \alpha.$$

2°. Să se discute sistemul:

$$x[1 - \cos(\alpha+\beta)] + y\sin(\alpha+\beta) = a(1-\cos\beta)$$
$$x\sin(\alpha+\beta) - y[1-\cos(\alpha+\beta)] = a\sin\beta.$$

3°. Să se studieze seria

$$u_n = e^{\frac{1}{x}} - \sin\frac{1}{x}.$$

Proba practică.

1°. Să se studieze variaţia funcţiunii

$$y = \mathrm{L}\,(x^2 + x + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

GEOMETRIA ANALITICĂ.

25 Octomvrie 1925.

Proba teoretică.

1°. Să se scrie ecuaţia parabolei (P) tangentă în origină la axa $0x$, având pe $0y$ ca axă şi trecând prin punctul A (— 1, 2).

2°. Să se scrie ecuaţia generală a conicelor (C) tangente în 0 la parabola (P), care trec prin punctul A şi printr'un punct M variabil pe parabola (P).

3°. Printre conicele (C) sunt o infinitate de conice (Γ), care au bisectoarea întâi ca direcţie asimptotică. Să se afle ecuaţia conicelor (Γ). Să se afle pentru o conică oarecare (Γ) cele două asimptote ale sale. Să se afle locul centrelor conicelor (Γ).

4°. Printre conicele (Γ) se află o iperbolă echilateră. Să se construiască această iperbolă echilateră, determinându-se poziţia şi mărimea axelor sale.

Proba practică.

1°. Să se construiască curba:

$$2x^2y = x^3 - 3x + 2.$$

CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL.

Partea I.

14 Octomvrie 1925.

Proba teoretică.

1°. Să se calculeze integrala:

$$\int \frac{Px^2 + Qx + R}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx,$$

în care P, Q, R, a, b, c, sunt numere date. In particular, coeficientul a poate fi pozitiv, negativ sau nul.

Ca aplicaţie, să se calculeze:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}\, dx.$$

Proba practică.

1°. Să se calculeze cu două cifre zecimale exacte:

$$\int_1^2 \left(\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}\right)^2 dx.$$

CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL.

Partea II.

20 Octomvrie, 1925.

Proba teoretică.

1°. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$y^2y'^2 - 2xyy' + 2y'^2 - x^2 = 0.$$

Să se determine:

1. Integrala generală.
2. Integrala singulară.
3. Traectoriile ortogonale ale curbelor reprezentate prin integrala generală.

Proba practică.

1°. Să se transforme ecuaţia cu derivate parţiale

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

prin schimbarea variabilelor independente x şi y în u şi v, noile variabile fiind legate de cele vechi prin ecuaţiile:

$$x/y = u, \quad xy = v$$

şi să se integreze noua ecuaţie astfel obţinută.

MECANICA RAŢIONALA.

Partea II.

25 Octomvrie 1925.

Proba teoretică.

1°. Definiţia unghiurilor lui EULER.

2°. Forţa vie a unui solid în jurul unui punct fix.

3°. Un cerc greu şi omogen alunecă pe planul $x0y$ orizontal. Se cere mişcarea cercului, cercul având un singur punct comun cu planul.

Proba practică.

1°. Să se calculeze momentul de inerţie al sfertului de sferă cu raza 1, în raport cu O.

2. Să se calculeze elipsoidul de inerţie al sfertului de sferă.

TEORIA FUNCŢIUNILOR.

Partea I.

6 Octomvrie 1925.

Proba teoretică.

1°. Fie C intersecţia planului $z = 2\lambda x$ cu paraboloidul: $z = x^3 + y^2$.

1. Să se determine raza de curbură R într'un punct oarecare al curbei C.

2. Fie R_0 raza de curbură a curbei în originea O a axelor. Parametrul λ variind, să se arate cum variază R_0. Să se verifice rezultatele cu ajutorul teoremei lui MEUSNIER.

2°. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei $z = y^2 e^x$.

Proba practică.

1°. Unui punct $M(x, y)$ de pe curba (Γ), reprezentată prin ecuaţia $y = f(x)$, facem să corespundă punctul $M_1(x_1, y_1)$ prin formulele

$$x_1 = x - \frac{2y}{y'} \quad , \quad y_1 = \frac{y}{(y')^2} .$$

Când M descrie curba Γ, punctul M_1 descrie o curbă Γ_1.

1. Să se arate că tangentele în M şi M_1, respectiv la curbele Γ şi Γ_1, sunt perpendiculare şi se întâlnesc pe axul Ox.

2. Să se calculeze în funcţie de y, y' şi y'', raza de curbură a curbe Γ_1 în punctul M_1.

TEORIA FUNCŢIUNILOR.

Partea II.

8 Octomvrie 1925.

Proba teoretică.

1. Să se calculeze cu ajutorul reziduurilor, integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\cos x + a)(\cos x + b)} ,$$

a şi b fiind reale şi mai mari ca 1.

2. $f(z)$ fiind o funcţiune olomorfă în triunghiul OAB; $OA = OB = a$, să se arate, utilizând integrala dealungul lui OABO a funcţiunii $f(z)$, că avem următoarea egalitate:

$$\int_0^a [f(u) - if(iu)]\,du = (1-i)\int_0^a f(a-u+iu)du.$$

Proba practică.

1. Să se găsiască sub forma $\alpha + i\beta$, rădăcinile ecuaţiei

$$a\sin z + b\cos z = i,$$

α, β, a şi b fiind reale. Când această ecuaţie admite rădăcini reale sau o rădăcină pur imaginară?

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Anul IX. No. 9—10, Bucureşti 1925. PETRU PONI et ANGHEL SALIGNY, de Redactorul Buletinului, DR. GR. ANTIPA. Sur certains développements des fonctions holomorphes en série de fractions rationelles, de A. ANGELESCU. ANGHEL SALIGNY, de ION IONESCU.

Mathesis. Tomul XXXIX. No. 9. Noemvrie 1925. Bruxelles. Construcţia tangentei la podara şi la pseudopodara unei curbe strâmbe, de R. DEAUX. Note diverse asupra ortopolului, de R. GOORMAGHTIGH. Exerciţii de geometria analitică, de AD. M.

Journal de Mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT, Anul 50. No. 5. Decemvrie 1925. Paris. Câtevà figuri de matematiciane, de MAURICE d'OCAGNE.

Foaia matematică. Anul II, No. 12. Decemvrie 1925. Chişinău. Parenteze de ordin superior, de B. IG. BAIDAFF.

Curierul matematic. Vol. I. No. 10. Decemvrie 1925. Bucureşti. (Litografiat). Proprietăţi în legătură cu triunghiurile pedale, de O. BOLGIU.

Raoul Bricard. *Lecons de cinématique.* Tome I. *Cinématique théorique.* Paris 1926. Volumul conţine lecţiunile pe care autorul le face de patru ani la Şcoala Centrală de arte şi manufacturi din Paris şi prin urmare interesează în prima linie pe elevii Şcoalelor tecnice superioare şi pe inginerii de diferite specialităţi. In expunere s'a utilizat geometria pură, geometria analitică sau metoda vectorială, după cum s'a găsit mai nemerit şi mai clar de expus. Cinematica este alcătuită pentru dânsa însăşi, iar nu ca introducere la dinamică. Volumul următor va tratà mecanismele.

Primul capitol este o expunere sumară a calculul vectorial, iar al doilea un rezumat de propietăţi ale curbelor în spaţiu, ale înfăşuratelor şi ale suprafeţelor riglate, necesare studiului şi problemelor cinematice. Capitolul III conţine elemente de geometrie riglată, în care se ia ca element al spaţiului linia dreaptă. Cu capitolul IV se începe studiul cinematicei, tratându-se problemele deplasărilor în plan şi în spaţiu, indepedent de timpul în care se efectuiază. Acest element se introduce în capitolul V, unde se tratează proprietăţile generale ale mişcărilor. Capitolul VI se ocupă de compunerea mişcărilor şi de mişcările relative. Capitolul VII tratează despre generarea mişcărilor, capitolul VIII despre proprietăţile geometrice ale mişcării plane, iar următorul despre ale mişcării în spaţiu. Capitolul X se ocupă de mişcările cu mai multe parametre. Ultimele trei capitole conţin aplicaţiuni la teoriile deplasării, mişcării plane şi mişcării solidelor. Volumul se termină cu o Notă asupra sistemelor de poziţiune şi cu Note istorice şi bibliografice.

Autorul, ca inginer şi profesor la o şcoală de ingineri, a avut necontenit în vedere, pe lângă latura matematică a cinematicei şi aplicaţiunile ei tecnice. Tot ce ar puteà folosì la studii de mişcări şi de mecanisme, s'a avut în vedere şi s'a tratat la locul lor; mai mult încă, s'a reamintit în acest scop şi teoriile geometrice necesare şi care nu fac obiectul unui învăţământ special în şcolile tecnice. Cinematica D-lui Bricard poate fi utilizată cu folos, nu numai de elevii şcoalelor tecnice superioare, dar şi de inginerii care se interesează de progresele şi aplicaţiunile cinematicei.

I. Ionescu.

L'Abbé P. J. E. Goedseels. *Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés.* Louvain 1925. Ediţia 5.

Intr'o broşură de 23 pagini, sunt expuse unele chestiuni referitoare la metoda celor mai mici patrate, pentru repartizarea erorilor de observaţiune şi pentru determinarea unor necunoscute, prin măsurarea aproximativă a unor funcţiuni ale lor. Autorul porneşte dela ideile lui Legendre, unul din descoperitorii metodei şi caută să stabiliască în mod riguros principiile ei. Se presupune astfel implicit că nu există erori sistematice şi că erorile accidentale sunt mici şi concordante.

După un prim capitol, cu preliminarii, urmează al doilea, despre aproximaţiuni, şi apoi al treilea cu patru teoreme fundamentale. Al patrulea capitol porneşte dela o problemă a lui Cauchy şi termină cu metoda celor mai mici patrate succesive.

Expunerea este clară şi lămurită prin exemple numerice şi reprezentări grafice. Studiul este interesant pentru cei ce au de studiat şi aplicat metoda celor mai mici patrate, la rezultatele date de observaţiuni şi experimentări.

I. Ionescu.

Gheorghe Bratu. *Curs de matematici generale.* Volumul I. *Matematici elementare.* (Calculul numeric, Calcul algebric, Reprezentare grafică, Trigonometrie, Operaţii cu numere apropiate). Fascicola I. Cluj 1926. (Editura Universităţii din Cluj).

Pentru aplicaţiunile matematicilor la fizică, inginerie, ştiinţele militare, comerciale, actuare, agricole, etc. în Facultăţi şi şcoli speciale superioare, programele de liceee nu coprind tot ce trebuie şi de aceia este necesar, pe de o parte, ca unele cunoştinţe de matematici dobândite acolo să fie revăzute, completate şi continuate cu chestiuni noi de geometrie analitică şi cu cunoştinţe suficiente de analiză matematică. Fascicola anunţată mai sus urmăreşte acest scop.

După o scurtă *Introducere* asupra numerelor de diferite feluri, vine Cap. I referitor la adunare, scădere şi numere algebrice. Cap. II se ocupă cu înmulţirea, împărţirea, divizibilitatea, numere raţionale şi numere complexe aritmetice. Cap. III tratează despre puteri, rădăcini, numere iraţionale şi proporţionalitate. Cu Cap. IV se începe calculul algebric şi anume operaţiuni, fracţii şi ecuaţii de gradul I. Cap. V se ocupă cu numerele imaginare, ecuaţii de gradul II şi de grad superior, precum şi cu sisteme de ecuaţii neliniare. In Cap. VI se începe reprezentarea grafică a funcţiunilor lineare şi nelineare. Fascicola se termină la pag. 320, urmând ca chestiunea să se continue în fascicola următoare.

La fiecare capitol chestiunile sunt lămurite prin exerciţii, probleme şi reprezentări grafice. Fiecare capitol se termină cu o serie de exerciţii, având soluţiile indicate pe scurt la cele mai dificile, şi rezultatele lor.

Autorul a căutat ca să utilizeze nomenclatura şi notaţiile matematice din *Vocabularul* tipărit în *„Biblioteca Gazetei Matematice"*. Obişnuinţa este însă greu de învins, după cum se poate vedeà şi în această revistă. Astfel autorul zice la b_m şi b_n *be em* şi *be en*, în loc de *be me* şi *be ne*, cum cere Vocabularul (No. 2), zice *membru* în loc de *parte* (No. 6), zice *unimi* în loc de *unităţi* (No. 9) etc. După ordonanţe oficiale şi internaţionale azi nu se mai notează *mp*, *mc*, ci m^2, m^3 (No. 9).

Demonstraţiunile sunt clare şi cu rigoarea necesară pentru cititorii la care se adresează cursul. Unele demonstraţiuni însă, care se dau cu lipsuri ascunse în cursul secundar, ar trebui însă completate într'un curs de revizuire. Aşà de exemplu sunt demonstraţiile date la No. 148, pentru transformarea fracţiilor periodice.

La unele calcule numerice, s'au făcut erori de transcriere sau de tipar, care fac ca rezultatul să nu corespundă cu datele. Astfel la No. 274 rezultatul este 10,29... în loc de 9,43. O erată pusă la finele fascicolei următoare poate rectificà uşor asemenea diferenţe.

Sunt de părere că, orice nu ar puteà folosi în mod real celor care se ocupă de matematici aplicate, să nu figureze într'un curs de matematici generale. Astfel nu găsesc folositoare noţiunea de *treaptă* a operaţiunilor (No. 12), nu am văzut niciodată utilitatea rapoartelor şi proporţiilor prin diferenţă (No. 152). Nu văd la ce ar servì *Conturul coordonatelor* (No. 264). Apoi noţiunea de *pantă* mijlocie şi pantă într'un punct al unei curbe (No. 269 şi 283) poate da loc la confuzii, căci ea presupune axa $0x$ totdeauna orizontală (No. 268), pe când în practică ea poate fi chiar verticală, în care caz în loc de pantă avem de fapt ceiace este cunoscut în tecnică sub numele de *fruct*. Dar aci este chestiune de apreciere personală, pe care am expus-o în urma dorinţei

exprimată de autor în prefață de a i se semnală deziderate, spre a puteà îmbunătăți ediţiunile viitoare.

Expunerea diferitelor chestiuni este făcută cu claritate. Tipăritura este bine îngrijită, ceiace face cinste Institutului de arte grafice „*Ardealul*". Sacrificiile pe care le-a făcut autorul pentru tipărirea acestei fascicole, vor fi răsplătite prin serviciile pe care cartea sa le va aduce învățământului matematicilor aplicate. Ii dorim însă ca dintr'însa să poată scoate şi mijloace de a puteà face să apară cât mai curând şi restul operii începute.

Nu putem încheia fără a aduce laude şi Ministerului Instrucţiunii, care a pus la dispoziţiunea profesorilor sume pentru tipărirea de cărţi didactice necesare studenţilor şi de a exprimà dorinţa ca şi alte autorităţi, care au şcoli superioare sub conducerea lor, să imite exemplu acelui Minister.

I. Ionescu.

Buletinul Societăţii studenţilor în Matematici No. 1. Editura Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti. 1925 (litografiat).

Pentru a *n*-a oară studenţii în matematici dela Bucureşti, încep publicarea unei foi matematice. Un Comitet format de Domnii: Eug. Balan, Gr. Moisil, P. Mirescu şi D-ra Otilia Busuioc, a litografiat primul număr al foaei cu titlul de mai sus, şi anunţă apariţiunea lunară a ei, în formatul unui sfert de coală de scris. Sumarul anunţă două articole; foaia No. 1 coprinde trei şi anume: Asupra unei proprietăţi a curbelor în spaţiu, de M. Niculescu, elev la Şcoala normală superioară din Paris. Câtevà clase de poligoane remarcabile în legătură cu grupele numerabile, de Gr. Moisil. Asupra raportului anarmonic a patru puncte imaginare, de E. Ballan.

Preţul unui număr este de 15 lei. Tot ce priveşte revista se va trimete D-lui E. Ballan, Str. Segment 7, Bucureşti.

Dacă revista va apare lunar şi dacă costul unui număr este de 15 lei, cum taxele poştale de expediţie se vor urcà, reese că abonamentul nu se poate scoborî sub $16 \times 12 = 180$ lei anual. El este prea mare, spre a puteà fi suportat, nu numai de elevi şi studenţi, dar chiar de profesori de matematici. De aceia, dacă costul abonamentului nu se va reduce şi dacă Editura nu-şi ia asupra-şi acoperirea deficitelor, vitalitatea noului Buletin nu va puteà fi asigurată.

Pentru aceasta, încheiu şi această scurtă recenzie, cu aceleaşi cuvinte cu care am încheiat în Septemvrie 1923 una analoagă, relativă la apariţia *Buletinului Asociaţiei de Matematici pure şi aplicate*, care a încetat de a apare:

„In asemenea condiţiuni, sunt de părere că Societăţi cu statute mai modeste, cu caracter mai intim studenţesc de o parte, politecnician de alta, cu scopuri mai mici dar repede şi strașnic îndeplinite, ar fi mai utile desvoltării matematicelor pure şi aplicate, formării caracterului şi desvoltării spiritului de perseverenţă, de sacrificii şi de desinteresare. Altfel vom asistà la metamorfose continui de Societăţi, ca până acum, şi la continui decepţiuni. Astfel vom vedeà scris: „va apare lunar în formatul sub care apare prezentul număr", care nu poate eşi lunar, ceiace este cu totul contra principiului şi

exactităţii matematicilor pure. Să nu uităm deviza lui GAUSS: *„Pauca sed matura"*.

I. IONESCU.

KRAITCHIK. *Quelques proprietés des nombres cycliques. Sur la factorisation des grandes nombres.* Raport prezentat Congresului din Liége al Asociaţiunii franceze pentru înaintarea ştiinţelor. Bruxelles.

CERERI.

134. Care au fost primii Români, care s'au ocupat, din punct de vedere teoretic sau practic, cu chestiunea Aviaţiei? Intr'o revistă românească am citit că pe vremuri Principele GRIGORE STURZA ar fi făcut o maşină de sburat. Se cunosc cevà detalii despre această maşină?

CĂPITAN I. G. LINTEŞ.

135. Ediţia II-a *Culegerii de Probleme de Algebră* de D-l A. G. IOACHIMESCU fiind epuizată, rog pe cei care o au şi vor să o cedeze, să mi-o vândă contra cost.

ISTINIE I. C. BREZUICA.
(Strada Carpaţi No. 7, Caracal).

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2898. *Se dă un fascicol de conice şi un triunghiu* ABC. *Insemnând cu* A'B'C' *triunghiul polar reciproc al triunghiului* ABC, *faţă de una oricare din conicele fascicolului, să se arate că: 1°. triunghiurile* ABC *şi* A'B'C' *se taie în nouă puncte, dintre care trei sunt situate pe o dreaptă* Δ *şi şase pe o conică; 2°. vârfurile triunghiurilor* ABC *şi* A'B'C' *formează un exagon înscris într'o conică; 3°. conica fascicolului variind, punctele* A',B',C' *descriu câte o conică; 4°. însemnând cu* A",B",C" *intersecţiile dreptei* Δ *cu laturile triunghiului* ABC, *vârfurile triunghiului format de dreptele* AA",BB",CC" *descriu fiecare câte o conică; 5°. dreapta* Δ *înfăşură o conică înscrisă în triunghiul* ABC.

I. G. NICULESCU.

Soluţie dată de D-nii: E. Ballan şi B. M. Barbălat.

1°. Se ştie (Duporcq, *Premiers principes de Géometrie moderne*, ediţia 1899, pag. 76) că *dacă două triunghiuri ABC, A'B'C' sunt polare reciproce în raport cu o conică, ele sunt omologice.* Deci laturile lor omoloage se taie în trei puncte A",B",C" colineare pe Δ. Insemnând cu A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 respectiv punctele de intersecţie ale dreptelor C'A', A'B' cu BC,... şi considerând exagonul $A_1C_2C_1B_2B_1A_2$, se vede că laturile opuse ale acestui exagon au punctele de intersecţie colineare şi deci exagonul e inscriptibil într'o conică.

2°. Laturile opuse ale triunghiului ABC, A'B'C' se taie în trei puncte colineare pe Δ, deci punctele A',B',C',A,B,C sunt pe aceeaşi conică.

3°. Se ştie (Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 67) că *locul polurilor unei drepte fixe în raport cu conicele unui fascicol punctual, este o conică circumscrisă triunghiului conjugat comun acestor conice.* Deci, punctele A',B',C', polurile dreptelor BC,CA,AB, descriu câte o conică.

4°. A" fiind intersecţia dreptelor BC şi B'C', polara punctului A" este AA', care uneşte polurile A' şi A ai dreptelor BC şi B'C'. Deci A",B",C" sunt respectiv polurile dreptelor concurente AA',BB',CC'. Dar, la fiecare conică a fascicolului punctual, corespunde un singur triunghiu A'B'C', deci câte un singur punct A" pe BC, B" pe CA, A" pe AB. Deci, A",B",C" descriu diviziuni omografice (punctuale proective) pe BC,CA,AB.

Aşà dar, punctul de intersecţie al dreptelor AA",BB", care unesc punctele fixe A şi B cu punctele A" şi B", ce descriu diviziuni omografice pe BC şi CA, este pe o conică ce trece prin punctele A şi B. Deci, vârfurile triunghiului format de dreptele AA",BB",CC" descriu câte o conică.

5°. Dreapta B"C" unind punctele B",C" corespunzătoare în două diviziuni omografice pe AC şi AB, înfăşură o conică tangentă la AC şi AB. In mod analog se vede că dreapta C"A", care este aceeaşi cu B"C", va înfăşură o conică tangentă la AB şi AC, deci dreapta A"B"C", sau Δ, înfăşură o conică înscrisă în triunghiul ABC.

Soluţie dată de D-l N. Georgescu-Roegen. Să luăm triunghiul ABC ca triunghiu de referinţă şi fie, în coordonate trilatere

$$F(x,y,z) \equiv f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = 0,$$

$$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

$$g \equiv A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'xz + 2E'yz + F'z^2 = 0,$$

ecuația fascicolului punctual de conice (λ un parametru variabil).

1°. Dreptele B'C', C'A', A'B', polarele punctelor A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) au ca ecuații respectiv:

$$F'_x = Ax + By + Dz + \lambda(A'x + B'y + D'z) = 0,$$

$$F'_y = Bx + Cy + Ez + \lambda(B'x + C'y + E'z) = 0,$$

$$F'_z = Dx + Ey + Fz + \lambda(D'x + E'y + F'z) = 0.$$

Intersecțiile dreptelor (BC,B'C'), (CA,C'A'), (AB,A'B') se află pe perechile de drepte:

$$x = 0, F'_x = 0; \quad y = 0, F'_y = 0; \quad z = 0, F'_z = 0,$$

deci pe dreapta

$$(1)\quad (D+\lambda D')(B+\lambda B')x + (B+\lambda B')(E+\lambda E')y + (E+\lambda E')(D+\lambda D')z = 0,$$

care trece prin fiecare din intersecțiile de mai sus. Aceasta este dreapta Δ. Așà dar triunghiurile ABC, A'B'C' sunt omologice, deci celelalte șase puncte de intersecție sunt pe o aceeași conică.

2°. Triunghiurile ABC, A'B'C' fiind omologice, dreptele AA',BB',CC' sunt concurente, deci exagonul AB'CA'BC' este circumscris unei conice.

3°. Punctul A' se găsește la intersecția dreptelor C'A',A'B', alecăror ecuații sunt:

$$f'_y + \lambda g'_y = 0, \qquad f'_z + \lambda g'_z = 0.$$

PROBLEMA 3136. *Se împart laturile triunghiului ortic al unui triunghiu* ABC, *în segmente proporționale cu patratele laturilor triunghiului primitiv, prin punctele* M, N, P.

1. *Să se arate că dreptele* AM, BN, CP, *concură într'un punct de pe dreapta* OK.

2. *Să se determine natura acestui punct.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de d-l M. Focşeneanu.

Fie A', B', C' vârfurile triunghiului ortic, şi C_1, A_1, B_1 punctele unde cercurile adjuncte (CB) (BA) (AC) taie laturile AB, BC, CA. Fie A_2, A_3; B_2, B_3; C_2, C_3 punctele unde cevienele AM, BN, CP taie dreptele CC_1, BC; AA_1, CA; BB_1, AB. Avem atunci:

$$MB'/MC' = b^2/c^2 = A_2C/A_2C_1.$$

In triunghiul BCC_1 transversala A_1A_2 ne dă:

$$\frac{AB}{AC_1}\cdot\frac{A_2C_1}{A_2C}\cdot\frac{A_3C}{A_3B}=1 \quad \therefore \quad \frac{A_3C}{A_3B}=-\frac{AC_1}{AB}\cdot\frac{A_2C}{A_2C_1}=-\frac{b^4}{c^4}.$$

Analog

$$\frac{B_3A}{B_3C}=-\frac{c^4}{a^4} \quad \text{şi} \quad \frac{C_3B}{C_3A}=-\frac{a^4}{b^4},$$

adică dreptele AM, BN, CP sunt concurente într'un punct de coord. baricentrice (a^4, b^4, c^4).

Se recunoaşte uşor că acest punct este inversul punctului lui Longshamps, adică al recriprocului punctului lui Lemoine.

Acest punct se află pe dreapta OK, căci determinantul coord. celor trei puncte este identic nul.

Notă. Prin consideraţiuni analoage rezolvă problema şi D-l L. Weiss. D-sa observă că punctul de concurenţă al dreptelor AM, BN, CP este potenţialul de ordinul al 4-lea al triunghiului.

Soluţie dată de d-l I. Vasiliu.

Dacă A_1, B_1, C_1, sunt picioarele înălţimilor, se vede imediat că A_1M, B_1N, C_1P sunt concurente.

De aceea putem considerà în locul tr. ortic, triunghiul pedal al unui punct M_1. In nota 56, XXIX se demonstrează că în acest caz dreptele AM, BN, CP sunt concurente. Demonstraţia se poate face şi cu ajutorul coordonatelor baricentrice. Dacă α_1, β_1, γ_1 sunt coordonatele lui M_1 şi α_2, β_2, γ_2 coordonatele unui alt punct M_2, $A_1B_1C_1$ triunghiul pedal al lui M_1 faţă de ABC şi $A_2B_2C_2$ triunghiul pedal al lui M_2 faţă de $A_1B_1C_1$, AA_2, BB_2, CC_2, sunt concurente într'un punct de coordonate:

$$\frac{\alpha_1}{\frac{\beta_2}{\beta_1}+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad \frac{\beta_1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-\frac{\beta_2}{\beta_1}}, \quad \frac{\gamma_1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1}-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}.$$

In cazul din enunț cele trei drepte se întâlnesc în punctul a^4, b^4, c^4, care e pe dreapta OK, căci verifică ecuația:

$$\Sigma\, \alpha b^2c^2(b^2 - c^2) = 0,$$

și e reciprocul punctului lui LONGCHAMPS $D(1/a^2, 1/b^2, 1/c^2)$.

Soluție și generalizare dată de d-l O. BOLGIU.

Soluțiunea I. Fie A'B'C', respectiv, vârfurile triunghiului ortic. Dreptele B'C', C'A', A'B' și BC, CA, AB sunt respectiv antiparalele față de laturile triunghiului ABC. *(F. G. M. pag. 285, ediția 1912).* In baza acestei proprietăți, se poate spune că între cevienele scoborîte din A ale triunghiului ABC și cevienele scoborîte tot din A ale triunghiului A'B'C' există o corespondență isogonală, adică o cevienă care taie latura BC într'un punct Q, astfel că avem: $QB/QC = c^m/b^m$, este isogonala cevienei care împarte în același raport segmentul B'C'. Tot aceeași corespondență există între triunghiul ABC și triunghiurile BA'C', C'A B'.

Dreptele AM, BN, CP, observăm că sunt reciproce simedianelor respectiv în triunghiurile AB'C', BA'C', CA'B' și deci în baza proprietății enunțate, ele se vor bucură în triunghiul ABC din proprietatea de à fi isogonalele reciprocelor simedianelor acestui triunghiu. Reciprocele simedianelor acestui triunghiu fiind concurente în punctul de coordonate baricentrice $1/a^2$, $1\ b^2$, $1/c^2$, rezultă că *isogonalele lor vor fi concurente în isogonalul acestui punct, adică în punctul de coordonate* a^4, b^4, c^4.

Inlocuind α, β, γ prin a^4, b^4, c^4 în ecuația baricentrică a dreptei OK:;

$$\alpha(b^2\sin 2C - c^2\sin 2B) + \beta(c^2\sin 2A - a^2\sin 2C) + \gamma(a^2\sin 2B - b^2\sin 2A) = 0,$$

găsim $0 = 0$. Deci dreptele AM, BN, CP concură într'un punct pe dreapta OK. Cât privește natura punctului, este evident că el este potențialul de ordinul 4 al triunghiului ABC.

Soluțiunea II. In baza corolarului demonstrat de D-l MIRON NICULESCU la pag. 242 G. M. vol. XXV, este evident că dreptele AM, BN, CP sunt concurente în potențialul de ordinul 4 al triunghiului ABC. Cât privește faptul că acest punct se găsește pe dreapta OK, metoda e aceeași ca la prima soluție.

Observare. In baza constatărilor făcute în prima soluțiune, putem enunță și demonstră următoarea proprietate:

Se împart laturile triunghiului ortic al unui triunghiu ABC în

rapoartele n^k / p^k, p^k / m^k, m^k / n^k respectiv prin punctele M, N, P.

Dacă m, n, p sunt coordonatele baricentrice ale unui punct R din plan, dreptele AM, BN şi CP concură într'un punct de coordonate: a^2m^k; b^2n^k; c^2p^k.

Observare. Se poate enunţă o proprietate analoagă pentru triunghiul complementar în al cărui caz corespondenţa cevienelor este reciprocă.

Notă. 1. O interesantă generalizare trimite şi d-l N. Botea.

2. Soluţie completă în coordonate baricentrice au dat D-nii: C. Ciorănescu, Paul Ionescu, M. Pătroianu, Gh. Simionescu şi I. Vasiliu.

3. D-nii: C. Berdan şi S. Weiss au considerat din greşeală isotomicele punctelor M, N, P pe laturile triunghiului ortic şi găsind că AM, BN, CP concură într'un punct de pe OH, au conchis că enunţul trebuiă modificat (!?).

4, D-l M. Focşeneanu a considerat cazul mai general, când triunghiul ortic e înlocuit prin pedalul unui punct M, oarecare.

5. In ceeace priveşte concurenţa dreptelor AM, BN, CP, ea rezultă dintr'o teoremă mai generală, datorită D-lui L. Hamburger (G. M. XXIII): *Un triunghiu* A″B″C″ *omologic şi înscris unui triunghiu* A′B′C′, *înscris într'un triunghiu* ABC *şi omologic cu acesta, este şi el omologic cu triunghiul* ABC.

M. G.

PROBLEMA 3144. *Fie* E *centrul unui cerc* (C) *ce trece prin două puncte fixe* A *şi* B. *Polara unui punct fix* P *în raport cu cercul* (C) *taie dreapta* EP *în* M. *Să se arate că perpendiculara pe mijlocul dreptei* MP, *taie pe* AB *într'un punct fix, când cercul* (C) *variază.*

N. Abramescu.

Soluţie dată de D-nii: B. Barbălatt, M. H. Brătescu-Danubiu, Focşeneanu, C. D. Mihăescu, T. Popovici, Tr. Udrisky.

Se ştie (Duporcq, Premies principes de Géométrie moderne, ed. I, p. 60) că *polarele unui punct în raport cu conicele unui fascicol punctual de conice, trec prin acelaş punct.* Deci polarele punctului P, în raport cu cercurile (C), trec printr'un punct fix S. Să determinăm acest punct S. Pentru aceasta, să observăm că dacă E se depărtează la infinit pe perpendiculara pe mijlocul lui AB, EP devine şi ea perpendiculară pe AB, iar cercul (C) tinde către dreapta AB. Unul din punctele unde EP taie cercul (C) fiind la infinit, conjugatul lui armonic în raport cu P şi M va fi mijlocul lui PM. Dar

conjugatul armonic N al acelui punct dela infinit, aflându-se în punctul unde perpendiculara din P pe AB taie pe AB, M se va găsi în M_1, simetricul lui P față de AB. Polara lui P în raport cu cercul (C) va fi în acest caz paralela dusă prin M_1 la AB, dreaptă pe care se găsește punctul fix S căutat. Unind pe S găsit cu P, punctul R de intersecție al dreptelor PS cu AB va fi mijlocul lui PS, căci AB și M_1S sunt paralele, iar N mijlocul lui PM_1. Perpendiculara RQ pe PE va tăia pe PE în mijlocul lui PM, căci SM este paralelă cu RQ și RP = SR. Deci perpendiculara pe mijlocul lui PM taie pe AB într'un punct fix R.

Soluție dată de D-nii: M. Adam, Dan Popovici, O. Popea, Dorin Popescu, I. D. Vasiliu. Fie R intersecția dreptei AB cu perpendiculara pe mijlocul lui MP. Cercul cu centrul R și raza RM (care trece prin P și M), determină pe diametrul EP al cercului (C) două puncte conjugate armonic în raport cu P și M (căci M este pe polara lui P); deci acest cerc taie ortogonal cercul (C). Dar cercurile ce taie ortogonal un fascicol de cercuri (C), au centrele pe axul radical AB al cercurilor (C) și formează un fascicol punctual. Deci printre aceste cercuri este numai unul care trece prin punctul fix P și deci centrul R al acestui cerc este fix, adică perpendiculara pe mijlocul lui PM taie pe AB într'un punct fix.

Soluție dată de D-l G. Mihoc. Fie I mijlocul segmentului AB. Punctul E se găsește pe perpendiculara pe mijlocul lui AB. Insemnând F mijlocul lui MP și prin N punctul unde perpendiculara pe mijlocul MP taie pe AB, avem

$$EM.EP = \overline{EB}^2,\ EM(EM+2MF)=EM^2+2MF.EM+MF^2-PF^2=EB^2,$$

$$(EM+MF)^2=PF^2+\overline{EB}^2,\ \overline{EF}^2=PF^2+\overline{EB}^2,$$

$$(1) \qquad PF^2=EF^2-\overline{EB}^2.$$

Din triunghiul dreptunghic PNF, deducem

$$\overline{PN}^2=PF^2+FN^2,$$

și înlocuind în (1), avem

$$\overline{PN}^2=EF^2+FN^2-EB^2=NI^2+EI^2-EB^2=NI^2-(EB^2-EI^2),$$

$$PN^2=NI^2-BI^2=(NI+BI)\ (NI-BI)=AN.BN.$$

De aci rezultă că dreapta PN este tangentă la cercul ABP,

care este dat. Punctul P fiind fix pe acest cerc, tangenta la acest cerc este determinată și deci taie dreapta AB într'un punct fix.

Soluție dată de D-l N. Blaha. Fie D proecția lui P pe AB. Inversând în raport cu P și puterea $\overline{PD}^2$, dreapta AB devine cercul O' de diametru PD; punctele A, B devin A', B' intersecțiile dreptelor AP, BP cu cercul O'. Cercul (C) de centru E devine cercul (C') de centru E', ce trece prin punctele fixe A', B'.

Locul lui E' fiind dreapta Δ perpendiculară pe mijlocul lui A'B', locul lui M, inversul lui E', va fi inversa dreptei Δ, adică cercul fix de centru O'' și care trece prin P.

Perpendiculara în *m* pe mijlocul lui MP trecând prin centrul O'', care este fix, va trebui să arătăm că O'' se află pe AB.

In adevăr, dreapta Δ și cercul (C') se taie ortogonal; inversele lor, cercul de centru O'' și cercul (C) vor fi ortogonale. Deasemenea, cercul circumscris triunghiului PAB este ortogonal cercului de centru O'', căci inversele lor respective A'B', Δ se taie ortogonal. Cercul O'' fiind ortogonal cercurilor variabile (C), centrul său O'' va fi situat pe axul radial AB al lor și perpendiculara în *m*, mijlocul lui MP, va trece prin O'', care este fix și situat pe AB.

Poziția lui O'' pe AB este dată de

$$O''P^2 = O''A \cdot O''B.$$

Soluție analitică dată de D-nii: N. Arcadian, Gogu Basacov, N. G. Botea, M. Bogdan, O. Bolgiu, C. Ciorănescu, I. Dragomir, St. Epure, M. Focșeneanu, F. Goldstein, Paul I. Ionescu, Ilie Ionescu-Brezuica, P. Miresçu, A. Panaitescu, D. P. Popovici, G. D. Simionescu, E. Ștefănescu, M. Simionescu, W. Solomon, I. C. Vasiliu, I. D. Vasiliu.

Să luăm AB ca Ox, perpendiculara pe mijlocul ei ca Oy și fie $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $E(0, \lambda)$, $P(p, q)$ punctele considerate, λ fiind variabil. Ecuația cercului (C) este

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = a^2 + \lambda^2, \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0.$$

Polara punctului P față de acest cerc este

$$(1) \qquad px + qy - \lambda(q + y) - a^2 = 0.$$

Ecuația dreptei EP este

$$(2) \qquad y - \lambda = \frac{q - \lambda}{p} x.$$

Rezolvând ecuațiile (1) și (2), coordonatele punctului M sunt

$$\frac{p(a^2+\lambda^2)}{p^2+(q-\lambda)^2}\ ,\quad \frac{(q-\lambda)(a^2+\lambda^2)}{p^2+(q-\lambda)^2}+\lambda.$$

Coordonatele punctului Q, mijlocul dreptei EP, sunt:

$$x_1=\tfrac{1}{2}\left[p+\frac{p(a^2+\lambda^2)}{p^2+(q-\lambda)^2}\right],\ y_1=\tfrac{1}{2}\left[q+\lambda+\frac{(q-\lambda)(a^2+\lambda^2)}{p^2+(q-\lambda)^2}\right].$$

Ecuația perpendicularei în Q pe QP este

$$y-y_1=-\frac{p}{q-\lambda}(x-x_1).$$

Abscisa punctului R, unde această dreaptă taie pe Ox, se obține făcând $y=0$ și este egală cu

$$\frac{a^2+p^2+q^2}{2p}\ ,$$

ceeace probează că punctul R este independent de λ, adică de cercul (C) și deci acest punct este fix pe dreapta AB.

PROBLEMA 3155. *Să se demonstreze că triunghiul format de centrele a trei cercuri oarecare, este ortologic cu triunghiul format de polarele centrului radical al acestor cercuri, în raport cu fiecare din ele.*

ILIE IONESCU-BREZUICA.

Soluție dată de D-nii: M. ADAM (Constanța); N. P. ARCADIAN (Caracal); N. G. BOTEA (Lic. Cantemir Vodă, București); C. I. CIORĂNESCU (Lic. Mânăstirea Dealului); I. ST. COȘNIȚĂ (Bârlad); M. I. FOCȘENEANU; PAUL I. IONESCU (Lic. Mânăstirea Dealului); GH. D. IONESCU ZANE (București); MIH. I. PĂTROIANU (Mânăstirea Dealului); GH. D. SIMIONESCU (Mânăstirea Dealului) și I. C. VASILIU (Mânăstirea Dealului).

Fie O_1, O_2, O_3 centrele celor trei cercuri, iar P_1, P_2 și P_3 polarele unui punct oarecare C din plan, față de fiecare din cercurile O_1, O_2 și O_3. Dreapta P_1 fiind polara punctului C față de cercul O_1, este perpendiculară pe dreapta CO_1, proprietatea bine cunoscută odată cu noțiunea de polară.

Pentru acelaş motiv, dreptele CO_2 şi CO_3 sunt perpendiculare respectiv pe polarele P_2 şi P_3. De aci rezultă că perpendicularele ridicate din vârfurile triunghiului $O_1O_2O_3$, pe dreptele P_1, P_2 şi P_3, se întâlnesc în punctul C; aceasta însemnează conform definiţiei, că triunghiul $O_1O_2O_3$ este ortologic cu triunghiul format de dreptele P_1, P_2 şi P_3 şi prin urmare şi perpendicularele ridicate din vârfurile triunghiului format de dreptele P_1 P_2 şi P_3 vor fi concurente într'un punct.

Problema propusă intră în cazul particular când punctul C din plan se confundă cu centrul radical al cercurilor C_1 C_2 şi C_3.

D-nii: C. BERDAN, MART. P. BOGDAN, M. H. BRĂTESCU DANUBIU, AL. BUDIŞTEANU, F. GOLDŞTEIN, ŞT. F. LĂZĂRESCU, I. N. NICOLESCU, O. POPEA, I. N. POPESCU, DORIN POPESCU, W. SOLOMON, ALEX. TAUBER, A. URZICĂ, TR. UDRISKY, MIRCEA A. VASILESCU, L. WEISS, S. WEISS, au dat soluţia de mai sus, fără a observà că proprietatea enunţată se menţine şi în cazul mai general când punctul C este oarecare în plan.

Observaţiuni: 1°. D-l W. SOLOMON observă că cele două triunghiuri din problema 3155 sunt şi omologice (problema 3085 din G. M).

2°. D-l M. ADAM. Triunghiul format de centrele cercurilor O_1, O_2 şi O_3 este ortologic cu triunghiul format de centrele radicale ale cercurilor (O_1O_2O), (O_2O_3O) şi (O_3O_1O), O fiind un cerc oarecare din planul celorlalte trei.

3°. D-l M. FOCŞĂNEANU observă şi alte două proprietăţi de omologie şi ortologie ale figurii.

PROBLEMA 3214. *Fie* A_1, B_1, C_1 *mijloacele laturilor* BC, CA, AB *ale unui triunghiu* ABC *şi* D, E, F *punctele de contact ale aceloraşi laturi cu cercul înscris. Pe laturile* BA *şi* CA *ducem către vârful* A *o lungime* $BP = CQ = BC$. *Dreapta* PQ *taie pe* EF *în punctul* K, *iar paralelele duse prin vârfurile* E *şi* F *ale triunghiului* DEF *la laturile opuse* FD *şi* DE *se întretaie în* D_2. *Să se demonstreze că:*

1) *Punctul* φ *al lui* FEUERBACH *se află pe dreapta* KA_1.

2) *Punctul* D_2 *se află pe dreapta* PQ.

V. CRISTESCU.

Vom demonstrà mai întâi partea a doua a chestiunei.

Să presupunem că D' este punctul unde paralela dusă prin E la FD taie dreapta PQ. Triunghiurile isoscele DBF, CBP având

acelaş unghiu la vârf, bazele lor DF şi CP sunt paralele. Urmează de aici că avem $FP = DC = CE$ şi analog avem $BD = QE = BF$. Ţinând seamă şi de $CQ = BP = BC$, avem

$$FD : PC = BD : BC = QE : QC = ED' : PC$$

$$\therefore \quad FD = ED'.$$

Insă $FD = ED_2$; deci avem $ED' = ED_2$ şi fiindcă punctele D' şi D_2 sunt situate ambele pe paralela dusă prin E la FD, concludem că D' şi D_2 se confundă; deci punctul D_2 se află pe dreapta PQ.

Gh. Mihoc (Elev Cl. VII, Liceul Gh. Şincai).
Ath. Radev (Iambol, Bulgaria).

Fie I centrul cercului înscris şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, A_e, B_e, C_e picioarele bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A, B, C. Se ştie că avem

$$AC_e = bc : (a-b), \qquad AB_e = bc : (a-c)$$

$$\therefore \quad AC_e : AB_e = (a-c) : (a-b) = AP : AQ,$$

de unde conchidem că dreptele PQ şi $B_e C_e$ sunt paralele.

Se ştie însă că dreapta $A_e B_e C_e$, care uneşte picioarele bisectoarelor exterioare ale unui triunghiu (polara trilineară a punctului I) este perpendiculară pe OI (Rouché et de Comberousse, *Géométrie plane*, nouvelle édition, p. 450). Deci şi PQ este perpendiculară pe OI. Ori, am demonstrat că D_2 se află pe PQ; rezultă atunci că punctul K este intersecţia laturei EF cu perpendiculara dusă din D_2 pe OI. Se cunoaşte însă următoarea teoremă a D-lui V. Thébault (*Mathesis*, 1924, pag. 413): «*perpendiculara scoborîtă din* D_2 *pe linia centrelor* OI, *întâlneşte pe* EF *într'un punct situat pe dreapta care uneşte mijlocul* A_1 *al laturei* BC *cu punctul* φ *al lui* Feuerbach».

Ath. Radev (Iambol, Bulgaria).

Fie A' piciorul bisectoarei interioare a unghiului A şi T punctul de contact al celei a doua tangentă dusă din A' la cercul înscris I (prima tangentă fiind A'D). Se cunoaşte următoarea construcţie a punctului φ: «*Punctul* φ *se află la intersecţia dreptei* TA_1 *cu cercul* I (F. G. — M., *Exercices de Géométrie*, 6-e éd. pag. 605 şi 606). Pentru a demonstră deci problema, e suficient să arătăm că punctul T se află pe dreapta KA_1.

Punctele D şi T fiind simetrice faţă de bisectoara AI, urmează că patrulaterul EFDT este un trapez isoscel înscris în cercul I. Avem deci ET = DF = ED_2, iar $\sphericalangle FET = \sphericalangle EFD = \sphericalangle FED_2$, de unde conchidem că punctele D_2 şi T sunt simetrice faţă de EF. De altă parte, se ştie că dacă M este mijlocul dreptei PQ, punctele M şi A_1 sunt simetrice faţă de EF[1]), de unde urmează că dreptele KM şi KA_1 sunt şi ele simetrice faţă de EF. Dar D_2 aflându-se pe KM, urmează că simetricul său T se va afla pe KA_1, ceeace demonstrează teorema.

GH. MIHOC (Elev Cl. VII, Liceul Gh. Şincai).

D-nii: ION C. VASILIU şi PAUL I. IONESCU au demonstrat problema cu ajutorul coordonatelor baricentrice, iar D-nul FILIP I. GOLDSTEIN cu ajutorul coordonatelor normale.

Notă. Chestiunea 3214 completează unele proprietăţi relative la punctul lui FEUERBACH. Ea se poate demonstră foarte simplu cu ajutorul parabolei (φ, OI), care are ca focar punctul lui FEUERBACH φ şi ca directoară dreapta OI care uneşte centrele O şi I ale cercurilor circumscris şi înscris în triunghiul fundamental.

Se ştie că parabola (φ, OI) este înscrisă în triunghiurile $A_1B_1C_1$ (complimentarul lui ABC) şi DEF (triunghiul contactelor lui ABC cu cercul I) şi fie K_a, K_b, K_c şi K_d, K_e, K_f punctele unde parabola (φ, OI) atinge laturile triunghiurilor $A_1B_1C_1$ şi DEF.

Ducem în direcţiunile BA şi CA, CB şi AB, AC şi BC lungimile BA_b şi CA_c, CB_c şi AB_a, AC_a şi BC_b egale cu BC, CA, AB sau *a*, *b*, *c*. Fie A_a, B_b, C_c mijloacele distanţelor A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b; A_2 = (DE, A_1C_1, AI, EC_a) şi A'_2 = (DF, A_1B_1, AI, CB_a) proiecţiunile lui B şi C pe AI; B_2 şi B'_2, C_2 şi C'_2 proiecţiunile lui C şi A, B şi A pe BI şi CI.

Triunghiurile ABC, $D_2E_2F_2$, A_bB_aC, A_cC_aB sunt triunghiurile anticomplimentare ale triunghiurilor $A_1B_1C_1$, DEF, A'_2B_2F, A_2C_2E circumscrise parabolei (φ, OI). Punctele A, D_2, A_b, A_c sunt deci polurile dreptelor BC, E_2F_2, B_aC, C_aB în raport cu această parabolă (a se vedeà J. NEUBERG, *Géométrie analytique*, p. 201). Dar dreapta BC este paralelă cu tangenta B_1C_1 în K_a şi celelalte trei drepte sunt paralele cu tangenta EF în K_d. Urmează de aici că, *dreptele* AK_a, BK_b, CK_c, A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b *sunt perpendiculare pe dreapta* OI (a se compară: J. NEUBERG, *Géométrie et Mécanique, Journal*

[1]) In adevăr, diagonalele BP, CQ ale patrulaterului BCPQ având aceiaşi lungime egală cu BC, mijloacele A_1, B_2, M, C_2 ale laturilor, sunt vârfurile unui romb. Dar B_2 şi C_2 fiind proiecţiile lui C şi B respectiv pe bisectoarele BI, CI, punctele B_2, E, F, C_2 sunt coliniare şi prin urmare punctul M este simetricul lui A_1 faţă de EF (A se vedeà: V. CRISTESCU, *Sur le point* de FEUERBACH *et la parabole* (φ, OI), *Mathesis*, 1925 p. 261 şi J. NEUBERG, *Sur les théorèmes* de M. CAPELLO, *Mathesis*, 1908, p. 88).

de Mathématiques élémentaires, 1888, *Mathesis* 1908, p. 86 şi 1924, p. 337 CL. SERVAIS, *Mathesis*, 1915 p. 136; V. THÉBAULT, *Mathesis* 1913, p. 200 şi 1924 p. 413) *şi cele trei din urmă trec prin punctele* D_2, E_2, F_2 *precum şi prin punctele de contact* K_d, K_e, K_f *a parabolei* (φ, OI) *cu laturile triunghiului* DEF (V. CRISTESCU, „*Gazeta Matematică*", Vol. XXX, p. 39)[1].

V. CRISTESCU.

PROBLEMA 3263. *Să se demonstreze că oricare ar fi* m, *un divizor comun al numerelor* $20\,m+661$ *şi* $15\,m+329$ *este divizor şi al numărului 667. Să se găsiască apoi toate valorile generale pe care le poate lua* m, *pentru ca cele două numere să aibă un divizor comun diferit de unitate.*

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: H. MARCOVICI (Lic. Laurian, Botoşani) şi G. TAILER (Lic. Codreanu, Bârlad).

Pentru partea I este uşor de văzut că un divizor comun celor 2 numere, va divide şi diferenţa

$$3\,(20\,m+661)-4\,(15\,m+329)=667.$$

De aici urmează că numerele $20m+661$ şi $15m+329$ nu pot avea alţi divizori comuni de cât unul din numerele 23, 29 sau 667. Se deosebesc deci următoarele 3 cazuri:

1°. *Divizorul comun este 23*, deci numerele:

$$\frac{20m+661}{23}=m+29-3\frac{m+2}{23}$$

şi

$$\frac{15m+329}{23}=m+15-4\frac{m+2}{23}$$

trebue să fie întregi, ceeace are loc pentru

$$m=23\,k-2,$$

în care k poate lua orice valoare întreagă pozitivă sau negativă.

---

[1]) A se vedea: V. CRISTESCU, *Sur le point* de FEUERBACH *et la parabole* (φ, OI), *Mathesis*, année 1925, p. 260 şi u. de unde am extras cele ce preced.

2°. *Divizorul comun este 29.* Numerele

$$\frac{20m+661}{29} = 29m + 23 - 3\,\frac{3m+2}{29}$$

şi

$$\frac{15m+329}{29} = 11 + 5\,\frac{3m+2}{29}$$

trebuind să fie întregi, vom aveà

$$m = 29k' + 9.$$

3°. *Divizorul comun este 667.* Din

$$\frac{20m+661}{667} = 1 + 2\,\frac{10m-3}{667}$$

şi

$$\frac{10\,(15m+329)}{647} = 5 + 15\,\frac{10m-3}{667}$$

se scoate $m = 667k'' + 67.$

Aşà dar, soluţiile generale cerute sunt :

$$23k - 2\,; \qquad 29k' + 9 \qquad \text{şi} \qquad 667k'' + 67.$$

Notă. 1°. D-nii : N. Teodorescu (Lic. Spiru Haret), C. C. Popovici (Lic. internat Iaşi), G. Călin (Lic. Caracal) şi C. N. Popescu (Lic. Giurgiu) au găsit numai primele 2 soluţii pe care le-au pus sub forma $23t_1 - 25$ şi $29t_2 - 20$.

2°. Nu citez rezolvitorii care au dat soluţii fracţionare, nici pe aceia care au găsit că 9,67,96... sunt soluţii.

EXERCIŢII

21. Dacă *ab* e un număr prim de două cifre, el este cel mai mic divizor al numărului *abab*.

Alex. Ch. Mladenovici.

R. Intr'adevăr

$$abab = 100 \,.\, ab + ab = 101 \times ab.$$

Deci numărul nu se împarte decât cu 101 şi cu *ab*, care sunt amândouă prime, *ab* fiind de două cifre, e mai mic decât 101, aşà dar e cel mai mic divizor al numărului *abab*.

22. Se cer patratele de trei cifre, la care suma şi produsul cifrelor sunt patrate.

S. V. Dragomir.

R. Fie $(100s + 10z + u) = a^2$ numărul căutat, așă că $(s + z + u) = b^2$ și $szu = c^2$. Avem b^2 cel mult $3 . 9$ și deci $b^2 = 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25$. Pentru fiecare caz căutăm cifre care să sumeze b^2, alegem pe acelea al căror produs este un patrat c^2 și cu ele căutăm a alcătui patrate, ținând seamă de ultimele două cifre cu care se poate termină un patrat. Se găsesc soluțiile 100 ; 400 ; 900 ; 144 ; 441.

23. Care este cel mai mic număr nepereche care înmulțit cu 2 ; 6 ; 8 ; 25, dă resturile 3 ; 5 ; 7 ; 1 respectiv ?

E. Ștefănescu.

R. Trebuie să căutăm numărul n așă că $(n+1) \equiv \mathcal{M}2 \equiv \mathcal{M}4 \equiv \mathcal{M}6 \equiv \mathcal{M}8 \equiv \mathcal{M}24$, iar $(n-1) \equiv \mathcal{M}5$. Deci $n = 24x - 1 = 25y + 1$. De aci scoatem $x = y + (y+2)/24$. Deci $y = 22$ și $n = 551$.

24. In ce caz rădăcina cea mică a ecuației:

$$x^3 + px^2 + q = 0,$$

este a treia parte din cea mare și jumătate din cea mijlocie în valoare absolută ?

I. Foca.

R. Dacă a este rădăcina cea mică, celelalte în valoare absolută sunt $2a$ și $3a$. Produsul lor două câte două în valoare absolută sunt $2a^2$, $3a^2$, $6a^2$. Oricum s'ar lua semnele la cele trei rădăcini suma lor nu poate fi 0, după cum cere lipsa termenului în x.

25. Intre elementele unui triunghiu avem relația

$$\Sigma\, a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = 2r(4R + r)/p.$$

Gh. V. Nicolau.
(Liceul Bârlad).

R. Avem $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = (p-a)/p$, etc. Expresia devine

$$\Sigma \frac{a(p-a)}{p} = \frac{1}{p}\Sigma \frac{aS}{r_a} = \frac{S}{p}\Sigma \frac{a}{r_a} = \frac{S}{p} \cdot \frac{2}{p}(4R + r) = \frac{2r(4R+r)}{p}.$$

26. Avem relația $\Sigma \dfrac{(a^2 - b^2)}{1 + r/r_c} = 0.$

Const. I. Georgescu.

R. Cu ajutorul relațiilor cunoscute

$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$, $\quad b^2 = (r_b - r)(r_c + r_a)$, etc., deducem

$a^2 - b^2 = (r_a - r_b)(r + r_c)$, $\quad \therefore \quad \Sigma \dfrac{a^2 - b^2}{1 + r/r_c} = \Sigma\, r_c (r_a - r_b) = 0.$

PROBLEME PROPUSE.

3371. Să se determine un număr de 4 cifre multiplu de 9, aşă fel ca:

1) Suma cifrelor extreme să fie egală cu diferenţa mijlociilor;

2) Diferenţa dintre răsturnatul întregului număr şi el însuşi să fie multiplu de 5;

3) Făcându-se a 2-a oară aceiaşi operaţie cu numărul format cu primele 3 cifre, să formeze o diferenţă numai de 2 cifre.

G. A. NICHIFOR.

3372. Care este cel mai mic număr al cărui patrat divizat prin 5 ; 11 ; 17, dă resturile 4 ; 1 ; 8 şi al cărui cub divizat prin 7 şi 8, dă resturile 6 şi 3?

G. TAILER.

3373. Să se stabiliască neegalităţile:

$$(m+1)(m+2)\ldots(m+n) > (n+1)!\, m^p,$$

$$(m+1)^2 (m+2)^3 \ldots (m+n)^{n+1} > 2^2.3^3 \ldots (n+1)^{n+1} m^n,$$

în care $m > 0$ şi

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

E. ŞTEFĂNESCU.

3374. Fie A', B', C' punctele unde înălţimile triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul O, circumscris triunghiului şi fie A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse lui A', B', C'. Notăm cu A_2, B_2, C_2 respectiv intersecţiile perechilor de drepte (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), (AA_1, BB_1). Să se demonstreze:

1. Că O este centrul cercului lui EULER al triunghiului $A_2B_2C_2$.

2. Că triunghiurile A'B'C', $A_2B_2C_2$ sunt ortologice.

C. CIORĂNESCU.

3375. Dreptele lui SIMSON ale vârfurilor unui patrulater inscriptibil, în raport cu triunghiurile formate prin unirea vârfurilor rămase ale patrulaterului, sunt concurente.

SOLOMON M. FELDSTEIN.

3376. Care este condiția ca rădăcinile ecuației:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

să formeze o proporție?

I. IONESCU.

3377. Să se verifice identitatea

$$5\sqrt[5]{\frac{16a^4}{15625}\left(\frac{11a}{5}\sqrt{\frac{1}{5}}+a\right)}-5\sqrt[5]{\frac{16a^4}{15625}\left(\frac{11a}{5}\sqrt{\frac{1}{5}}-a\right)}=2a.$$

O. IANCULESCU.

3378. Să se afle limita expresiei:

$$E=\frac{A^n(1-D^n)-B^n(1-C^n)}{C^n-D^n},$$

când n tinde către zero; A, B, C, D fiind cantități reale.

M. ȘTEFAN.

3379. Fie

$$P_m = a^m + a^{m-1}b + \ldots + ab^{m-1} + b^m.$$

1°. Să se demonstreze că

$$\frac{P_{2n+1}}{a+b} - \frac{n+1}{2n+1}P_{2n} > 0,$$

$$\frac{P_{2n}}{(a+b)^2} - \frac{2n+1}{4n}\frac{P_{2n-1}}{a+b} > 0,$$

oricare ar fi a și b.

2°. Să se deducă inegalitățile:

$$\frac{P_{2n}}{2n+1} \geqslant \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^{2n}.$$

$$\frac{P_{2n+1}}{(2n+2)(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}.$$

D. V. IONESCU.

3380. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu avem relația

$$2\Sigma\sin^2\tfrac{1}{2}A\sqrt{(\sin\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}C+\cos\tfrac{1}{2}A)(\sin\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}A)(\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}B-\sin\tfrac{1}{2}C)(\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}C-\sin\tfrac{1}{2}B)}$$
$$=\sin A\sin B\sin C.$$

N. G. BOTEA.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam R. (3347, 57); *Baidac D. M.* (R); *Botea G. E.* (3349, 53, 55, E, N, P); *Botea G. N.* (N, P); *Braester* O. (3352); *Căldăraru L.* (3197); *Chirilă V. I.* (2972, 3218, 347); *Ciffer I. S.* (3357); *Cocea Gh. Th.* (3345, 55, 57); *Cohn H.* (3338, 47, 55, 57, 69); *Constantinescu M.* (3357); *David I.* (3289, 301, 51, 63); *Derner M.* (3339); *Feldstein S.* (P); *Foca I.* (3233, 351, 53); *Focșeneanu M.* (2578); *Gaiu G. Em.* (3345, 69); *Gataianțu B.* (3355, 69, N); *Georgescu R.* (3367, 69); *Ghelber M.* (P); *Grünberg R.* (3353); *Grünsteih E.* (3327, 39, 53, 57); *Hâncu Sofia* (P); *Hulubei T.* (3233, 319, 45, 47, 62, 69); *Iacob E.* (2972, 3338, 47, 69); *Iliuță I. I.* (R); *Ioachim Gr.* (3324, 42, 69); *Ionescu-Bujor A.* (3345, 55, 57); *Ionescu-Bujor C.* (3355, 57, 69); *Kahane A.* (3301, 15, 53, 55, 56, 57, 69); *Katz L.* (3338, 52, 69); *Livada M.* (3348); *Lupu A.* (3268, 345, 69); *Manafu V.* (3326, 45, 55, 57); *Manoil-Roman A.* (3282, 301, 47, 63); *Manolescu I. N.* (P); *Marcovici H.* (3216, N); *Mareș Gr.* (3306, 45, 46, 47, 57); *Mihăilescu N.* (3342, 45, 53, 55, 57, 69); *Miu I.* (3322, 27, 39, 69); *Nestor G. D.* (3259, 347); *Nicolau-Dobridor I.* (3338, 53, 55, 57); *Niculescu M.* (A); *Novacu V.* (3282, 353, 57, 62, 69); *Păun C.* (3355); *Popea O.* (N); *Pușcă T.* (2972); *Raiciu V. C.* (3301); *Râpeanu V.* (3268); *Reiss I. B.* (3347); *Schächter M. O.* (3326, 42, 47, 67, 69); *Schor A. O.* (3355, 57); *Segârceanu C.* (3353, 57); *Simionescu Gh.* (3157); *Soltisky L.* (C); *Spathy R.* (3345, 55, 57, 67, 69); *Stoicescu Th.* (3233, 315, 19, 45, 47, 62, 69); *Tailer G.* (3259, 83, 334, 47, 67, 69, E, P); *Teodorescu N.* (3269); *Vasilescu B.* (3347, 51, 55, 63, 69); *Vasilescu G. G.* (3351); *Vasiliu G. G.* (3353, 55, 59); *Vasiliu C. I.* (P); *Zaharia O. I.* (3345).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2346, 946, 3167, 78, 248, 52, 92, 99, 303, 21, 24, 32, 33, 40, 44, 52, 54, 56 și 65 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE"

30 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. G. **Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București.

Ona Asociațiunea pt Cultura și Literatura Poporului Român

Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

.NUL XXXI.

UL 6. — FEBRUARIE 1926.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

lor ortogonale . . . . *M. Ghermănescu.*

ı legătură cu cercurile . . . . . *M. Grünbaum.*

ei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare, pe intervalul 1 Sept. 1924—31 August 1925.

4. Note Matematice: 24—28.
5. Bibliografii.
6. Cereri.
7. Probleme rezolvate: 1083, 2916, 3067, 3133, 3182, 3241, 3254, 3283, 3338, 3355, 3357.
8. Exerciţii: 27—29.
9. Probleme propuse: 3381—3390.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET

1926

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 85, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 64, 75, 76, 78, 79, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 25, 30, 33, 35, 41, 43, 44, 50, 54, 60, 61, 64, 65, 71, 72, 73, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „Gazeta Matematică" (Fabrica de Chibrituri din Bucureşti), cu preţul de 12 lei.

ASUPRA POLINOAMELOR ORTOGONALE.

(Comunicare făcută la Soc. de Ştiinţe la 2 Martie 1925).

1. Polinoamele

$$(1) \qquad P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \ldots + a_{n,n}x^n,$$

cari satisfac relaţiunile integrale

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi(x) P_n(x) P_m(x) dx = I_{n,m},$$

în care $\varphi(x)$ este o funcţiune pozitivă şi finită în intervalul (a, b), iar $I_{m,n}$ constante date, constituesc generalizarea algebrică imediată o *polinoamelor ortogonale*, corespunzătoare cazului

$$I_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n. \end{cases}$$

Este interesant atunci a se studiă câteva din proprietăţile acestor polinoame, începând bineînţeles cu determinarea lor, ceeace vom face în rândurile de mai jos.

Se ştie că fiind dat şirul de polinoame

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x) \ldots P_n(x) \ldots$$

se poate pune un polinom oarecare $Q_m(x)$ sub forma:

$$Q_m(x) = \alpha_{m,0} P_0 + \alpha_{m,1} P_1 + \alpha_{m,2} P_2 + \ldots + \alpha_{m,m} P_m.$$

Inmulţind ambii membrii cu $\varphi(x) P_n(x) dx$ şi integrând dela a la b, obţinem:

$$\int_a^b \varphi(x) Q_m(x) P_n(x) dx = \sum_0^m \alpha_{m,i} \int_a^b \varphi(x) P_n(x) P_i(x) dx =$$

$$\sum_0^m \alpha_{m,i} I_{n,i} = J_{m,n}.$$

In particular pentru $Q_m(x) = x^m$, această relaţiune devine:

$$(3) \qquad \int_a^b \varphi(x) x^m P_n(x) dx = J_{m,n} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Dacă în această relaţiune, dăm lui m valorile $0, 1, 2 \ldots n$, obţinem un sistem de $(n+1)$ ecuaţiuni, cu ajutorul cărora putem

determină coeficienţii $a_{n,i}$ ai polinomului $P_n(x)$ (1). Insemnând pentru prescurtare

$$\int_a^b \varphi(t) t^k \, dt = \beta_k$$

şi eliminând coeficienţii $a_{n,i}$ între (1) şi (3), obţinem pentru polinomul $P_n(x)$, expresiunea următoare:

$$P_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \ldots & x^n & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 & \ldots\ldots & \beta_n & J_{n,0} \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots\ldots & \beta_{n+1} & J_{n,1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \beta_n & \beta_{n+1} & & & J_{n,n} \end{vmatrix},$$

în care Δ_n se obţine din expresiunea determinantului de mai sus, prin suprimarea primei linii şi ultimei coloane.

2. O a doua expresiune remarcabilă, sub formă de determinant, a polinomului $P_n(x)$, este următoarea:

$$P_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \beta_0 x - \beta_1 & \beta_1 x - \beta_2 \ldots \beta_{n-1} x - \beta_n & J_{n,0} \\ \beta_1 x - \beta_2 & & J_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_n x - \beta_{n+1} & & J_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Acest determinant se desface într'o sumă de $(n+1)$ determinanţi de ordinul n, având ca factori respectiv $1, x, x^2, \ldots x^n$, sumă care reprezintă, abstracţie făcând de factorul $1/\Delta_n$, tocmai dezvoltarea (1) a polinomului $P_n(x)$, în care am înlocuit coeficienţii $a_{n,i}$ prin valori proporţionale deduse din sistemul de ecuaţiuni (3).

O expresiune analoagă a fost stabilită de D-l N. Abramescu în cazul particular al *polinoamelor ortogonale*, în teza D-sale *). Această expresiune particulară se deduce cu înlesnire din expresiunea generală de mai sus, căci în cazul polinoamelor ortogonale, $I_{m,n}$ şi deci $J_{m,n}$, afară de $J_{n,n}$, sunt nuli.

Introducerea aceleeaşi particularizări în prima expresiune a polinomului $P_n(x)$, conduce la o nouă expresiune, sub formă de determinant, a polinoamelor ortogonale.

*) Sulle serie di polinomi, Annalidi Matematica 1922.

3. Să determinăm acum o funcţiune $U_n(x)$, astfel ca

$$\varphi(x)P_n(x) = \frac{d^n U_n}{dx^n}.$$

Să impunem funcţiunei $U_n(x)$ condiţiunea de a se anulă împreună cu primele sale $(n-1)$ derivate, pentru $x = a$, adică

$$U_n(a) = U'_n(a) = U''_n(a) = \ldots U_n^{(n-1)}(a) = 0.$$

Relaţiunea (3), în care facem înlocuirea de mai sus, integrată prin părţi, devine:

$$b^m U^{(n-1)}(b) - mb^{m-1}U^{(n-2)}(b) + m(m-1)b^{m-2}U^{(n-3)}(b) - \ldots = J_{m,n}.$$

Dacă în această relaţiune dăm lui m valorile 0, 1, 2,... $(n-1)$, obţinem un sistem de ecuaţiuni, cu ajutorul căruia găsim expresiunile diverselor cantităţi $U^{(n-1)}(b)$, $U^{(n-2)}(b)$, etc.. :. $U_n(b)$ va fi un polinom de gradul $(n-1)$ în b, fie

$$U_n(b) = \frac{F_n(b)}{n!}.$$

Vom puteà deci scrie:

$$U_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n}(x-a)^n\left[F_n(b) + \frac{x-b}{1}F_{n-1}(b) + \frac{(x-b)^2}{2!}F_{n-2}(b) + \ldots + (x-b)^n\theta_n(x)\right]$$

$\theta_n(x)$ fiind o funcţiune arbitrară, de aceeaşi natură cu $\varphi(x)$. Observând că

$$F_{n-i}(b) = F_n^{(i)}(b),$$

mai putem scrie:

$$U_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n}(x-a)^n[F_n(x) + (x-b)^n\theta_n(x)]$$

şi deci

$$(4)\quad P_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n[P_n(x) + (x-b)^n\theta_n(x)]\right].$$

Polinomul $P_n(x)$ *se poate,* deci, *exprimà sub forma derivatei a* n^{a} *a unei funcţiuni.*

Funcțiunea $\theta_n(x)$ nu este absolut arbitrară ci, este în mod univoc dependentă de funcțiunea $\varphi(x)$ și polinomul $P_n(x)$.

Din expresiunea de mai sus, deducem:

$$F_n(x)+(x-b)^n\theta_n(x)=\frac{n!(b-a)^n}{(x-a)^n}\int_a^x dx\int_a^x dx\ldots\int_a^x \varphi(x)P_n(x)dx$$

sau, având în vedere identitatea

$$\int_a^x dx\int_a^x dx\ldots\int_a^x f(x)dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1}f(s)ds.$$

$$(5)\quad F_n(x)+(x-b)^n\theta_n(x)=\frac{n(b-a)^n}{(x-a)^n}\int_a^x (x-s)^{n-1}\varphi(s)P_n(s)ds.$$

Integrala din membrul al doilea se anulează împreună cu primele $(n-1)$ derivate în raport cu x, pentru $x=a$, astfel că membrul întâiu și în special $\theta_n(x)$ este finită pentru această valoare.

Este interesant cazul când funcțiunea $\theta_n(x)$ este unică pentru toate polinoamele $P_n(x)$, adică este independentă de n, $\theta_n(x)=\theta(x)$. Relațiunea (5) pentru $n=1$ și cu această înlocuire, devine

$$(5_1)\qquad F_1(x)+(x-b)\theta(x)=\frac{b-a}{x-a}\int_a^x \varphi(s)P_1(s)ds$$

și eliminarea funcțiunei $\theta(x)$ între (5) și (5_1) conduce la o *ecuație integrală Volterra de speța a doua*

$$F_n(x)-(x-b)^{n-1}F_1(x)=\frac{n(b-a)^n}{(x-a)^n}\int_a^x (x-s)^{n-1}\varphi(s)P_n(s)ds$$

$$-\frac{(b-a)(x-b)^{n-1}}{x-a}\int_a^x \varphi(s)P_1(s)ds,$$

a cărei soluție este polinomul $P_n(x)$.

Dacă $\theta(x)=\varphi(x)$ atunci $\varphi(x)$ este soluția *ecuației integrale Volterra* (6).

$$(6)\quad F_n(x)+(x-b)^n\varphi(x)=\frac{n(b-a)^n}{(x-a)^n}\int_a^x (x-s)^{n-1}\varphi(s)P_n(s)ds$$

și cum n ia o infinitate de valori, rezultă că $\varphi(x)$ *este soluția unei infinități de ecuații integrale Volterra, cu membrul al doilea.*

Ecuațiile integrale (6) caracterizează polinoamele generale $P_n(x)$ definite în studiul de față. Ele fac deosebirea între aceste polinoame și *polinoamele ortogonale*, în legătură cu cari, D-l N. ABRAMESCU a pus în evidență *o ecuație integrală Volterra de speța întâia.*

M. GHERMĂNESCU.

CÂTEVA TEOREME ÎN LEGĂTURĂ CU CERCURILE TRITANGENTE.

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

1. O dreaptă ce trece prin I taie cercurile BIC, CIA, AIB respectiv în A_1, B_1, C_1. Proecțiile lui A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA și AB sunt colineare.

Fie I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC; dreptele I_1A_1, I_2B_1 și I_3C_1 sunt paralele, — deci isogonalele lor în raport cu unghiurile triunghiului $I_1I_2I_3$ sunt concurente într'un punct M al cercului $I_1I_2I_3$. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt omoloagele lui M considerat în triunghiul $I_1I_2I_3$ în raport cu triunghiurile I_1BC, I_2AC și I_3AB, care sunt asemenea cu el. Fie A'_1, B'_1, C'_1 proecțiile punctelor A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA și AB și M_1, M_2, M_3 proecțiile lui M pe laturile triunghiului $I_1I_2I_3$. M fiind pe cercul $I_1I_2I_3$,—M_1, M_2, M_3 sunt colineare pe dreapta SIMSON a lui M; A'_1 e omologul lui M_1 din triunghiul $I_1I_2I_3$ în raport cu I_1BC, — fiind puncte obținute din puncte omoloage prin construcții analoage, deci: $M_1I_2/M_1I_3 = A'_1B/A'_1C$.

Analog: $M_2I_3/M_2I_1 = B'_1C/B'_1A$ și $M_3I_1/M_3I_2 = C'_1A/C'_1B$.

Dar M_1, M_2, M_3 fiind colineare pe laturile lui $I_1I_2I_3$, după teorema lui MENELAUS avem: $\frac{M_1I_2}{M_1I_3} \cdot \frac{M_2I_3}{M_2I_1} \cdot \frac{M_3I_1}{M_3I_2} = +1$ și deci:

$\frac{A'_1B}{A'_1C} \cdot \frac{B'_1C}{B'_1A} \cdot \frac{C'_1A}{C'_1B} = +1$; deci A'_1, B'_1, C'_1 sunt colineare.

2. Tangentele în A_1, B_1 și C_1 respectiv la cercurile BIC, CIA și AIB, formează un triunghiu homologic cu triunghiul ABC.

Tangenta în M la cercul $I_1I_2I_3$ taie laturile triunghiului $I_1I_2I_3$

în M'_1, M'_2, M'_3. Tangentele în A_1, B_1, C_1 la cercurile BIC, CIA şi AIB taie laturile BC, CA, AB respectiv în A', B', C'. Punctele A', B', C' sunt respectiv omoloagele punctelor M'_1, M'_2, M'_3 considerate în triunghiul $I_1 I_2 I_3$ în raport cu triunghiurile I_1BC, I_2CA şi I_3AB ca fiind obţinute din puncte homoloage prin construcţii analoage, deci:

$$\frac{M'_1 I_2}{M'_1 I_3} = \frac{A'B}{A'C}\,;\ \frac{M'_2 I_3}{M'_2 I_1} = \frac{B'C}{B'A}\,;\ \frac{M'_3 I_1}{M'_3 I_2} = \frac{C'A}{C'B}\,,$$

dar: $\frac{M'_1 I_2}{M'_1 I_3} \cdot \frac{M'_2 I_3}{M'_2 I_1} \cdot \frac{M'_3 I_1}{M'_3 I_2} = +1$, căci M'_1, M'_2, M'_3 sunt colineare pe tangenta în M, la cercul $I_1 I_2 I_3$; deci:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = +1\,;$$ deci A', B', C' sunt colineare.

3. O a doua dreaptă trecând prin I, taie cercurile BIC, CIA şi şi AIB respectiv în A_2, B_2, C_2. Dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2, formează un triunghiu homologic cu triunghiul ABC.

Isogonalele dreptelor I_1A_2, I_2B_2, I_3C_2, se taie în N pe cercul $I_1 I_2 I_3$. Dreapta MN taie laturile triunghiului $I_1 I_2 I_3$ în M''_1, M''_2 şi M''_3. Dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 taie laturile BC, CA şi AB respectiv în A", B", C". Punctele A", B", C" sunt respectiv homoloagele punctelor M''_1, M''_2, M''_3 considerate în triunghiul $I_1 I_2 I_3$ în raport cu triunghiurile I_1BC, I_2CA şi I_3AB ca fiind obţinute din puncte homoloage prin construcţii analoage, deci:

$$\frac{M''_1 I_2}{M''_1 I_3} = \frac{A''B}{A''C}\,;\ \frac{M''_2 I_3}{M''_2 I_1} = \frac{B''C}{B''A}\,;\ \frac{M''_3 I_1}{M''_3 I_2} = \frac{C''A}{C''B}\,;$$

dar: $\frac{M''_1 I_2}{M''_1 I_3} \cdot \frac{M''_2 I_3}{M''_2 I_1} \cdot \frac{M''_3 I_1}{M''_3 I_2} = +1$, căci M''_1, M''_2, M_3 sunt colineare pe dreapta NM, deci: $\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = +1$; deci A", B", C" sunt colineare.

4. Proecţia pe bisectoara din A, a unui punct arbitrar P al cercului BIC, este centrul cercului circumscris triunghiului podar punctului P, în raport cu triunghiul ABC.

Fie P_1 simetricul lui P în raport cu bisectoara din A. Deoarece centrul cercului BIC e pe bisectoara din A, în mijlocul arcului BC al cercului ABC, rezultă că P_1 este pe acelaş cerc BIC şi P_1 este inversul lui P, căci $\sphericalangle PBI = \sphericalangle P_1BI$ şi $\sphericalangle PCI = \sphericalangle P_1CI$. Proec-

ţiile punctelor inverse P şi P_1 pe laturile lui ABC, sunt conciclice pe un cerc cu centrul în mijlocul lui PP_1, — deci proecţia lui P pe bisectoara din A este centrul cercului circumscris triunghiului podar punctului P, în raport cu triunghiul ABC.

5. A_3, B_3, C_3 fiind respectiv mijloacele arcelor BC, CA, AB ale cercului circumscris triunghiului ABC şi A_1, B_1, C_1 punctele unde o dreaptă ce trece prin centrul cercului înscris I, taie cercurile BIC, CIA, AIB, — dreptele A_1A_3, B_1B_3 şi C_1C_3 formează un triunghiu homologic cu triunghiul ABC.

I_1, I_2, I_3 fiind centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, isogonalele dreptelor I_1A_1, I_2B_1 şi I_3C_1 în raport cu unghiurile triunghiului $I_1I_2I_3$, sunt concurente într'un punct M al cercului $I_1I_2I_3$. Fie O' centrul cercului $I_1I_2I_3$. Dreapta MO' taie laturile triunghiului $I_1I_2I_3$ în R_1, R_2, R_3. Dreptele A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 taie laturile BC, CA, AB în R'_1, R'_2, R'_3; R'_1 e homologul lui R_1 din triunghiul $I_1I_2I_3$, în raport cu triunghiul I_1BC asemenea cu el. Deci: $R_1I_2/R_1I_3 = R'_1B/R'_1C$.

Analog: $R_2I_3/R_2I_1 = R'_2C/R'_2A$ şi $R_3I_1/R_3I_2 = R'_3A/R'_3B$.

R_1, R_2, R_3 fiind colineare pe laturile lui $I_1I_2I_3$ după teorema lui MENELAUS, avem: $\frac{R_1I_2}{R_1I_3} \cdot \frac{R_2I_3}{R_2I_1} \cdot \frac{R_3I_1}{R_3I_2} = +1$ şi deci:

$\frac{R'_1B}{R'_1C} \cdot \frac{R'_2C}{R'_2A} \cdot \frac{R'_3A}{R'_3B} = +1$, deci R'_1, R'_2, R'_3 sunt colineare.

Desigur se mai pot deduce analog şi alte proprietăţi remarcabile; — am dedus mai sus numai acelea care sunt în directă legătură cu cercurile ce trec prin două din vârfurile triunghiului de referinţă şi prin centrul cercului înscris lui.

M. GRÜNBAUM.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare, pe intervalul 1 Septembrie 1924 – 31 August 1925.

Subsemnaţii, formând comisiunea pentru acordarea premiului de matematici, aplicate la ştiinţele militare, pe intervalul 1 Septembrie 1924—31 August 1925 inclusiv, am constatat următoarele:

Din publicațiunile tipărite sau litografiate în intervalul 1 Septembrie 1924—31 August 1925, aceea care s'a impus mai mult atențiunei noastre, în scopul acordărei premiului pentru lucrări de matematici aplicate la științele militare și care răspunde mai bine regulamentului acestui premiu, este articolul:

„Calculul corecțiunilor balistice și atmosferice"

de Maiorul VIRGIL MIHĂILESCU
din Direcția XI Technică

publicat în «*Revista Artileriei*» No. 1 din Ianuarie 1925.

Autorul acestui articol stabilește formule de corecțiuni foarte exacte și face aplicațiuni numerice, reușind să dea o soluție completă problemei celei mai delicate și celei mai utile de tragere și balistică.

De aceia, propunem ca pentru anul acesta, premiul «General SC. PANAITESCU» să se acorde d-lui LOCOT.-COL. V. MIHĂILESCU (care la data publicărei articolului era maior) din Ministerul de Războiu, Direcția XI Technică, București.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU,
GH. EM. FILIPESCU, LOCOT.-COL. GH. LITEANU.

Acest raport s'a citit și s'a aprobat în Adunarea Generală Extraordinară dela 29 Ianuarie 1926.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

NOTE MATEMATICE

24. *Alte zece feluri de* **Calcul.** (Vezi Nota 62, pag. 375. Anul XXX).

31. **Aplicat.** *Bisaere.*—F. T. P. Applied calculus. Londra 1921.

32. **Conjectural.** *Parissot.*—Traité du calcul conjectural. Paris 1810.

33. **Direcțional.** *E. W. Hyde.*—Directional calculus.

34. **Geometric.** *R. Leveugle.*—Précis de calcul géométrique. Paris 1920.

35. **Inaintat.** *G. B. Wilson.*—Advanced calculus.

36. **Interpolaţiunilor.** *F. N. Thiele.*—Interpolations rechnung.
37. **Numerelor.** *L. Schrutka.*—Zahlenrechnung. Lipsca 1923.
38. **Şcolar.** *A. N. Mc. Neihof & I. D. M. Noile.*—A school calculus.
39. **Tacheometric.** *G. Sanfelici.*—Le calcul tachéométriqüe simplifié. Paris 1907.
40. **Tensorial.** *A. de Pompignan.* — Note sur le calcul tensoriel. Paris 1923.

(Va urmă). I. IONESCU.

25. *Asupra numerelor pitagorice* lată două căi de a găsi soluţiile întregi ale ecuaţiei

(1) $$x^2 + y^2 = z^2.$$

I. Din (1) se deduce

(2) $$y^2 = (z - x)(z + x).$$

Pentruca membrul al doilea al egalităţii (2) să fie patrat perfect, trebue să avem:

$$z - x = mp^2$$

$$z + x = mq^2$$

$$\therefore \quad z = \tfrac{1}{2}m(p^2 + q^2) \quad \text{şi} \quad x = \tfrac{1}{2}m(p^2 - q^2).$$

Ducând aceste valori în (2), se găseşte

$$y = mpq.$$

Simplificând valorile lui x, y, z cu m, se găsesc soluţiile sub forma:

$$x = (p^2 - q^2)/2, \quad y = pq, \quad z = (p^2 + q^2)/2,$$

în care p şi q sunt numere prime între ele.

După cele stabilite în nota 81 din *Gazeta Matematică* Vol. XXIX pag. 450, acest sistem de soluţii este cuprins în sistemul:

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2.$$

II. Fie identitatea *)

*) Nota d-lui TAILER este primită la redacţie cu mult înainte de publicarea notei asemănătoare a d-lui COL. C. FELIX asupra aceleaşi chestiuni, publicată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXX pagina 376.

N. R.

(3) $$(a+b)^2 = (a+b)^2 + 4ab.$$

Pentruca $4ab$ să fie patrat perfect este destul să avem:

(4) $$a = mp^2 \quad , \quad b = mq^2,$$

m fiind *c. m. d. c.* al numerelor a, b, iar p şi q două numere prime între ele. Apropiind pe (3) de (1) şi ţinând seama de (4), se găseşte

$$x = m(p^2 - q^2) \quad , \quad y = 2mpq \quad , \quad z = m(p^2 + q^2),$$

sau după simplificarea prin m, dăm peste sistemul de soluţii dejà găsite.

G. Tailer

26. *Asupra exerciţiului 50 din „G. M." vol. XXIX p. 198.* Se dă un cerc de rază R şi un punct A fix pe el. O coardă variabilă ce trece prin A, taie cercul în punctul C. Se cere locul unui punct B, situat pe perpendiculara ridicată în A pe AC, astfel ca $BC = 2R$.

In soluţia publicată s'a strecurat o scăpare din vedere. Fie AD diametrul dus din A. Dacă ducem perpendiculara AB în regiunea planului în care se găseşte AD, triunghiurile ABC şi ACD, dreptunghii, sunt egale având AC comun şi $AD = BC = 2R$. Rezultă că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$. Cu alte cuvinte, B se găseşte pe cercul dat. Dacă am fi luat perpendiculara AB în regiunea planului în care nu se găseşte AD, am fi obţinut, ca loc, figura simetrică cercului în raport cu A. Deci locul căutat se compune din aceste două cercuri. In coordonate polare ρ şi ω, în raport cu A şi AD, ecuaţia locului se obţine imediat:

$$\rho = 2R \sin(\omega \pm \tfrac{1}{2}\pi).$$

Ilie Popa.

27. *Câtevà proprietăţi ale triunghiului.* Fie A'B'C' triunghiul ortic al unui triunghiu ABC, H ortocentrul, A_1, B_1, C_1 punctele în care înălţimile taie a doua oară cercul circumscris şi $A_2B_2C_2$ triunghiul format de dreptele lui Simson ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu triunghiul ABC. Iată câtevà proprietăţi interesante în figura astfel formată:

1. *Triunghiurile* $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ *sunt homotetice egale.*

In adevăr, dreapta lui Simson a punctului A_1 în raport cu triunghiul ABC, trece prin A' şi după o proprietate clasică, direcţia

ei este direcția tangentei în A la cercul ABC; ea este deci paralelă cu B'C'. Rezultă de aici imediat că triunghiul ortic A'B'C' este complimentarul lui $A_2B_2C_2$ (TRAIAN LALESCU, *Asupra dreptei lui* SIMSON, *Revista Matematică din Timișoara,* Vol. II, p. 148). Se știe însă că triunghiurile A'B'C' și $A_1B_1C_1$ sunt homotetice, în raportul 1 : 2, având pe H ca centru de homotetie. Din cele de mai sus conchidem proprietatea enunțată.

2. *Triunghiurile* ABC și $A_2B_2C_2$ *au același cerc al lui* EULER, pentru că triunghiul ortic al lui ABC este complimentarul lui $A_2B_2C_2$.

3. *Cercurile circumscrise triunghiurilor* ABC și $A_2B_2C_2$ *sunt egale.* Este o consecință imediată a proprietății 2.

4. *Triunghiurile formate de două laturi ale triunghiului* $A_2B_2C_2$ *și o latură opusă a lui* ABC *sunt isoscele.*

Această proprietate rezultă imediat din faptul că laturile lui $A_2B_2C_2$ sunt paralele cu ale lui A'B'C', iar laturile lui ABC sunt antiparalele cu ale lui A'B'C'. Astfel triunghiul isoscel format de laturile A_2B_2, A_2C_2 și BC are unghiurile dela bază egale cu unghiul A.

5. *Triunghiurile* $A_2B_2C_2$ și ABC *sunt ortologice,* căci după proprietatea 4) perpendicularele scoborîte din vârfurile lui $A_2B_2C_2$ pe laturile lui ABC, sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A_2B_2C_2$; ele se întâlnesc deci în centrul cercului înscris în acest din urmă triunghiu.

CONSTANTIN TH. IONESCU-BUJOR.
Elev Cl. VII, Liceul Cantemir.

28. *Asupra problemei 3238.* In această problemă se arată că rezultatul eliminării lui x între polinoamele

$$(1) \qquad Ax^{n+1} + Bx^n + C = 0, \quad x^2 - x + 1 = 0,$$

este una din expresiunile:

$$(B+C)^2 + A(B+C) + A^2 = 0,$$
$$(A-C)^2 - (A-C)(A+B) + (A+B)^2 = 0,$$
$$(A+B-C)^2 - B(A+B-C) + B^2 = 0,$$
$$(B-C)^2 + A(B-C) + A^2 = 0,$$
$$(A+C)^2 - (A+B)(A+C) + (A+B)^2 = 0,$$
$$(A+B+C)^2 - B(A+B+C) + B^2 = 0,$$

după cum restul împărțirei lui n prin 6 este 0, 1, 2, 3, 4 sau 5.

In cele ce urmează, vom explică acest lucru, punându-l în legătură cu periodicitatea unui oarecare şir.

1. Fie

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi(x) = A_0 x^{n+1} + A_1 x^n + A = 0 \\ f(x) = x^2 - (a_0 x + a_1) = 0 \end{cases}$$

şi ne propunem a elimină pe x între aceste două polinoame.

(Cazul $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ este problema 3238).

Fie x rădăcina ecuaţiei $f(x) = 0$, cu ajutorul căreia formăm şirul

$$(2)\qquad u_n = A_0 x^{n+1} + A_1 x^n \quad (n = 0,1.\ 2,...)$$

Considerăm ecuaţiile

$$f(x) = 0, \quad xf(x) = 0, \quad x^2 f(x) = 0,...$$

şi să formăm combinaţia

$$A_1 x^i f(x) + A_0 x^{i+1} f(x) = 0,$$

sau:

$$A_1 (x^{i+2} - a_0 x^{i+1} - a_1 x^i) + A_0 (x^{i+3} - a_0 x^{i+2} - a_1 x^{i+1}) = 0,$$

adică, ţinând seama de (2),

$$(3)\qquad u_{i+2} = a_0 u_{i+1} + a_1 u_i ,$$

unde i ia valorile 0, 1, 2,...

Din aceste egalităţi deducem că u_2, u_3,... se pot exprimă cu ajutorul lui u_0 şi u_1.

Să punem:

$$(4)\quad \begin{cases} X_0 = a_0 u_1 + a_1 u_0 \\ X_1 = \qquad a_1 u_1 \end{cases}$$

X_0 şi X_1 sunt polinoame de gradul al doilea în x.

Egalităţile (3) devin:

$$\begin{aligned} u_2 &= X_0 \\ u_3 &= a_0 u_2 + X_1 \\ u_4 &= a_0 u_3 + a_1 u_2 \\ u_5 &= a_0 u_4 + a_1 u_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

de unde se deduce

$$u_2 = X_0, \quad u_3 = -\begin{vmatrix} X_1 & a_0 \\ X_0 & -1 \end{vmatrix}, u_4 = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 \\ X_1 & -1 & a_1 \\ X_0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$u_5 = -\begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & -1 & a_0 & a_1 \\ X_1 & 0 & -1 & a_0 \\ X_0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \ldots$$

Dacă introducem şirul

$$(5) \quad \delta_1 = a_0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ -1 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ -1 & a_0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\delta_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 \\ -1 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & -1 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & a_0 \end{vmatrix}, \ldots$$

Se vede cu uşurinţă că:

$$(6) \quad \begin{aligned} u_2 &= X_0 \\ u_3 &= \delta_1 X_0 + X_1 \\ u_4 &= \delta_2 X_0 + \delta_1 X_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= \delta_{n-2} X_0 + \delta_{n-3} X_1. \end{aligned}$$

Dacă înlocuim pe X_0 şi X_1 prin expresiunile (4), iar u_0 şi u_1 prin expresiunile (2), avem:

$$u_n = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

unde

$$\alpha = A_0 (a_0 \delta_{n-2} + a_1 \delta_{n-3}) = A_0 \delta_{n-1}.$$

$$\beta = A_0 a_1 \delta_{n-2} + A_1 (a_0 \delta_{n-2} + a_1 \delta_{n-3}) = A_0 a_1 \delta_{n-2} + A_1 \delta_{n-1}.$$

$$\gamma = A a_1 \delta_{n-2}.$$

Vedem deci că rezultatul eliminării lui x între ecuaţiile (1) este acelaş ca rezultatul eliminării lui x între ecuaţiile:

$$(1') \qquad \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma + A = 0, \\ x^2 - a_0 x - a_1 \quad = 0, \end{cases}$$

unde α, β, γ au valorile de mai sus.

Eliminarea lui x între ecuațiile (1') conduce la:

$$(A + \gamma + \alpha a_1)^2 + a_0 (\beta + \alpha a_0)(A + \gamma + \alpha a_1) - a_1 (\beta + \alpha a_0)^2 = 0.$$

2. Să revenim la șirul (5). Se vede cu ușurință că termenii acestui șir se pot exprimà cu ajutorul lui δ_1 și δ_2 prin formulele:

$$(7) \qquad \begin{cases} \delta_3 = a_0 \delta_2 + a_1 \delta_1 \\ \delta_4 = a_0 \delta_3 + a_1 \delta_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_n = a_0 \delta_{n-1} + a_1 \delta_{n-2}. \end{cases}$$

Dacă privim șirurile (6) și (7), vedem că ele sunt identice, dacă $X_0 = a_1$ și $X_1 = a_0$. Deci, dacă șirul (6) este periodic, șirul (5) adică (7) este deasemenea, și viceversa.

(Un șir se zice că este periodic și are perioadă k dacă termenii lui se repetă din k în k. Exemplu: șirul

$$-1, 2, 3, -1, 2, 3, \ldots$$

este periodic și are perioada 3).

Putem totdeauna determinà două numere reale sau imaginare a_0 și a_1, astfel ca șirul (5), adică (7) să fie periodic și să aibă perioada k.

Intr'adevăr, dacă scrim ecuațiile:

$$(8) \qquad \delta_1 = \delta_{k+1}\ ,\ \delta_2 = \delta_{k+2},$$

relațiile (7) dovedesc că vom aveà:

$$\delta_3 = \delta_{k+3}\ ,\ \delta_4 = \delta_{k+4}\ , \ldots$$

și deci șirul este periodic și de periodă k. Valorile lui a_0 și a_1 sunt date de ecuațiile (8).

Aplicație. Ne propunem să determinăm a_0 și a_1 astfel ca perioada șirului 5 să fie 6. Trebue ca

$$\delta_1 = \delta_7 \text{ și } \delta_2 = \delta_8.$$

Calculând din aproape în aproape δ_7 și δ_8, vom aveà ecuațiile:

$$a_0^7 + 6a_0^5 a_1 + 10a_0^3 a_1^2 + 4a_0 a_1^3 = a_0$$

$$a_0^8 + 7a_0^6 a_1 + 15a_0^4 a_1^2 + 10a_0^2 a_1^3 + a_1^4 = a_0^2 + a_1.$$

Dacă neglijem soluţiile nule ale acestui sistem, vedem că celelalte soluţii sunt date de:

$$\begin{cases} a_1 = -a_0^2 \\ a_0^6 = +1. \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} a_1 = -a_0^3/3 \\ a_0^6 = -27. \end{cases}$$

Primul sistem dă soluţia $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, care e cazul problemei 3238.

D. V. I.

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Tomul XXXIX. No. 10. Decemvrie 1925. Bruxelles. Mecanică şi geometrie, de J. NEUBERG. In privinţa unei probleme de cinematică, de R. GOORMAGHTIGH. Demonstraţia vectorială a unei teoreme a lui MANNHEIM, de R. DEAUX. Note de geometrie elementară, de AD. M. Transformări deduse din construcţia perechilor de puncte pe laturile unui triunghiu, de B. M. BARBĂLATT.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 50. No. 7 şi No. 8. Ianuarie 1926. Paris.

Revista matematică din Timişoara. Anul V. No. 10. Decemvrie 1925. Timişoara. O proprietate a cercului şi a sferei, de I. CRĂCIUNESCU.

Idem. Anul V. No. 11. Fevruarie 1926. Timişoara. Aflarea directă a câtului a două polinoame, de V. ALACI.

Foaia matematică. Anul III. No. 1. Ianuarie 1926. Chişinău. După doi ani (Comitetul). Chestiuni de transformare cosogonală, de M. GRÜNBAUM. O sumă trigonometrică, de G. TAILER.

Curierul Matematic. Vol. I. No. 1. Ianuarie 1926. Bucureşti. (Litografiat) Asupra ortopolului, de SLT. M. T. FOCŞĂNEANU. Chestiuni de examinat, de M. GRÜNBAUM.

Buletinul Societăţii Studenţilor in matematici. Decemvrie 1925. Bucureşti. Asupra unei clase de polinoame, de M. GHERMĂNESCU. Asupra unor polinoame remarcabile, de T. POPOVICIU. Asupra unor transformări de curbe, de A. NICULESCU. Asupra polinoamelor ultrasferice, de T. POPOVICIU. O problemă de geometrie, de E. BALLAN şi N. GEORGESCU.

Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara, (Dări de seamă ale Societăţii Ştiinţifice din Timişoara. Tomul I. Fasc. I. Timişoara 1925). Une classe des sommes trigonométriques qui peuvent approximer une fonction d'une variable réelle, par V. ALACI.

Revista **„Matematica Bârlădeană"**. Revistă lunară de matematici elementare. Anul I. No. 1. Ianuarie 1926. (Abonamentul pe an 80 lei, pentru elevi 65 lei, pentru străinătate 100 lei şi se fac la D-l VICTOR GH. OPRIŞANU, Strada Dobranici, Bârlad; manuscrisele se trimit D-lui N. GH. GAIU, Strada Regală, 5, Bârlad).

Societatea *„Matematica Bârlădeană"*, incepe tipărirea unei reviste de matematici elementare. Jumătate din coprinsul primului număr este ocupat de chestiuni extramatematice, iar restul un articol de două pagini: Proprietaţi a câtorvă triunghiuri, de GAIU GH. EMANOIL, o notă matematică, patru exerciţii şi 16 probleme propuse. Se observă peste tot o mare pierdere de spaţiu utilizabil pentru scopul revistei, titluri prea mari, spaţii prea multe albe, încât revista pare mai mult dirijată de tipograf, decât de Comitetul de conducere. Opt pagini ar fi fost deajuns ca să coprindă totul. Tipografia nu posedă toate semnele matematice necesare. Facem aceste observaţiuni pentru ca viitoarele numere să apară, cum suntem obişnuiţi să vedem cărţile şi revistele de matematici, iar nu ca pe cele de poezii! De altfel, câtevà nume din Comitetul de redacţie bine cunoscute nouă şi cititorilor *Gazetei Matematice*, ar puteà fi chezăşie că revista ar puteà fi plină de scrieri interesante şi că acestea i-ar puteà asigurà o viaţă lungă, din punct de vedere al intreţinerii ei intelectuale.

I. IONESCU.

Ziarul Matematic. Revistă lunară pentru uzul Şcoalelor secundare. Anul I. No. 1. Ianuarie 1926. (Şapirografiat, cu coperta tipărită). Chişinău. Abonamentul 60 lei, pentru elevi 45 lei anual şi 25 semestrial. Redacţia şi Administraţia la D-nii: BORIS VULPANOVICI şi PETRU LEESCU, la Liceul real din Chişinău.

Redactorii mai sus numiţi, elevi ai Liceului real din Chişinău şi Corespondenţi ai *Gazetei Matematice*, incep publicarea unei noi reviste matematice elementare. Primul număr coprinde o prefaţă, curiozităţi matematice, unele extrase din Suplimentele *Gazetei Matematice*, o scurtă biografie a lui D'ALEMBERT, de F. RIŞETNIC, Patrate magice, de B. VULPANOVICI, asupra derivatelor, de P. LEESCU, Note matematice, Bibliografie, Exerciţii, Probleme propuse. Şapirografiarea nu este destul de îngrijită; sunt cuvinte, şi părţi din formule, care nu se pot citi de loc. Ortografia lasă de dorit; un asociat tare la limba română nu ar strică. Lipseşte paginaţia foilor, numărul paginilor fiind 16, în formatul unui sfert de coală.

Faptul că tinerii noştri nu mai găsesc încăpătoare actualele gazete, reviste, foi, jurnale, etc., matematice pentru a-şi plasà producţiunile lor originale, este bineînţeles înbucurător. Sunt însă în stare dânşii să controleze, cât de departe, dacă cele ce se publică sunt sau nu originale? Mă îndoiesc! Apoi, interesul este ca producţiunea matematică să pătrundă în lumea matematică. Aceasta nu se poate realizà decât de publicaţiunile care pot suportà cheltuielile unei tipăriri îngrijite şi de răspândire cu profuziune a coprinsului lor. Şi în acest caz, întreb, dacă cheltuielile care se fac cu reviste scoase în condiţiuni neprielnice, nu ar fi mai bine întrebuinţate ca să se dea revistelor care pot răspândi mai bine lucrările originale sub formă de sporirea coprinsului, sau ca suplimente?

Altfel mijloacele se împart, revistele mici nu se pot susţine, decepţiile tinerilor se înmulţesc şi producţiunea ştiinţifică a ţării suferă. Nu este niciun merit să fii director de revistă care nu are viaţă!

I. IONESCU.

SERGE BERNSTEIN. *Leçons sur les propiétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytique d'une variable réelle.* Paris. Gauthiers Villars et C-ie, editori. 1926 (Apărută în Colecţiunea de monografii asupra teoriei funcţiunilor de sub direcţiunea D-lui EMILE BOREL).

B. HOSTINSKY. *Sur les probabilités géométriques.* Brno 1925.

Autorul şi-a propus să extindă problemele tratate, pentru probabilitatea geometrică în plan, de către CZUBER şi CROFTON, la suprafeţe închise în spaţiu. După extensiunea definiţiunii şi examinării principiilor fundamentale ale calculului probabilităţilor şi a unor probleme generale asupra dreptelor şi planelor, se tratează diferite chestiuni de probabilitate geometrică şi de medii. Astfel se găseşte că media tuturor coardelor care se pot duce în interiorul unei suprafeţe închise, este de patru ori câtul dintre volumul închis V de acea suprafaţă şi aria ei exterioară S. Probabilitatea ca două plane care taie o suprafaţă să aibă intersecţia secantă suprafeţei, este $\pi^3 S/4M^2$, în care:

$$M = \int\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) d\sigma.$$

Probabilitatea ca trei plane secante unei suprafeţe să aibă intersecţia lor în interiorul suprafeţei, este $\pi^4 V/M^3$. Urmează apoi demonstrarea unor teoreme şi calculul diferitelor probabilităţi geometrice. La fine sunt câtevă aplicaţiuni cu rezultate interesante asupra sferei. Astfel media lungimii cercurilor trasate pe o sferă este $\pi^2 R/2$, iar a ariilor lor $2\pi R^2/3$, unde R este raza; media distanţelor dintre două puncte din interiorul sferei este 36R/35, probabilitatea ca din cinci puncte luate în interiorul sferei, două să fie de aceiaşi parte a planului format de celelalte trei, este 84/143, etc.

I. IONESCU.

VACLAV CUPR. *Absorbţiunea cloridului de hidrogen gazos de către acidul sulfuric.* (In limba cehă cu un rezumat în limba engleză). Brno 1925.

A. SIMEK & H. KADLCOVA. *Un nou fenomen electrocinetic, studiul electrocapilarităţii a oxidului teluros topit.* (In limba cehă, cu un rezumat în limba franceză). Brno. 1925.

J. FREJKA & K. VSETECKA. *Cercetări asupra dosagiului acidului lactic, microdosagiul în sânge.* (In limba cehă, cu un rezumat în limba franceză). Brno. 1925.

DR. JOSEF SAHANEK. *O explicaţiune a originii undelor electromagnetice.* (In limba cehă, cu un rezumat în limba engleză). Brno. 1925.

(Ultimele cinci broşuri sunt din *Publicaţiunile Facultăţii de Ştiinţe ale Universităţii Masaryk* din *Brno).*

CERERI.

Răspuns la cererea No. 133. D-l I. I. Iliuţa Dăbuleni a cerut în numărul dela 15 decemvrie al „Gazetei Matematice“, dacă sunt erori de tipar la tabelele de patrate şi cuburi din Formularul de matematici, de V. Coman şi N. Malla. Sunt în adevăr erori. Astfel la pagina 243, din Vol. I, Ediţia II, am găsit dat pentru 238 patratul 56944, în loc de 56644 şi în loc de 57121, ca patrat al lui 239, numărul eronat 57111.

Lew Soltisky.
Elev în anul I al Şcoalei politecnice din Bucureşti, secţiunea de Mine.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1083. *Se consideră o parabolă înscrisă într'un triunghiu dat, şi se duce a patra tangentă comună la această conică şi la cercul înscris în triunghiu. Să se găsiască locul punctului de contact al tangentei cu parabola, când aceasta variază, rămânând inscrisă în triunghiu.*

Tr. Lalescu.

Să luăm laturile AB şi AC ale triunghiului cu axe Ox şi Oy şi fie $(a, 0)$, $(0, b)$ coordonatele punctelor B, C, (m, m) ale centrului cercului înscris şi $\theta = \sphericalangle CAB$. Fie $ux + vy + wz = 0$, ecuaţia tangentei la cercul înscris, a cărei ecuaţie se obţine scriind că distanţa centrului (m, m) pânăla tangentă, este egală cu raza, adică

$$\frac{(mu + mv + w)^2 \sin^2\theta}{u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta} = m^2 \sin^2\theta ;$$

deci ecuaţia cercului înscris, va fi

$$4m^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta\, uv + 2muw + 2mvw + w^2 = 0,$$

m fiind astfel ales, încât distanţa centrului pânăla tangenta BC să fie egală cu raza $m\sin\theta$, adică este dat de relaţia

$$m^2 \sin^2\theta = \frac{(m/a + m/b - 1)^2 \sin^2\theta}{1/a^2 + 1/b^2 + 2\cos\theta/ab},$$

aşă că $m = \text{const.}$

Fie

$$(1) \qquad u_0x + v_0y + w_0z = 0,$$

ecuația unei tangente variabile la cercul înscris; avem

$$(2) \qquad 4m^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta\, u_0v_0 + 2mu_0w_0 + 2mv_0w_0 + w_0^2 = 0.$$

Parabola înscrisă în triunghiul ABC, este înscrisă și în patrulaterul format de AB, BC, CA și tangenta (1), care taie axele Ox și Oy în $M(w_0, 0, -u_0)$, $N(0, w_0, -v_0)$. Printre conicele înscrise în acest patrulater, sunt două reduse la câte două puncte, (N, B), (M, C), așă că ecuația conicelor, înscrise în patrulaterul de mai sus, este

$$(au+w)(vw_0 - wv_0) + \lambda(bv+w)(uw_0 - wu_0) = 0.$$

Pentru a fi parabolă, trebue să lipsească termen în w^2, deci

$$\lambda = -v_0/u_0,$$

și ecuația parabolei înscrise va fi

$$f(u, v, w) \equiv uvw_0(bv_0 - au_0) - vwu_0(bv_0 + w_0) + uwv_0(au_0 + w_0) = 0.$$

Coordonatele punctului de contact cu tangenta (u_0, v_0, w_0), vor fi:

$$x = f'_{u_0} \equiv v_0w_0(bv_0 + w_0),$$

$$y = f'_{v_0} \equiv -w_0u_0(au_0 + w_0),$$

$$z = f'_{w_0} \equiv u_0v_0(au_0 - bv_0).$$

Revenind la coordonatele neomogene și făcând $z = 1$, $w = 1$, avem

$$(3) \qquad x = \frac{bv_0 + 1}{u_0(au_0 - bv_0)}, \quad y = \frac{-(au_0 + 1)}{v_0(au_0 - bv_0)}.$$

Ecuația de condiție (2), devine, în acest caz,

$$4m^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta\, u_0v_0 + 2mu_0 + 2mv_0 + 1 = 0,$$

de unde, înlocuind pe u_0 cu t, avem

$$v_0 = -\frac{1 + 2mt}{2m[1 + 4m \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta t]}.$$

Formulele (3) devin

$$x=\frac{(1+2mt)\,[2mt(4m\sin^2\tfrac{1}{2}\theta-b)+2m-b]}{t(1+2mt)\,[8am^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta t^2+2mt(b+a)+b]},$$

$$y=\frac{4m^2t(1+at)\,(1+4m\sin^2\tfrac{1}{2}\theta t)^2}{t(1+2mt)\,[8am^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta t^2+2mt(b+a)+b]}.$$

Deci locul punctului de contact este o *cuartică unicursală.*

După expresiunea coordonatelor, se vede că această curbă are, pentru $t=0$, asimptota $y=1/b$, parabolă cu axa Ox şi pentru $t=-1/2m$, asimptota $x=4m^2/a$, paralelă cu axa Oy. Mai are o asimptotă paralelă cu BC; aceasta se poate uşor observà, considerând pentru tangenta variabilă MN, poziţiuni paralele cu Ox, Oy şi BC.

Cuartica mai e tangentă şi la laturile triunghiului ABC, în punctele de contact ale lor cu cercul înscris, observând aceasta pentru cazul când tangenta mobilă la cercul înscris se confundă cu una din laturi.

Coordonatele unui punct ale cuarticei fiind date în funcţiune de un parametru variabil t, nu va fi fără folos de a expune o metodă propie pentru *găsirea punctelor duble ale unei cuartice unicursale.*

Fie

$$x=a_1t^4+b\,t^3+c_1t^2+d_1t+e_1,$$
$$y=a_2t^4+b_2t^3+c_2t^2+d_2t+e_2,$$
$$z=a_3t^4+b_3t^3+c_3t^2+d_3t+e_3,$$

expresiunile coordonatelor omogene ale unui punct ale cuarticei în funcţiune de parametru t. Să tăiem cuartica cu dreapta

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

şi să numim t_1, t_2, t_3, t_4 valorile lui t, corespunzătoare punctelor de intersecţie; ele sunt date de ecuaţia

$$(4)\qquad \alpha(a_1t^4+\ldots)+\beta(a_2t^4+\ldots)+\gamma(a_3t^4+\ldots)=0.$$

Numind cu S_1, S_2, S_3, S_4 sumele Σt_1, Σt_1t_2, $\Sigma t_1t_2t_3$, $\Sigma t_1t_2t_3t_4$ şi δ coeficientul lui t^4 din ecuaţia (4), avem

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta = 0,$$
$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta S_1 = 0,$$
$$\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 - \delta S_2 = 0,$$
$$\alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3 + \delta S_3 = 0,$$
$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 - \delta S_4 = 0.$$

Avem deci, eliminând pe α, β, γ, δ între primele patru ecuații și între prima și ultimile trei ecuații,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & S_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -S_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & S_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -S_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & S_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & -S_4 \end{vmatrix} = 0,$$

relațiuni de forma

$$AS_3 + BS_2 + CS_1 + D = 0, \tag{5}$$
$$CS_4 + ES_3 + FS_2 + G = 0, \tag{6}$$

care exprimă că punctele t_1, t_2, t_3, t_4 sunt în linie dreaptă. Dacă se dă t_1, t_2 corespunzătoare punctului dublu, aceste relațiuni permit de a calculà pe t_3 și t_4, corespunzătoare punctelor unde secanta t_1t_2 taie cuartica.

Dar, dacă t_1 și t_2 corespund punctului dublu, secanta t_1t_2 este nedeterminată și deci și t_3 și t_4, sau t_3t_4, t_3+t_4 sunt nedeterminate. Deci t_1 și t_2 sunt astfel de valori, încât ecuațiile (5) și (6) să ne dea valori nedeterminate pentru t_3t_4, t_3+t_4, deci ele să fie identice. Avem din (5) și (6),

$$A[t_1t_2(t_3+t_4) + t_3t_4(t_1+t_2)] + B[(t_1+t_2)(t_3+t_4) + t_1t_2 + t_3t_4] + C[t_1+t_2+t_3+t_4] + D = 0,$$
$$Ct_1t_2t_3t_4 + E[t_1t_2(t_3+t_4) + t_3t_4(t_1+t_2) + F[(t_1+t_2)(t_3+t_4) + t_1t_2+t_3t_4] + G = 0;$$

de unde, aranjând, găsim

$$(t_3+t_4)[At_1t_2 + B(t_1+t_2) + C] + t_3t_4[A(t_1+t_2) + B] + Bt_1t_2 + C(t_1+t_2) + D = 0,$$

$$(t_3+t_4)[Et_1t_2+F(t_1+t_2)]+t_3t_4[Ct_1t_2+E(t_1+t_2)+F$$
$$+Ft_1t_2+G=0.$$

Scriind că ecuațiile sunt identice, avem

$$(7)\qquad \frac{At_1t_2+B(t_1+t_2)+C}{Et_1t_2+F(t_1+t_2)}=\frac{A(t_1+t_2)+B}{Ct_1t_2+E(t_1+t_2)+F}$$
$$=\frac{Bt_1t_2+C(t_1+t_2)+D}{Ft_1t_2+G},$$

ecuații, care ne-ar permite să calculăm pe t_1t_2, t_1+t_2 și deci și pe t_1 și t_2, corespunzătoare punctelor duble.

O metodă de rezolvare e și următoarea. Fie k valoarea comună a rapoartelor (7); se obțin trei ecuații, de unde eliminând t_1t_2 și t_1+t_2, avem ecuația

$$\begin{vmatrix} A-kE & B-kF & C \\ -kC & A-kE & B-kF \\ B-kF & C & D-kG \end{vmatrix}=0,$$

care ne dă trei valori pentru k; luând numai primele două rapoarte din (7) și egalându-le cu k, avem ecuațiile

$$(A-kE)t_1t_2+(B-kF)(t_1+t_2)+C=0,$$
$$-kCt_1t_2+(A-kE)(t_1+t_2)+B-kF=0.$$

Deci cantitățile t_1 și t_2 sunt rădăcinile ecuației

$$\begin{vmatrix} t^2 & t & 1 \\ C & B-kF & A-kE \\ B-kF & A-kE & -kC \end{vmatrix}=0.$$

Pentru a obține punctele de inflexiune, va trebui să facem $t_1=t_2=t_3=t$ în ecuațiile (5) și (6) și eliminând pe t_4 între ele, se obține o ecuație care ne dă valorile lui t corespunzătoare punctelor de inflexiune.

N. A.

PROBLEMA 2916. *Fie* N *punctul de intersecție al axei* Ox *cu normala în* M *la curba* (C). *Pe perpendiculara în* N *pe* Ox *se ia lungimea* $NM_1 = MN$. *Să se arate:* 1°. *Că tangentele în* M *și* M_1 *la curbele descrise de aceste puncte se întâlnesc pe* Ox; 2°. *Că transformarea* (M, M_1) *este de contact;* 3°. *Să se determine curba* (C), *astfel ca lungimea* OM_1 *să fie egală cu abscisa punctului* M.

N. ABRAMESCU.

Soluție dată de D-nii: R. BĂDESCU, G. I. DUMITRESCU, G. C. TULLEA.

1°. Ecuația normalei în $M(x, y)$ la curba (C) este

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

iar coordonatele punctului N, sunt $(x + yy', O)$.

Însemnând cu (x_1, y_1) coordonatele punctului M_1, avem

$$\overline{NM_1}^2 = \overline{NM}^2 = y^2(1 + y'^2); \quad x_1 = x + yy', \quad y_1 = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Coeficientul unghiular al tangentei în M_1 la curba descrisă de acest punct, este

$$\frac{dy_1}{dy_1} = \frac{y'\sqrt{1 + y'^2} + y\dfrac{y'y''}{\sqrt{1 + y'^2}}}{1 + y'^2 + yy''} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Ecuația tangentei în M_1 este

$$Y - y_1 = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}(X - x_1).$$

Tangenta în M_1 taie axa OX în punctul

$$X = x_1 - \frac{y_1}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = x - \frac{y}{y'}.$$

care este tocmai punctul unde tangenta în M taie axa OX.

2°. Coeficientul unghiular al tangentei în M_1 fiind

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'}},$$

independent de y'', transformarea (M, M_1) este de contact.

3°. Trebuind ca $OM_1 = x$, urmează

$$x_1^2 + y_1^2 = x^2, \qquad 2yy'^2 + 2xy' + y = 0.$$

De unde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 2y^2}}{2y},$$

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{x + \sqrt{x^2 - 2y^2}}{2y}\right)\left(\frac{dy}{dx} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 2y^2}}{2y}\right) = 0.$$

Să integrăm ecuațiile diferențiale

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x + \sqrt{x^2 - 2y^2}}{2y} = 0, \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 2y^2}}{2y} = 0.$$

Pentru aceasta, să punem $y/x = z$. De unde $dy/dx = z + x\,dz/dx$, Ecuațiile devin

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2z^2}}{2z};$$

de unde:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2z\,dz}{\sqrt{1-2z^2} - (1+2z^2)}, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{1}{3}\left(\frac{d\sqrt{1-2z^2}}{\sqrt{1-2z^2}-1} + \frac{2d\sqrt{1-2z^2}}{\sqrt{1-2z^2}+2}\right),$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2z\,dz}{-\sqrt{1-2z^2} - (1+2z^2)}, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{1}{3}\left(\frac{d\sqrt{1-2z^2}}{\sqrt{1-2z^2}+1} + \frac{2d\sqrt{1-2z^2}}{\sqrt{1-2z^2}-2}\right).$$

Integrând, avem:

$$\mathrm{L}\,\frac{1}{x^3} = \mathrm{L}\,(\sqrt{1-2z^2} - 1) + \mathrm{L}\,(\sqrt{1-2z^2} + 2)^2 - \mathrm{LC},$$

$$\mathrm{L}\,\frac{1}{x^3} = \mathrm{L}\,(\sqrt{1-2z^2} + 1) + \mathrm{L}\,(\sqrt{1-2z^2} - 2)^2 - \mathrm{LC},$$

$$\frac{C}{x^3} = (\sqrt{1-2z^2}-1)(\sqrt{1-2z^2}+2)^2, \quad \frac{C}{x^3} = (\sqrt{1-2z^2}+1)(\sqrt{1-2z^2}-2)^2.$$

Integrala generală a ecuației diferențiale este

$$\frac{C^2}{x^3} = (\sqrt{1-2z^2}-1)\,(\sqrt{1-2z^2}+2)^2\,(\sqrt{1-2z^2}+1)\,(\sqrt{1-2z^2}-2)^2,$$

și punând $z = y/x$, ecuația familiei de curbe (C), este

$$y(3x^2 + 2y^2) = k, \qquad k = \text{const.},$$

și reprezintă cubice.

Pentru a găsi soluţiile singulare, să derivăm în raport cu y ecuaţia diferenţială $2yy'^2 + 2xy' + y = 0$ şi obţinem

$$2yy' + x = 0.$$

Eliminând pe y' între aceste două ecuaţii, avem

$$y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 = 0.$$

Deci soluţiile singulare ar puteà fi dreptele

$$\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right) = 0,$$

care însă nu verifică ecuaţia diferenţială considerată.

PROBLEMA 3067. *Să se găsiască două numere întregi, ştiind că media armonică a complimentelor lor aritmetice este egală cu raportul dintre patratul mediei gemonetrice şi 17. Se mai ştie că complimentele aritmetice sunt numere formate din cifra 2 ridicată la o putere fără soţ, mai mică decât 10.*

I. Antoniu.

Soluţie dată de D-nii: E. Botea (Lic. Cantemir, Bucureşti), C. Popovici (Lic. Internat, Iaşi) şi B. Vulpanovici (Liceul Real, Chişinău).

Fie b şi c complimentele aritmetice ale numerelor căutate.

Enunţul conduce la egalitatea:

$$\frac{2bc}{b+c} = \frac{bc}{17} \quad \therefore \quad b + c = 34$$

b şi c fiind însă puteri ale lui 2, nu putem lua decât

$$b = 2^1 \ , \ c = 32 = 2^5.$$

Numerele căutate sunt deci:

$$10 - 2 = 8 \ , \ 100 - 32 = 68.$$

PROBLEMA 3133 *). *Să se arate că avem congruența:*

$$(p-2)^{(2p-1)^n} \equiv (p-1)^{(2p+1)^n} - 1, \qquad \text{Mod. } p(p-1)$$

unde p *este prim, iar* n *întreg și pozitiv.*

L. ROSENFELD.

Generalizare.

Ne propunem a rezolvà următoarea problemă mai generală: Să se arate că avem congruența:

$$(p-2)^{[(k+1)p-k]^a} \equiv (p-1)^{(2m+1)^b} - 1, \qquad \text{Mod. } p(p-1)(p-2)$$

unde p este număr prim, iar a, b, k și m numere întregi pozitive oarecare.

Punând $[(k+1)p-k]^a = q$ și $(2m+1)^b = r$, trebue să arătăm că expresia:

$$E = (p-1)^r - (p-2)^q - 1 \equiv 0, \qquad \text{Mod. } p(p-1)(p-2).$$

Cum q este totdeauna impar, rezultă că:

$$(p-2)^q = [(p-1)-1]^q \equiv -1 \qquad \text{Mod. } (p-1)$$

și deci:

$$(1) \qquad E \equiv 0 \qquad \text{Mod. } (p-1)$$

Cum r este deasemenea impar, rezultă că:

$$(p-1)^r \equiv -1, \qquad \text{Mod. } p$$

și deci pentru a aveà

$$E \equiv 0 \qquad \text{Mod. } p$$

trebuie să avem:

$$(p-2)^q + 2 \equiv 0 \qquad \text{Mod. } p$$

$$\therefore \quad 2^q - 2 \equiv 0 \qquad \text{„ „}$$

$$(2) \qquad \therefore \quad 2^{q-1} - 1 \equiv 0. \qquad \text{„ „}$$

Dar $q = [(k+1)p-k]^a = [(k+1)(p-1)+1]^a \equiv 1$, Mod. $(p-1)$

deci $q - 1 \equiv 0$, Mod. $(p-1)$

adică $q - 1 = \alpha \cdot (p-1)$,

---

*) Enunț rectificat.

aşà că relaţia (2), se poate scrie:

$$2^{q-1}-1=2^{\alpha(p-1)}-1=(2^{\alpha})^{p-1}-1,$$

dar

$$(2^{\alpha})^{p-1}-1\equiv 0, \qquad \text{Mod. } p$$

conform teoremei lui FERMAT; deci:

(3) $$E\equiv 0. \qquad \text{Mod. } p$$

In fine, observând că:

$$(p-1)^r-1=[(p-2)+1]^r-1\equiv 0, \qquad \text{Mod. } (p-2)$$

rezultă că avem şi:

(4) $$E\equiv 0. \qquad \text{Mod. } (p-2)$$

Din congruenţele (1), (3) şi (4) rezultă evident:

$$E=(p-1)^{(2m+1)^b}-(p-2)^{[(k+1)p-k]^a}-1\equiv 0, \qquad \text{Mod. } p(p-1)(p-2).$$

Dacă în aceasta facem: $a=b=n$, $k=1$ şi $m=p$, obţinem congruenţa:

$$E=(p-1)^{(2p+1)^n}-(p-2)^{(2p-1)^n}-1\equiv 0, \qquad \text{Mod. } p(p-1)(p-2)$$

care satisface problema 3133.

CĂPITAN-AVIATOR GR. ZAPAN.

Observaţiuni.

1°. Au rezolvat problema 3133, rectificând enunţul, D-nii: M. ADAM, N. BOTEA, DORIN POPESCU şi MARIN ŞTEFAN.

2°. D-l N. BOTEA observă că făcând $p=101$ obţinem exerciţiul 42 din „*Gazeta Matematică*“ (XXVIII, 277).

3°. D-nii: M. ADAM şi MARIN ŞTEFAN, observă că congruenţa este valabilă şi pentru modulul $(p-2)$, care nu e în enunţ.

4°. D-l OV. POPEA observă imposibilitatea problemei aşà cum a apărut propusă la pag. 199 din „G. M.“ XXIX, fără însă a-i rectifică enunţul, cum au făcut ceilalţi corespodenţi.

PROBLEMA 3182. *La un joc cu 9 căişori, o persoană pune de 900 ori totdeauna pe No. 1 şi câştigă de 65 ori. Este acel joc corect?*

A. MICLESCU.

Soluţie dată de D-nii: N. Botea, L. Brüll, Gh. Ionescu-Zane, P. Ionescu, E. Massler, A. Opran, M. Pătroianu, O. Popea, A. Roşu, Gh. Simionescu, I. Vasiliu şi S. Weiss.

Probabilitatea de a scoate un număr dintr'o singură dată este $^1/_9$. Punând de 900 ori pe acelaş număr, avem de a face cu o probabilitate simplă, care în cazul nostru este $900 \times {}^1/_9 = 100$. Deci persoana în chestiune ar fi trebuit să câştige de 100 ori, dacă jocul ar fi fost corect.

PROBLEMA 3241. *Există perechi de numere consecutive pare sau impare, care să aibă acelaş indicator?*

Căpitan I. Linteş.

I. Fie N şi N + 2 două numere *pare consecutive*, atunci, pentru ca ele să satisfacă problemei, ar trebui să avem:

$$1) \qquad \varphi(N) = \varphi(N+2).$$

Fie a_i şi b_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) factorii primi ai celor două numere, atunci ştim că:

$$\varphi(N) = N \cdot \frac{\pi(a-1)}{2.\pi a}$$

$$\varphi(N+2) = (N+2) \cdot \frac{\pi(b-1)}{2.\pi b},$$

unde: $a_1 = 2$ şi $b_1 = 2$, căci numerele sunt pare.

Atunci conform relaţiei 1) avem:

$$2) \qquad N \cdot \frac{\pi(a-1)}{2.\pi a} = (N+2) \frac{\pi(b-1)}{2.\pi b}.$$

Dar $\pi(a-1)$ şi $\pi(b-1)$ fiind pari, pot avea drept divizor pe 2^x, unde $x > 1$ este un întreg, deci vom avea:

$$3) \qquad \frac{N}{2.\pi a} \cdot \frac{\pi(a-1)}{2^x} = \frac{N+1}{2.\pi b} \cdot \frac{\pi(b-1)}{2^x}.$$

Ori aşă cum s'a făcut gruparea în 3), vedem repede că va trebui să admitem:

$$4) \qquad \begin{cases} \dfrac{N}{2.\pi a} = \dfrac{\pi(b-1)}{2^x} \\ \dfrac{N+2}{2.\pi b} = \dfrac{\pi(a-1)}{2^x}, \end{cases}$$

deoarece N nu divide pe N+2 (decât dacă N=1) şi nici πa sau πb respectiv pe $\pi(a-1)$ sau $\pi(b-1)$.

Insă eliminând pe N în relaţiunile 4) găsim că:

$$5) \qquad \pi a \cdot \frac{\pi(b-1)}{2^x} + 1 = \pi b \cdot \frac{\pi(a-1)}{2^x}.$$

Observăm însă că dacă

$$\frac{\pi(b-1)}{2^x} \text{ este par şi}$$

$$\frac{\pi(a-1)}{2^x} \text{ » impar}$$

sau invers, atunci 5) poate aveà loc. Dacă însă ambii factori sunt în acelaş timp impar (pari nu pot fi), atunci 5) nu poate aveà loc.

Admitem acum că $\pi(a-1)/2^x$ să fie impar, atunci ar trebui să avem:

$$a_2 = 2^{\alpha_2} + 1$$
$$a_3 = 2^{\alpha_3} + 1$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$

unde $x = \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$, ori în acest caz:

$$N = 2^{\alpha_1} \cdot (2^{\alpha_2} + 1)^{\alpha'_2} \cdot (2^{\alpha_3} + 1)^{\alpha'_3} \ldots$$

Admitem deocamdată

$$\alpha'_2 = \alpha'_3 = \ldots = 0$$

şi atunci:

$$N = 2^{\alpha_1} \quad \text{şi} \quad N + 2 = 2(2^{\alpha_3 - 1} + 1),$$

unde, dacă $2^{\alpha_1 - 1} + 1$ este prim, numerele au acelaş indicator. Astfel avem:

(4,6) , (8,10) , (32,34) etc.....

Să admitem acum:

$$N = 2^{\alpha_1} \cdot (2^{\alpha_2} + 1)^{\alpha'_2}.$$

Dar pentru ca N+2 să aibă acelaş indicator cu N, ar trebui să avem ecuaţia:

6) $$2^{\alpha_1+\alpha_2-1}(2^{\alpha_2}+1)^{\alpha'_2-1} = \varphi[2^{\alpha_1-1}(2^{\alpha_2}+1)^{\alpha'_2}+1].$$

Considerând paranteza mare din membrul al II-lea un număr prim, se observă uşor că n'am puteà aveà nici o soluţie.

Relaţiuni analoge lui 6) se pot obţine ori cât de multe dând lui N diferite forme, aşà dar numărul soluţiunilor poate fi mult sporit.

In sfârşit, dacă am considerà $\pi(b-1)/2^x$ impar, am ajunge la aceleaşi soluţiuni ca mai sus.

In concluzie: *problema admite soluţiuni pentru numerele pare consecutive.*

II. Fie N şi N+2 două numere *impare consecutive.*

Raţionând analog, obţinem:

$$N \cdot \frac{\pi(a-1)}{\pi a} = (N+2)\frac{\pi(b-1)}{\pi b},$$

sau:

$$N = \pi a \cdot \frac{\pi(b-1)}{2^x}$$

$$N+2 = \pi b \cdot \frac{\pi(a-1)}{2^x},$$

unde se vede lezne că:

$$\frac{\pi(b-1)}{2^x} \quad \text{şi} \quad \frac{\pi(a-1)}{2^x}$$

trebuie să fie impari (a nu se uità că şi πa şi πb sunt impari).

Eliminând pe N găsim relaţia:

7) $$\pi a \cdot \frac{\pi(b-1)}{2^x} + 2 = \pi b \cdot \frac{\pi(a-1)}{2^x},$$

care este tocmai condiţia ca două numere impare consecutiue să aibă acelaş indicator.

Să admitem că:

$$N = a^\alpha \quad \text{şi} \quad N+2 = b^\beta,$$

atunci condiţia 7) devine:

$$a - b = 2^{x+1}$$

şi ţinând apoi seamă că:

$$b^\beta - a^\alpha = 2,$$

obţinem ecuaţia:

8) $$(a - 2^{x+1})^{\beta} - a^{\alpha} = 2,$$

care ne poate furniză soluţiile problemei în acest caz.

Dăm acum lui a diferite valori astfel încât să avem totdeauna:

$$a > 2^{x+1}.$$

Fie $x = 1$ şi dând lui a valorile *3, 5, 7, 11* vedem că obţinem soluţia:

$$N = 7 \quad \text{şi} \quad N + 2 = 9,$$

care au acelaş indicator, căci:

$$\varphi(7) = \varphi(9) = 6.$$

Se înţelege uşor că ecuaţia 8) poate da multe soluţiuni. De asemenea condiţia 7) poate furniză multe ecuaţiuni analoge lui 8), deci surse de soluţiuni, totuşi un număr destul de mare de încercări făcute de subsemnatul au rămas infructuase, rezumându-mă deci în acest caz la singura soluţie $N = 7$. Concluzia este dar că: *şi în acest caz problema admite soluţii*[1]).

Observaţiune. Din cele văzute mai sus, se naşte întrebarea dacă: *trei sau mai multe numere pare sau impare consecutive, pot aveà acelaş indicator?*

Ori, pentru cazul soluţiunilor date mai sus, putem uşor conchide că nu putem aveà decât numerele 8, 10 şi 12.

Nu ştim însă în cazul soluţiunilor negăsite încă ce poate fi, aşà încât intenţiunea de a transformà în teoremă întrebarea de mai de mai sus, arătând că: *trei sau mai multe numere pare sau impare consecutive nu pot aveà acelaş indicator*, rămâne încă infructuasă.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

A studiat ambele cazuri ale problemei numai D-l CORNELIU N. POPESCU. D-nii: N. BOTEA şi DAN POPOVICI-PUIU au studiat numai primul caz. D-l BOTEA a găsit şi soluţiile *8, 10* şi *12* cari au acelaş indicator.

1) Părerea subsemnatului este că singurele soluţii sunt în acest caz: $N = 7$ şi $N + 2 = 9$.

PROBLEMA 3254. *Cercurile adjuncte* (BC) *şi* (CB) *ale unui triunghiu* ABC *taie laturile* AB, AC *respectiv în* M_1 *şi* M_2. *Să se arăte că:*

1. *Tangentele în* M_1 *şi* M_2 *la cercurile* (BC) *şi* (CB) *se taie într'un punct* M *al cercului* AM_1M_2.

2. *Tangentele în* B *şi* C *la cercurile* (BC) *şi* (CB) *se taie în* Q *pe cercul circumscris lui* ABC, *iar dreapta lui* SIMSON *a punctului* Q, *în raport cu triunghiul* ABC, *este paralelă cu diametrul* AO *al cercului* ABC.

B. M. BARBĂLATT.

Soluţie dată de D-nii: CONST. C. POPOVICI, ION C. VASILIU, V. S. DORNEANU, C. A. MIHĂILESCU, M. CH. BOGDAN, AL. C. FLOREA, N. I. MANOLESCU, N. G. BOTEA, SOLOMON WEISS, VALERIU MANAFU.

Fie O_1 şi O_2 centrele cercurilor (BC) şi (CB). Unghiul O_1CO_2 are ca compliment pe O_2CM_2, iar acesta fiind egal cu O_2M_2C, va avea ca compliment pe CM_2M. (Figura presupune că $c>b$). Rezultă deci că

$$\sphericalangle CM_2M \text{ sau } \sphericalangle AM_2M = \sphericalangle O_1CO_2.$$

La fel demonstrăm că

$$\sphericalangle AM_1M = \sphericalangle O_1BO_2.$$

Dar centrele O_1 şi O_2 aflându-se pe mediatoarea laturei BC, din triunghiurile egale O_1CO_2 şi O_1BO_2, deducem că unghiurile O_1CO_2 şi O_1BO_2 sunt egale şi deci

$$\sphericalangle AM_2M = \sphericalangle AM_1M,$$

ceeace probează că patrulaterul AM_1M_2M este inscriptibil.

Pentru a demonstrà partea a doua a problemei, observăm că

$$\sphericalangle ACQ = \sphericalangle O_1CO_2,$$

căci au ambele ca compliment unghiul O_1CQ.

Pentru un motiv analog

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle O_1BO_2.$$

Dar noi am demonstrat că $\sphericalangle O_1CO_2 = \sphericalangle O_1BO_2$ şi deci

$$\sphericalangle ACQ = \sphericalangle ABQ,$$

ceeace probează că patrulaterul ACBQ este inscriptibil[1]), adică Q se află pe cercul ABC.

Pentru a demonstră şi ultima parte a problemei, ducem o perpendiculară din Q pe BC până taie cercul ABC în P şi fie T punctul unde înălţimea dusă din A taie cercul ABC. Punctele T şi P sunt simetrice faţă de mediatoarea laturei BC, de unde urmează că punctele P şi A sunt diametral opuse în cercul ABC. Urmează atunci, după o proprietate clasică a dreptei lui SIMSON, că dreapta lui SIMSON a punctului Q e paralelă cu diametrul AOP.

PROBLEMA 3283. *Dacă* x, y, z, *sunt sume de două patrate perfecte,* x y z *se poate desface în patru moduri în sumă de două patrate perfecte.*

C. I. CIORĂNESCU.

Problema este studiată într'un caz mai general de D-l I. FÂNTÂNEANU, în «*Curierul matematic*» Vol. I, No. 1.

Au trimis soluţiuni cu această indicaţie, D-nii: E. şi N. BOTEA, L. BRÜLL, L. KATZ, H. MARCOVICI, E. MASSLER, C. POPESCU, I. VASILIU.

Au trimis soluţiuni, unele cu generalizări, D-nii: M. BLUMEN, C. I. BREZUICA, A. IONESCU-BUJOR, I. MIU, D. NESTOR, V. NOVACU, C. POPOVICI, G. TAILER, N. TEODORESCU, E. GRÜNSTEIN.

PROBLEMA 3338. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x = \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)(c-x)} + \sqrt{(c-x)(a-x)}.$$

C. A. MIHĂESCU.

Trecând un radical în primul membru şi ridicând apoi ambii membrii la patrat, obţinem, după ce facem reducerile posibile:

$$ab - ac - bc + 2cx = 2c\sqrt{(a-x)(b-x)}.$$

---

1) Această proprietate rezultă imediat din faptul că prin construcţiile făcute după enunţ, punctele A şi Q sunt simetrice faţă de mediatoarea laturei BC; deci Q se va află pe cercul ABC.

Dacă ridicăm din nou la patrat, obţinem ecuaţia

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2abc(a+b+c)+4abcx=0,$$

care rezolvată, ne dă

$$x=\frac{2abc(a+b+c)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{4abc}=(a+b+c)-\frac{(ab+ac+bc)^2}{4abc}.$$

Notă. Au rezolvat ecuaţia pe aceiaşi cale, găsind valoarea exactă a lui x, D-nii: R. Bădescu, V. Bârsănescu, A. Bassarab, E. Botea, I. Brezuica, Gh. Călin, H. Cohn, T. Hulubei, E. Iacob, Gr. Ioachim, A. Ionescu-Bujor, A. Kahane, L. Katz, Gr. Mareş, Gh. Munteanu, I. Nicolau-Dobridor, I. Petruţiu, I. Popovici, R. Spathy, G. Tailer, B. Vasilescu, I. Vasiliu, O. Schächter, C. Popovici, V. Coşniţă, T. Diaconescu, C. Ionescu-Bujor, N. Mihăilescu.

M. Gh.

PROBLEMA. 3355. *Fie* ABCD *un patrulater inscriptibil*, A', C' *proiecţiile vârfurilor* A *şi* C *pe diagonala* BD; B', D' *proiecţiile vârfurilor* B *şi* D *pe diagonala* AC. *Să se demonstreze că patrulaterul* A'B'C'D' *are laturile sale paralele cu laturile lui* ABCD.

Emil Ştefănescu.

Soluţie dată de D-nii: D. G. Nestor (Liceul Cantemir), Valeriu Manafu (Cl. VII Liceul Mânăstirea Dealului), Em. Gh. Gaiu (Cl. VII Liceul Bârlad), O. I. Braester (Liceul Naţional, Iaşi), Lazăr Katz (Liceul Botoşani), Corneliu N. Popescu (Cl. VI, Liceul Giurgiu), Andrei Ionescu-Bujor (Liceul Cantemir), Răducanu Georgescu (Liceul Lazăr), Haim Cohn (Liceul Botoşani), Virgil Râpeanu (Cl. VII Liceul Internat, Iaşi), Adrian Gheorghiu (Cl. VI Liceul Piteşti), Vasile Tăraş (Liceul Şaguna, Braşov), G. Potopeanu (Timişoara), V. Dorneanu, Al. C. Florea, Leon Segal.

Fie E intersecţia diagonalelor BD şi AC. Unghiurile AA'D şi AD'D fiind drepte, patrulaterul AA'D'D este inscriptibil; urmează că dreapta A'D' este antiparalelă cu AD în raport cu unghiul AED. Dar prin ipoteză, patrulaterul ABCD fiind şi el inscriptibil, latura BC este şi ea antiparalelă cu AD, în raport cu acelaş unghiu. Rezultă de aici că dreptele BC şi A'D', sunt paralele între dânsele.

Analog demonstrăm că C'D' este paralelă cu CD, că C'B' este paralelă cu AD şi A'B' cu AB.

Au dat bune soluţii şi D-nii: RADU ADAM, EMIL BOTEA, TH. GH. COCEA, SIMION I. CIFFER, BARBU GATAIANŢU, DAVID HAIM, TELEMAC HULUBEI, GRIGORE IOACHIM, ARNO KAHANE, N. I. MANOLESCU, N. ST. MIHĂILESCU, I. NICOLAU-DOBRIDOR, C. D. PĂUN, OSCAR A. SCHOR, RENÉ SPATHY, T. T. STOICESCU, G. TAILER, BARTOLOMEU VASILESCU, GH. GH. VASILIU, GH. V. NICOLAU (Bârlad), AL. B. IONESCU (Piteşti), DINCĂ A. SCHILERU, SYMON KATZ (Botoşani).

Notă. Problema 3355 este cunoscută sub următorul enunţ:

Fie ABCD un patrulater înscris în cercul O. Să proiectăm cele patru vârfuri în A', B', C', D' pe diagonalele opuse; aceste proiecţiuni sunt vârfurile unui nou patrulater inscriptibil într'un cerc O' şi asemenea cu ABCD. (JULES MATHOT, *Mathesis* 1901, p. 25).

Enunţul din Gazetă precizează însă mai bine proprietatea figurei obţinute şi de aceia am publicat-o sub această formă.

Această problemă este în legătură cu Problema 3375 dela pagina 199 a Gazetei, al cărui enunţ se găseşte în F. G. M. *Excercices de Géométrie*, sixième édition, p. 576, chestiunea 1276*b* şi p. 577, chestiunea 1277*b*, dar fără soluţie. O bibliografie mai completă asupra problemei 3375 vom da-o cu ocazia soluţiei ei.

(V. C.)

PROBLEMA 3357. *Fie* ABC *un patrat înscris în cercul cu centrul* O, *iar* E *şi* F *mijloacele arcelor* AB *şi* AD. *Dreptele* BF *şi* CE *se întretaie în* M, *iar* DE *şi* CF *în* N. *Fie* H *ortocentrul triunghiului* CEF. *Să se demonstreze că dreapta* MN *este egală cu raza cercului* O, *iar dreptele* HE *şi* HF *sunt egale cu latura octogonului regulat înscris în cerc.*

GH. GH. VASILIU.

Soluţie dată de D-nii: RADU ADAM (Cl. VI Liceul Constanţa), GH. V. NICOLESCU şi N. I. MANOLESCU (Liceul Unirea, Focşani), MARIUS MARIŞ (Liceul Arad), TELEMAC HULUBEI, TEODOR STOICESCU şi THEMO TOGO (Elevi Liceul Internat, Iaşi), GH. M. CĂLIN, BARBU GATAIANŢU şi ISTINIE I. C. BREZUICA (Liceul Caracal), SIMION CIFFER (Cl. VI Liceul Giurgiu), EMIL DIMITRIU şi D. G. NESTOR (Liceul Cantemir), BARTOLOMEU VASILESCU (Liceul Sf. Sava), MARIN MARINAŞ (Elev Liceul Caracal), AL. B. IONESCU (Liceul Piteşti), I. O. ZAHARIA (Liceul Constanţa), DINCĂ SCHILERU (Liceul Internat, Iaşi).

Dreptele CE şi BF sunt perpendiculare, căci măsura unghiului EMF este

$$\tfrac{1}{2}(\text{arc}BC + \text{arc}EF) = \tfrac{1}{2}\,\text{arc}ABC = 90^0.$$

De altă parte, unghiurile BEC şi DEC sunt egale, căci au măsurile lor egale şi anume

$$\tfrac{1}{2}\,\text{arc}BC = \tfrac{1}{2}\,\text{arc}CD = 45^0.$$

De aici urmează că triunghiurile dreptunghice EMB şi EMH sunt egale, căci au o catetă comună şi unghiurile ascuţite alăturate egale. Deci:

$$EH = EB \quad \text{şi} \quad MH = MB.$$

La fel demonstrăm că avem

$$FH = FD \quad \text{şi} \quad NH = ND.$$

Dar $EB = FD$ este latura octogonului regulat, ceeace învederează ultima parte a problemei; de altă parte în triunghiul HBD dreapta MN uneşte mijloacele laturilor HB şi HD, deci ea e paralelă şi egală cu jumătatea diametrului BD, adică cu raza cercului, ceeace demonstrează şi prima parte a problemei.

Soluţie dată de D-nii: Const. Ionescu-Bujor, Andrei Ionescu-Bujor (Liceul Cantemir), George Tailer (Liceul Bârlad), Virgil Râpeanu (Liceul Internat, Iaşi), O. I. Braeşter (Liceul Naţional, Iaşi), Grigore Ioachim (Liceul Militar, Iaşi), Vasile Gorciu, Corneliu Popescu, M. Gh. Constantinescu, Valeriu Novacu (Elev Liceul Arad), Th. Gh. Cocea şi Adrian Gheorghiu (Liceul Piteşti), Ernest Grünstein (Liceul Cogălniceanu, Iaşi), I. Nicolau-Dobridor (Liceul Militar, Craiova), Grigore Mareş (Liceul Bacău), Oscar A. Schor (Seminarul Pedagogic Universitar), Haim Cohn (Liceul Laurian, Botoşani), N. Mihăilescu şi R. I. Spathy (Liceul Mateiu Basarab), Const. D. Segârceanu (Liceul Fraţii Buzeşti, Craiova), Arno Kahane, David Haim (Liceul Bârlad), Valeriu Manafu (Liceul Mânăstirea Dealului), Const. C. Popovici, V. Dorneanu, Al. Florea (Elevi Liceul Internat, Iaşi), C. St. Cercel şi Virgil C. Popescu (Liceul Militar, Târgul Mureş), Gh. Munteanu (Liceul Militar, Craiova), Istinie I. C. Brezuica (Caracal), Vasile Tăraş (Liceul Şaguna, Braşov), G. Potopeanu (Timişoara), Solomon Feldstein (Piteşti), Raducanu Georgescu (Giurgiu), Leon Segal (Liceul Cantemir), Symon Katz.

Dreptele EN şi FM sunt înălţimi în triunghiul CEF, căci unghiurile ENC şi FMC au fiecare ca măsură $\tfrac{1}{2}\text{arc}AC = 90^0$, şi după o proprietate cunoscută a ortocentrului, avem

$$HM = MC \quad \text{şi} \quad HN = ND,$$

de unde rezultă că MN este paralelă şi egală cu jumătate din diametrul BD.

Triunghiul CEF este isoscel, laturile CE şi BF fiind egale ca subîntinzând arce egale. Dreapta CA fiind bisectoară, este şi înălţime în acest triunghiu. Conchidem că diagonalele EF şi HA ale patrulaterului AEHF sunt perpendiculare şi se taie în părţi egale; acest patrulater este deci un romb şi prin urmare

$$HE = HF = AE = AF.$$

Dar $AE = AF$ este latura octogonului regulat înscris în cerc.

A rezolvat problema şi D-nul Gh. T. Gheorghiu (Elev Liceul Alexandri, Galaţi).

EXERCIŢII

27. Să se demonstreze relaţia:

$$(p-1)!+1!(p-2)!+2!(p-3)!+3!(p-4)!+ \ldots\ldots +(m-1)!(p-m)! = \mathcal{M}p,$$

unde m este un număr întreg par, iar p un număr prim şi $m < p$.

Marin Ştefan.

R. In „G. M." vol. XIV pag. 14 s'a demonstrat relaţia:

$$(1) \qquad (m-1)!\,(p-m)! = \mathcal{M}p+(-1)^m,$$

unde m este întreg, p prim şi $m < p$.

Dacă facem $m = 1, 2, 3, \ldots m$ în relaţia (1), avem:

$$\begin{aligned}
(p-1)! &= \mathcal{M}p - 1\\
1!(p-2)! &= \mathcal{M}p + 1\\
2!(p-3)! &= \mathcal{M}p - 1\\
3!(p-4)! &= \mathcal{M}p + 1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(m-1)!\,(p-m)! &= \mathcal{M}p + (-1)^m.
\end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste egalităţi şi ţinând seama că m este un număr par, căpătăm relaţia din enunţ.

28. Cum sunt între ei indicatorii numerelor ce formează o progresie geometrică?

ALEXANDRU CH. MLADENOVICI.

R. Cu ajutorul formulei:

$$\varphi(a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots) = a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1} \cdot c^{\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1)\ldots,$$

în care a, b, c... sunt factori primi, calculăm indicatorii termenilor unei progresii geometrice. Examinăm pe rând cazul când raţia şi primul termen sunt numere prime între ele sau au factori comuni. Găsim că în amândouă cazurile, *începând dela termenul al treilea, indicatorii formează şi ei tot o progresie geometrică cu aceiaşi raţie ca a primei progresiuni.*

29. Se dă triunghiul ABC. Unim punctul M, mobil pe o paralelă la BC, cu B şi C. Dreptele MC şi MB intersectează laturile AB şi AC respectiv în N şi P. Se cere locul geometric al intersecţiei $\overline{NP}$, AM.

GH. D. SIMIONESCU

R. Triunghiul ABC poate fi considerat ca un patrulater complet, în care BC e a treia diagonală a patrulaterului ANMP. Prelungind pe AM până taie pe BC în A', după o cunoscută proprietate avem, E fiind intersecţia $\overline{NP}$, $\overline{AM}$: EA/EM = A'A/AM. Insă cum raportul A'A/AM rămâne constant, M fiind pe o paralelă la BC, rezultă că raportul EA/EM e şi el constant. In acest caz E este mobil pe o paralelă la BC şi anume pe dreapta care uneşte conjugatele armonice ale punctelor B şi C faţă de A_1B' şi A_1C', B' şi C' fiind intersecţia cu AB şi AC a paralelei pe care variază M.

PROBLEME PROPUSE*).

3381. Se scrie un patrat de trei cifre cu mâna şi se întoarce foaia cu 180° în planul ei. Numărul care se citeşte acum este tot patrat perfect. Problemă analoagă pentru numere de patru cifre.

I. IONESCU.

*) 1) La problema 3165 din „Gazeta Matematică", Vol. XXIX, pag. 319, se rectifică enunţul în sensul că se cere *maximul* ariei triunghiului $A_1B_1C_1$.

2) Problema rezolvată anul acesta în No. 1, la pag. 35, nu poartă No. 3144, cum din eroare este imprimat, ci No. 3114, cum a fost propusă la pag. 119, Vol. XXIX.

3) Autorul problemei propusă cu No. 3332, la pag. 119 din acest an, este D-l CONST. C. POPOVICI, iar nu D-l C. C. POPESCU, cum din eroare s'a publicat.

3382. Dacă B este un număr de două cifre şi dacă patratul numărului $100A + B$ se termină cu 444, atunci şi patratul unuia din numerele $100(A \pm 1) + B$ se termină tot cu 444.

Locot.-Col. Gh. Buicliu.

3383. Se cer patratele consecutive *abdbc* şi *abcdb*.

Gh. Gh. Vasiliu.

3384. Cu jocul de 52 cărţi se face următoarea scamatorie (!):

Se ia pachetul de 52 cărţi, se pune jos o carte şi se citeşte numărul ei; fie *a* acel număr. Peste ea se pun alte cărţi numărând dela *a* înainte până la 13. Punem apoi jos o altă carte *b* şi procedăm la fel până ce ajungem la numărul 13. Facem din nou pachete, până ce punând jos un număr *n*, nu ne mai ajung cărţi pentru a merge cu număratul până la 13. Se cheamă scamatorul, el ia cărţile ce nu au putut completa ultimul pachet şi spune care este suma numerelor pe care le are cărţile dedesubt la pachetele complete. Cum găseşte el acea sumă?

René I. Spathy.

3385. Fie ABC un triunghiu oarecare şi O centrul cercului său circumscris. Laturile AB şi AC întâlnesc a doua oară cercul BOC respectiv în B_1 şi C_1. Fie D punctul de intersecţie al dreptelor BC şi B_1C_1. Să se arăte că cercul cu diametrul DO este ortogonal cu cercul tangent în A dreptei AD şi cu centrul pe B_1C_1.

Octav Onănescu.

3386. Fie I centrul cercului înscris unui triunghiu oarecare ABC. Cu o rază arbitrară, se descrie un cerc Γ concentric cu cercul înscris, care taie laturile ce pleacă din vârfurile A, B, C respectiv în perechile de puncte (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2).

Să se demonstreze că cercurile tangente la laturile triunghiului ABC în perechile de puncte (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), au ca centru radical, când Γ variază, punctul lui Gergonne al triunghiului considerat.

N. Blaha.

3387. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor unui triunghiu ABC, B_1, C_1 proiecțiile vârfurilor B și C pe dreapta B'C', iar B_a și C_a proiecțiile punctelor B' și C' pe latura BC. Se cere să se arăte că:

1. Punctele B_a, C_a, B_1, C_1 se află pe un cerc Γ, al cărui centru este mijlocul segmentului B_1C_1;

2. Cercul Γ, împreună cu celelalte două analoage, au ca centru radical centrul cercului circumscris triunghiului ABC;

3. Cercurile descrise pe segmentele A'B' și A'C' ca diametre, sunt tangente cercului Γ.

C. H. Nicolau.

3388. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare avem relațiunea

$$\frac{r_a(2R-r_a)+r_b(2R-r_b)+r_c(2R-r_c)}{a+b+c}=(R-r)\,\frac{ar_a^2+br_b^2+cr_c^2}{a^2r_a+b^2r_b+c^2r_c}.$$

M. Ghelber.

3389. Să se găsiască maximul expresiunei

$$E=\frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{i=n}\sin 2_i\,x_i}}{\prod_{i=1}^{n}\cos ix_i},$$

știind că

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sec^2 ix_i=K^2 \text{ (constant)}.$$

I. Dragomir.

3390. Ce fel de curbă ar trebui să se rostogolească pe una din laturile unui triunghiu, așa încât două puncte fixe ale curbei, să descrie celelalte laturi ale triunghiului?

Căpitan I. Linteș.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bădescu R. (3340); *Bălășescu C. N.* (E); *Bassarab Al.* (3363); *Blaha N.* (N); *Bodavnea I.* (3353); *Boroș Dan* (3252); *Botea N.* (3252, 366, 67, N); *Călin Gh.* (3167, 306, 53, 66); *Cercel C.* (3353); *Cernea A. M.* (C, E, N, R); *Chirilă V. I.* (3252, 68, 356); *Cocea Teodor* (3337); *Cohn Haim* (3342, 67); *David H.* (3342, 53, 77); *Dorneanu Vasile* (3297, 326, 74, 76, P); *Dumitrescu A.* (E); *Florea Al.* (3297); *Florescu A.* (3326); *Foca I.* (3312, 63, E, R); *Focșeneanu Mihail* (3356, A, N, P); *Gaiu Em.* (3239); *Gataiantu B.* (3353); *Georgescu Răducanu* (3366, 74); *Gherman I.* (3377); *Haim David* (3345, 74, 75); *Hulubei Telemac* (3227, 368); *Ioachim Grigore* (3367); *Iliuță I. I. Dăbuleni* (3312, N, P, R); *Ionescu Al.* (3363); *Ionescu Nic.* (3353); *Ionescu I. Paul* (3303); *Iscovici P.* (3342, 53); *Istinie I. C. Brezuica* (3303, 12, 45, 53); *Katz Lazăr* (3367); *Katz S.* (3326, 76); *Livada M. G.* (R); *Lupescu Eugen* (3337, 42); *Lupu Avram* (3239, 52, 97, 306, 56, 67); *Manafu V.* (P, N); *Marcovici H.* (3299, 326, 67); *Mărdărescu E. R.* (3349); *Marinaș B. M.* (3312, 21); *Mariș M.* (3363); *Munteanu Gh.* (3337); *Nicolau G.* (3363, 66); *Nicolau-Dobridor I.* (3337, N); *Niculescu Al.* (3340, 70); *Paraschiv Gh.* (3377); *Penenjchevici L.* (A); *Pilat Const.* (3297, 306, 77); *Popea O.* (N); *Popescu Corneliu* (3374); *Popescu C. N.* (3376, R); *Popescu Virgil* (3353, 63); *Popovici C. Const.* (3178, 345, 53, 55, 74, 76); *Popovici T. I.* (3287); *Pușcă Toma* (3268, 367, 77); *Rădulescu Gh.* (3376); *Raiciu V. C.* (3312, 53, 63); *Râpeanu Virgil* (3306, 67, 76, R); *Segal Leon* (3345, 67); *Simionescu D. Gheorghe* (3194, 239, 374, 76, P); *Spathy R.* (3315, 53, R); *Stoicescu Teodor* (3227, 97, 306, 77); *Tabacovici N.* (3355, 57); *Tailer George* (3059, 345); *Taraș Vasile* (3353); *Teodorescu N.* (3286, 48, 345, 67, 74, 77); *Trofimov P.* (P); *Vasiliu M.* (3366, 76); *Weissbuch Alexandru* (3367); *Zamfir Ilie* (3353).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2929, 80, 3075, 84, 96, 113, 63, 73, 218, 20, 33, 39, 44, 52, 62, 82, 83, 89, 301, 11, 17, 27, 32, 33, 38, 39, 44, 47, 48, 52, 54, 62, 65, 69, 71, 72, 73, 78 și 80 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Basarabia, 45, Bucureşti).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Asociațiunea pentru Cultura Literatura Poporului Român

Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALA
ASOCIAȚIUNII
SIBIU

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1926.

SUMARUL

1. ...uri asemenea . . *N. Abramescu.*
2. ...leme de maxim
. . . . . *Miron Niculescu.*
3. Revistele matematice . . . . . *Locot.-Col. Gh. Buicliu.*
4. Note Matematice: 29—37.
5. Bibliografii.
6. Cereri 136—137.
7. Probleme rezolvate: 2669, 2946, 3017, 3098, 3162, 3297, 3306, 3326, 3376, 3381.
8. Exerciţii: 30—34.
9. Probleme propuse: 3391—3400.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1926

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu**, Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci**, Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu**, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 85, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 64, 75, 76, 78, 79, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 25, 30, 33, 35, 41, 43, 44, 50, 54, 60, 61, 64, 65, 71, 72, 78, 79, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 400.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „Gazeta Matematică“ (Fabrica de Chibrituri din Bucureşti), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXI *SUPLIMENT* No. 7

RECREAŢIUNI

1. **Tabla lui Pitagora la o grădină de copii.** Am auzit la o grădină de copii următoarele versuri:

1×1=1. O dată una, una, Pe cer apare luna Şi pleacă la plimbare Iar eu plec la culcare.

2×1=2. Două ori una, două, Gică papă ouă Ouă mai cu zeamă Fierte de-a lui mamă.

3×1=3. Trei ori una, trei, Pisica cu cercei Binişor se'ntinde Şoricelul prinde.

4×1=4. Patru ori una, patru, Eu mă duc la teatru Să văd o paiaţă Mică şi glumeaţă.

5×1=5. Cinci ori una, cinci, Raţa cu opinci Mândră tacticoasă A plecat de-a casă.

6×1=6. Şase ori una, şase, Cuţu roade oase El se mulţumeşte Cu orice găseşte.

7×1=7. Şapte ori una, şapte, Prunele sunt coapte In cazan le pun Ca să fac magiun.

8×1=8. Opt ori una, opt, Oul s'a răscopt Mâine dragă mamă O să-l fac cu zeamă.

9×1=9. Nouă ori una, nouă, Gâştele amândouă Au umbrelă nouă Şi nu le mai plouă.

10×1=10. Zece ori una, zece, O trăsură trece Ia te uită piciul Cum mai gustă biciul.

GH. V.

* * *

2. **Străzi datate.** In Bucureşti avem următoarele străzi datate: 10 Mai, 11 Fevruarie, 11 Iunie, 30 August, 13 Septemvrie.

I. I.

* * *

3. **Trei = Patru.** Intr'un manual de fotografie, autorul făcând teoria aparatului spune: „Aparatul este susţinut de un *tripied* cu *trei* sau *patru picioare*"!

V. V. V.

* * *

4. **Procent anihilant.** Intr'o reclamă a unui cunoscut farmacist din Bucureşti citim: „Preparatele laboratorului meu sunt făcute cu substanţe chimice de puritate chimică ireproşabilă şi sunt cu 100% mai eftine decât specialităţile străine"!

A. Opran.

* * *

5. **Imposibilitatea cantităţilor egale.** O cantitate de orice fel, prin natura ei intimă, ocupă un loc în spaţiul înconjurător. Nici o altă cantitate nu poate avea acelaşi loc în acelaşi timp, în virtutea principiului impenetrabilităţii. Deci nici o cantitate nu poate să fie egală cu alta în acelaşi timp, sau, într'un moment dat toate cantităţile diferă între ele.

B. M. Barbălatt.

* * *

6. **Totul este imaginar!** Avem:

$$i^4 = 1, \qquad \log i^4 = 4\log i = \log 1 = 0,$$

$$\therefore \qquad \log i = 0 = \log 1$$

$$i = 1.$$

Unitatea fiind imaginară, toate numerele formate cu dânsa ar fi imaginare.

C. E. Georgescu.

* * *

7. **Răbdare matematică.** Numărul e a fost calculat în 1714 de Côtes cu 12 zecimale; de Euler în 1739 cu 23 zecimale; de Vega în 1894 cu 42 zecimale; de Shanks în 1854 cu 188 zecimale şi de Boozman în 1884 cu 346 zecimale. Iată-le:

$e = 2,$ 71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572
47093 69995 95749 66967 62772 40766 30353 54759
45713 82178 52516 64274 27466 39193 20030 59921
81741 35966 29043 57290 03342 95260 59563 07381
32328 62794 34907 63233 82988 07531 93251 09901
15738 34187 13070 21540 89126 94937 99405 34631
93819 87250 90567 36251 50082 37715 27509 03586
67692 05047 15575 85094 92906 45748 86005 84229
93465 94757 59371 00435 26480 0.... ....

I. I.

* * *

8. **O identitate.** Intr'un exerciţiu se cerea a se arătă că:

$$\sqrt{\frac{p-a}{r_a}} + \sqrt{\frac{p-b}{r_b}} + \sqrt{\frac{p-c}{r_c}} = \sqrt{\frac{p}{r}}.$$

Se poate dovedi uşor astfel. Dividem peste tot cu radicalul şi ne rămâne

$$\frac{p-a}{r_a} + \frac{p-b}{r_b} + \frac{p-c}{r_c} = \frac{p}{r}.$$

Inlocuim r_a , r_b , r_c , cu valorile lor $S/(p-a)$; $S(p-b)$; $S(p-c)$; S/p şi avem :

$$\frac{(p-a)^2}{S}+\frac{(p-b)^2}{S}+\frac{(p-c)^2}{S}=\frac{p^2}{S}.$$

Simplificăm cu exponentul 2 şi avem:

$$\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{p}{S}.$$

$$\frac{3p-(a+b+c)}{S}=\frac{p}{S},$$

$$\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S},$$ c. c. e. d. d.

I. C. Vasiliu.

* * *

9. **Iuţeală maximă**! La o recentă Conferinţă internaţională a Căilor Ferate, s'a discutat între altele şi mărirea iuţelii trenurilor.

Delegatul Elveţiei arată că din cauza terenului accidentat din ţara sa, nu se mai poate spori iuţeala trenurilor.

Delegatul Angliei spune că la dânşii trenurile merg deja destul de repede : stâlpii de telegraf se succed aşa de des unul după altul, încât par că ar formă un gard continuu.

Delegatul Americei ripostează că la ei cantoanele vin unul după altul, încât formează un zid continuu acoperit.

Delegatul Greciei, ca să nu se lase mai pe jos, spune că tot ce s'a spus mai înainte nu este nimic faţă de iuţeala trenurilor din ţara sa, unde distanţele dintre oraşe sunt parcuse atât de repede încât ai impresia că toată Hellada e un oraş continuu.

Delegatul României, om sincer, mărturisi că iuţeala trenurilor româneşti a atins maximum maximorum : la câtevà minute dela plecare poţi ajunge pe lumea cealaltă!

C. G. Z.

* * *

10. **Geometrie de situaţie.** *a)* Să se înfigă pe o masă 12 ace aşà ca să fie câte patru în linie dreaptă.

R. Se împarte un cerc în 6 părţi egale în punctele A, B, C, D, E, F, şi se duc liniile AC, CE, EA, BD, DF, FB. Acele se pun în punctele de diviziune şi la intersecţiile dreptelor de mai sus.

b) Se dă un şah cu 64 pătrăţele. Să se uniască centrele lor cu o linie poligonală continuă, trecând dela un colţ la altul prin toate patratele o singură dată şi numai prin unul de două ori.

Vom numerotà liniile şi coloanele prin numerele 1--8, iar un punct prin indicarea liniei şi coloanei lui în paranteză. Traseul este:

(1,1); (1,8); (7,8); (7,7); (2,7); (2,1); (3,1); (3,6); (7,6); (7,5); (4,5); (4,1); (5,1); (5,4); (7,4); (7,3); (6,3); (6,1): (8,1); (8,2); (7,2), pe alături (8,2); (8,8).

I. I.

* * *

11. **Cugetări ale matematicianilor.**

— „A trăi ascuns, este a trăi bine (DESCARTES).

— Afară de ştiinţele exacte, nu este aproape nimic care să nu lase libertatea de opiniuni; maxima mea favorită este că *aproape pentru orice, se poate spune orice vrem* (D'ALEMBERT).

— „In matematici, cenzura şi critica nu pot fi permise oricui; discursurile retorilor şi pledoariile avocaţilor nu au nicio valoare (VIÈTE).

— „*Nu ştiu nimic*". Acestea sunt pentru multe chestiuni ultimele cuvinte ale ştiinţei umane.

J. BERTRAND.

* * *

12. **Cosmografie literară.** In „*Zburătorul literar*", Anul I, pag. 225, D-l E. LOVINESCU spune: „Scrise pentru mai târziu „*Romanţele*" D-lui I. MINULESCU, nu numai că au ajuns la meridianul actualităţii, dar l'au şi depăşit, lunecând, oarecum, în *conul penumbrei*".

O. POPEA.

* * *

13. FÉNELON **la Bârlad!** Se ştie că FÉNELON ereà un duşman neîmpăcat al matematicelor. El a scris chiar următoarele:

„*Defiez-vouz des ensorcellements et des attraits diaboliques de la géométrie*".

In aceste condiţiuni, ce caută FÉNELON la „*Matematica Bârlădeană*"! In anuarul acelei Societăţi 1922—1923, în procesul verbal No. 12, găsim: „*Atmosfera de entusiasm pare să dovedească* că FÉNELON *a avut dreptate admiţând că e posibil ca să se instruiască cinevà distrându-se*".

Bietul FÉNELON trebue să fie foarte mâhnit pe lumea cealaltă, când văd tinerii distrându-se cu lucruri diabolice! Şi apoi tocmai camarazii noştri Bârlădeni care se ocupă mai mult cu geometria, nu vor să-l lase în pace pe FÉNELON. Astfel D-l M. GRÜNBAUM scrie în *Jurnalul matematic* Vol. I, No. 8, pag. 89:

„*Dacă nu mai mult, sper ca prin rândurile de mai sus să fi produs o lectură plăcută de* **geometrie** *şi încă o dovadă de frumuseţea-i ce distrează instruindu-te, servindu-mă de fraza unui duşman înverşunat al matematicelor,* FÉNELON, *care a definit idealul prin a te instruì distrându-te*".

D-l B. M. BARBĂLATT nu se lasă mai pe jos căci în „*Natura*", Anul XIII, No. 5, supliment, pagina şcoalei spune:

„*Revista înbogăţindu-ne cunoştinţele totdeodată,—cu interesul pe care îl desvoltă, întruchipează idealul lui* FÉNELON, *de a te instruì distrându-te*".

Bârlădeni, alegeţi-vă alt patron!

N. BOTEA.

ASUPRA A DOUĂ FIGURI ASEMENEA.

Se ştie[1]) că, fiind date, în acelaş plan, două figuri asemenea F şi F', există în planul lor un punct I propriul său omolog, sau punctul dublu al figurilor F şi F'. Dacă AB şi A'B' sunt două drepte omoloage în figurile F şi F', punctul I este cel de al doilea punct de intersecţie al cercurilor PAA', PBB', P fiind intersecţia dreptelor AB şi A'B'. Se poate trece dela figura F la figura F' printr'o rotaţie în jurul punctului I şi printr'o amplificare a segmentelor IA, IB,...., în raportul de asemănare k al figurilor F şi F' (astfel că $IA : IA' = k$,....).

In cele ce urmează, vom expune pentru două figuri asemenea din spaţiu, propoziţiunile cunoscute analoage, destul de importante, dar totuşi puţin răspândite.

1. Două tetraedre ABCD, A'B'C'D' sunt asemenea când au unghiurile poliedre egale şi feţele asemenea şi asemenea aşezate. Muchiile omoloage a două tetraedre asemenea sunt proporţionale. Se poate găsi ca şi pentru cazul figurilor asemenea din acelaş plan, o propoziţie analoagă.

Două tetraedre sunt asemenea când au feţele asemenea şi asemenea aşezate. In adevăr, dacă feţele $ADB \sim A'D'B'$, $BDC \sim B'D'C'$, $CDA \sim C'D'A'$, urmează că unghiurile $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B'D'C'$, $\sphericalangle CDA = \sphericalangle C'D'A'$ şi deci triedrele (AD, BD, CD), (A D', B'D', C'D') sunt egale, ca având feţele egale. Tetraedrele ABCD, A'B'C'D' au feţele asemenea şi asemenea aşezate şi triedrele egale, deci sunt asemenea.

2. Să considerăm în spaţiu două segmente AB şi A'B' şi un punct I, astfel că triunghiurile AIB, A'IB' să fie asemenea. Avem

$$IA/IA' = AB/A'B' \quad , \quad IB/IB' = AB/A'B'.$$

Insemnând cu α şi α' punctele ce divid segmentul AA' în raportul cu AB : A'B', punctele I, astfel ca IA : IA'=AB : A'B'=const., este sfera de diametru $\alpha\alpha'$. De asemenea, însemnând cu β şi β' punctele ce

1) A se vedea, Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, VIII-e édition, pag. 259; N. Abramescu, *Sur le mouvement des figures variables avec conservation de similitude ou d'aire (Societatea română de Ştiinţe, Buletinul de Ştiinţe matematice pure şi aplicate*, anul XXVI, Ianuarie — Iulie 1924; pag. 3 — 29).

divid segmentul BB′ în acelaş raport, AB : A′B′, punctele I, astfel ca IB : IB′ = AB : A′B′, este sfera de diametru ββ′.

Deci, locul punctelor I, astfel ca triunghiurile IAB, IA′B′ să fie asemenea, este cercul de intersecţie al sferelor de diametre αα′ şi ββ′.

3. Să considerăm în spaţiu triunghiurile ABC, AB′C′, asemenea în raportul *k*. *Există un punct* I *astfel ca triunghiurile* IAB, IA′B′ ; IBC, IB′C′ ; ICA, IC′A′ *să fie asemenea.* Acest punct I este unul din punctele de intersecţie ale sferelor de diametre αα′, ββ′, γγ′, unde α, α′; β, β′; γ, γ′, sunt punctele ce divid segmentele AA′, BB′, CC′ în acelaş raport *k*. Celalt punct de intersecţie al acestor sfere, corespunde cazului când triunghiurile ABC, A′B′C′, sunt invers asemenea.

Tetraedrele IABC, IA′B′C′ având feţele asemenea, IAB ∼ IA′B′, IBC ∼ IB′C′, ICA ∼ IC′A′, ABC ∼ A′B′C′, şi în acelaş raport, ele sunt asemenea.

Deci, unghiurile triedre (AI, BI, CI), (A′I, B′I, C′I) sunt egale şi, prin urmare, se pot suprapune muchiile AI, BI, CI respectiv peste A′I, B′I, C′I.

Dar, se poate aduce unghiul AIB peste egalul său A′IB′, cu o rotaţie de un unghiu θ în jurul axei Iδ, ce trece prin punctul I şi este la intersecţia planelor duse perpendicular pe planele AIA′, BIB′ şi respectiv prin bisectoarele unghiurilor AIA′, BIB′.

Deci, *se poate obţine triunghiul* A′B′C′ *din triunghiul* ABC, *dând tetraedrului* IABC *o rotaţie de unghiul* θ *în jurul axei* Iδ *şi apoi o dilaţie (amplificare) muchiilor* IA, IB, IC *în raportul de asemănare* k *al triunghiurilor* ABC, A′B′C′.

Se vede, de asemenea, că *planele duse perpendicular pe planele* AIA′, BIB′, CIC′, *respectiv prin bisectoarele unghiurilor* AIA′, BIB′, CIC′, *trec prin aceeaşi dreaptă* Iδ.

I este propriul său omolog în tetraedrele asemenea IABC, IA′B′C′.

4. Să considerăm două figuri asemenea F şi F′ în raportul *k* şi fie ABC, A′B′C′ două triunghiuri omoloage în aceste figuri. Să construim punctul I, astfel ca triunghiurile IAB ∼ IA′B′, IBC ∼ IB′C′, ICA ∼ IC′A′ şi dreapta Iδ corespunzătoare şi fie θ unghiul de rotaţie cu care aducem triedrul IABC peste IA′B′C′,

Fie D un punct al figurei F şi D′ punctul astfel ca tetraedrele DBAI şi D′B′A′I să fie asemenea. Atunci poliedrele ABCDI şi A′B′C′D′I sunt asemenea şi deci şi tetraedrele ABCD, A′B′C′D′ sunt

asemenea, sau că D' este în figura F' omologul lui D din figura F.

Deci *punctul* I *este propriul său omolog (punctul dublu) în figurile* F şi F'. După o rotaţie de unghiul θ în jurul axei Iδ, dreptele IA, IB,.... vin peste dreptele IA', IB',... şi deci figura F ajunge într'o poziţie F_1, omotetică cu figura F, în raport cu centrul de omotetie I. Amplificând segmentele IA, IB,..., în raportul *k*, după această dilatare, figura F, devine figura F'.

Se poate trece, deci, dela figura F *la figura* F' *cu o rotaţie de unghiul* θ *în jurul axei* Iδ *şi apoi cu o dilaţie în raportul* k.

A, B, C,.... *şi* A', B', C',.... *fiind puncte omoloage în figurile asemenea* F *şi* F', *planele duse perpendicular pe planele* AIA', BIB',..., *respectiv prin bisectoarele unghiurilor* AIA', BIB',..., *trec prin axa* Iδ.

Să presupunem că figura F' ocupă o poziţie infinit vecină de figura F. Atunci AA', BB',.... tind către tangentele la traectoriile (A), (B),.... descrise de punctele A, B,... ale figurei F, care se mişcă în spaţiu, rămânând asemenea cu ea însăşi. Când figura F' tinde către F, punctul I şi axa Iδ tind către o poziţie limită, centrul şi axa instantanee a mişcărei, analog cu centrul instantaneu de mişcare al unei figuri plane variabilă în planul său, ce rămâne asemenea cu ea însăşi. Rotaţia este reprezentată, în punctul M, de vectorul MM', perpendicular pe planul (M, Iδ), proporţional cu distanţa lui M la axa Iδ, adică proporţional cu unghiul (Iδ, IM) şi cu segmentul IM. Amplificarea (dilatarea) este reprezentată prin MM", în prelungirea lui IM şi proporţională cu IM. Rezultanta MT a vectorilor MM', MM", care sunt perpendiculari *şi în planul tangent la conul cu vârful* I, *axa* Iδ *şi unghiul la vârf* (Iδ, IM), este îndreptată după tangenta în M la curba (M) descrisă de punctul M al figurei mobile F, care rămâne asemenea cu ea însăşi. Poziţia vectorului MT depinde de raportul vectorilor MM' şi MM", adică de unghiul (Iδ, IM) astfel că *arcul infinit mic al curbei* (M), *în timpul deplasării figurei* F, *se confundă cu arcul infinit mic al curbei* (μ), *trasă pe conul cu vârful* I, *axa* Iδ, *unghiul la vârf* (Iδ, IM), *a cărei tangentă* MT *în* M, *taie generatoarele* IM, *ale acestui con sub un unghiu constant.* Această curbă (μ), care se mai zice în *Cinematica mediilor deformabile* şi *curbă de curent,* este, în cazul figurei F care rămâne asemenea cu ea însăşi, o *spirală conică,* care taie generatoarele unui con sub un unghiu constant, analog cu

spirala logaritmică, curba de curent în cazul mişcărei unei figuri plane, care rămâne asemenea cu ea însăşi în planul său şi care taie toate razele vectoare (eşite din pol) sub un unghiu constant.

Planul format de Iδ şi IM face un unghiu constant cu tangenta MT, astfel că, *în mişcarea unei figuri* F *variabilă, care rămâne asemenea cu ea însăşi, planele care taie, la un moment dat, sub un unghiu constant, potrivit ales, traectoriile descrise de punctele figurei* F *(adică planele ce fac un unghiu constant cu planele normale la traectorii), trec prin aceeaşi dreaptă,* Iδ, *axa instantanee de mişcare pentru momentul considerat.*

N. Abramescu.

ASUPRA
UNEI PROBLEME DE MAXIM SAU MINIM.

Este vorba de problema următoare: *Să se găsiască punctele unei curbe în spaţiu, cari fac distanţa la un punct dat din spaţiu maximă sau minimă.*

Pentru a preciză, specific că e vorba de extremuri relative şi nu de căutarea unui extremum extremorum. Rezolvarea chestiunii este imediată. Dacă însemnăm cu $h(s)$ pătratul distanţei dela punctul $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ al curbei, la punctul fix P(X, Y, Z) din spaţiu, vom aveà:

$$h(s) = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2.$$

Punctele cari răspund chestiunii, sunt printre cele date de ecuaţia

$$(1) \qquad -\frac{1}{2}\frac{dh(s)}{ds} = (X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (Z-z)\gamma = 0,$$

unde, după cum se ştie, $dx/ds = \alpha \ldots$ Relaţia aceasta ne arată că punctele cari satisfac problemei, se găsesc printre acelea obţinute ducând prin P plane normale la curbă.

Problema, ca şi rezultatul acesta, sunt fără îndoială cunoscute. Chestiunea merită însă adâncită puţin. Pentru aceasta, voiu consideră un punct M *fix* de pe curbă. Rezultatul obţinut se poate

interpretă şi astfel: Dintre toate punctele spaţiului, acelea pentru cari distanţele lor la M sunt maxime sau minime, în raport cu punctele imediat vecine ale curbei, se găsesc în planul normal curbei în M. O întrebare firească este însă următoarea: Toate punctele planului normal satisfac condiţiei de maxim (sau de minim)?

Răspunsul la această întrebare ni-l va da calculul derivatei a doua a funcţiunii $h(s)$. Deducem din (1), prin aplicarea formulelor ui FRENET

$$(2) \quad -\frac{1}{2}\frac{d^2h}{ds^2} = (X-x)\frac{\alpha'}{R} + (Y-y)\frac{\beta'}{R} + (Z-z)\frac{\gamma'}{R} - 1.$$

Un punct al planului normal va satisface deci unui maxim sau unui minim, după cum pentru acest punct d^2h/ds^2, va fi negativ sau pozitiv. Insă ecuaţia:

$$(3) \quad d^2h/ds^2 = 0,$$

împreună cu ecuaţia (1), reprezintă dreapta polară. Iar pentru punctul M, avem

$$\tfrac{1}{2} . d^2h/ds^2 = 1 > 0.$$

Putem deci enunţă: *Dreapta polară împarte planul normal în două regiuni: Regiunea in care se află punctul* M *al curbei, satisface condiţiei de minim. Cealaltă regiune, satisface condiţiei de maxim.*

Pentru a prescurtă, voiu numi prima regiune, regiunea pozitivă, iar pe cealaltă, regiunea negativă a planului normal.

Dreapta polară poate fi deci caracterizată (definită), prin proprietatea (negativă) ce o au punctele ei, de a nu da nici maxim, nici minim. Această proprietate este însă adevărată atâta vreme cât

$$d^3h/ds^3 \neq 0.$$

Este prin urmare nevoie de calculul derivatei a treia. Deducem din (2), tot prin aplicarea formulelor lui FRENET:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3h}{ds^3} = -\frac{R'}{R^2}\left[(X-x)\alpha' + (Y-y)\beta' + (Z-z)\gamma'\right] -$$

$$-\frac{1}{R}\left[(X-x)\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right) + (Y-y)\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right) + (Z-z)\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}\right)\right],$$

sau ținând seama că pentru punctele dreptei polare relațiile (1) și (3) sunt satisfăcute,

$$(4) \quad -\frac{1}{2}\frac{d^3h}{ds^3} = -\frac{R'}{R} - \frac{1}{RT}[(X-x)\alpha'' + (Y-y)\beta'' + (Z-z)\gamma''].$$

Relația

$$d^3h/ds^3 = 0,$$

echivalează cu

$$(5) \quad (X-x)\alpha'' + (Y-y)\beta'' + (Z-z)\gamma'' + T\frac{dR}{ds} = 0.$$

Relația aceasta reprezintă un plan paralel cu planul osculator, care taie dreapta polară în *centrul sferei osculatrice.*

Prin urmare, centrul sferei osculatrice scapă proprietății negative a punctelor dreptei polare. Pentru a vedeà dacă dă un maxim sau un minim, trebuie să calculăm derivata patra o funcțiunii $h(s)$. O vom calculà din (4), ținând seama de formulele lui FRENET și de egalitățile (1), (3), (5). Vom obține în definitiv:

$$\frac{1}{2}\frac{d^4h}{ds^4} = \frac{R + T^2R'' + R'TT'}{RT^2}.$$

Obținem prin urmare, rezultatul următor:

Dreapta polară nu separă complet cele două regiuni ale planului normal. Există un punct al acestei drepte (centrul sferei osculatrice), care va aparține regiunii pozitive sau regiunii negative, după cum expresia $(R + T^2R'' + R'TT')$ *va fi pozitivă sau negativă.*

Teorema aceasta exclude evident un număr *finit* de puncte ale curbei, date de ecuația

$$(6) \quad R + T^2R'' + R'TT' = 0.$$

Ea se mai poate exprimà geometric și astfel: *In vecinătatea unui punct* M *al curbei, care nu se află printre cele determinate de ecuația (6), curba va fi în interiorul sau în exteriorul sferei osculatrice, după cum expresiunea* $(R + T^2R'' + R'TT')$, *este pozitivă sau negativă.*

Justificarea acestei noi enunțări este imediată.

MIRON NICULESCU.

REVISTELE MATEMATICE.

Nu încep o polemică. *Gazeta Matematică* nici n-ar îngădui-o. Doresc numai să expun o părere personală sugerată de apariţia revistelor «*Matematica Bârlădeană*» şi «*Ziarul Matematic*».

Este de netăgăduit că activitatea matematică, la noi în ţară, a luat o dezvoltare din cele mai lăudabile. Sus, în vârful piramidei stau facultăţile de ştiinţe şi şcolile Politechnice. Activitatea de acolo, a dus fala ţărei mult departe peste hotare. Buletinele facultăţilor şi academiilor străine publică numeroase lucrări de-ale profesorilor noştri. Universităţile străine ne invită profesorii de matematici să le ţină prelegeri. Societăţi de matematici din ţări străine ne cheamă profesorii noştrii să le prezideze.

Avem cu ce ne mândri şi avem de ce ne mândri.

Este natural ca exemplul de sus să influenţeze şi celelalte trepte.

Cei dintâi sunt studenţii dela facultăţile de ştiinţe şi dela şcolile technice, care publică cu o frequenţă din ce în ce mai mare, lucrări din cele mai interesante.

«*Gazeta Matematică*» are o activitate şi o influenţă, asupra căreia orice cuvânt ar fi de prisos.

De cinci ani apare la Timişoara «*Revista Matematică din Timişoara*» şi de doi ani apare la Chişinău «*Foaia Matematică*». Caracterul elementar al acestor două reviste şi mai ales îngăduitor al celei din urmă, le-a făcut să fie ascultate de tineretul claselor superioare din liceie. Aceste reviste au reuşit să completeze cunoştinţele de clasă la matematici şi să dezvolte gustul tinerimei liceene pentru admirabila ştiinţă a matematicelor şi pentru technică.

Acesta şi este scopul pentru care apar cele trei reviste cu atâtea sacrificii din partea conducătorilor lor.

Se pare însă că activitatea matematică din licee a început să alunece pe o pantă, după mine, cel puţin nerecomandabilă. Revistele matematice au început să se înmulţaiscă prea mult şi mai ales se înmulţesc acolo unde nu trebue.

Să mă explic.

Un elev foarte harnic, dotat excepţional, scoate o revistă matematică pe când era în liceu. A reuşit să publice chestiuni interesante şi originale, pentru vârsta lui. Revista a vieţuit cât elevul

a fost în liceu, iar numele ei a fost cunoscut şi în alte părţi ale ţărei.

Elevi din alte licee au urmat exemplul colegului lor. Cu intenţiuni foarte lăudabile, profesorii au încurajat iniţiativele elevilor lor şi astfel am văzut apărând şi dispărând, cu diferite nume, reviste litografiate, tipărite, şapirografiate, la liceele din Arad, Constanţa, Turnu-Severin, Chişinău, Bârlad, etc.

Nu aşi risca dacă aşi spune că aproape a secat izvorul titlurilor care ar puteà să sĕ mai deà unei noi reviste de matematici, care ar fi să mai mijească în vre-o nouă capitală de judeţ. Dar nu acesta este răul cu care nu mă împac. Nu. Nu sunt de părere, şi în această privinţă profesorii îşi au cuvântul cu mai multă competenţă şi răspundere, ca elevii să scoată publicaţiuni în liceu, fie pe seama lor, fie ajutaţi de profesori, fie de matematici, fie de altă natură.

Din punctul de vedere al matematicelor, cele trei reviste citate, sunt prea suficiente să dezvolte gustul pentru matematice la toate liceele din toate judeţele existente şi chiar şi din judeţele care se vor mai înfiinţà. In această, privinţă *„Gazeta Matematică“* a acumulat în cei peste 30 ani de existenţă atâta material, în cât foarte adesea atât *«Revista Matematică din Timişoara»*, cât mai ales şi *«Foaia Matematică»*, sunt nevoite să termine unele chestiuni cu notiţa *«chestiunea a fost publicată în Gazeta Matematică...»* Ba chiar în *«Gazeta Matematică»* generaţiile mai noi sunt nevoite să recunoască că *«chestiunea a fost tratată în Gazeta Matematică vol.....»*. Prin urmare tinerii liceeni şi câte odată şi alţii mai bătrâni, când pun chestiuni noi, riscă să li se atragă atenţia că *«chestiunea a fost tratată în....»*.

Rezultă că pentru lucrările originale ale liceenilor, nu mai este loc pentru noi reviste de matematici. De altfel cultura la matematică, afară de excepţiuni rare pentru spiritele prea dotate, nici nu le îngăduie să aibă prea multă originalitate.

In ce priveşte revistele scoase în licee, cred că ele sunt chiar dăunătoare. Prin lucrul pe care-l reclamă redactarea revistelor, imprimarea, expedierea lor, etc.., ele sustrag elevii dela adevăratul rost al aflărei lor în liceu, pe unii îi împinge spre dorul de câştig material, care ar rezultà din vânzarea revistei, pe alţii îi ameţeşte ambiţia de glorii de autor; pe toţi însă îi paşte decepţia nesuccesului la dispariţia revistei şi foarte adesea ori sunt loviţi cu câte o notă rea la Geografie, Istorie, sau alte obiecte, ale căror profesori nu

vor să ştie şi cu drept cuvânt, că respectivul este director, redactor, corector, caligraf, desenator, la revista matematică, fie ea Bârlădeană, Clujeană, Vasluiană sau altfel.

Mă întreb ce s'ar întâmplà dacă la fiecare materie ar fi câte o revistă, în fiecare liceu. De sigur că n'ar mai fi liceu, ar fi dezastru.

Ca încheiere, nu cred că este bine ca elevii de liceu să scoată reviste, să transforme liceul în redacţii şi administraţii, oricare ar fi imboldul frumos al acestor iniţiative. Sunt destule reviste în care elevii pot să-şi publice lucrările lor, când au cevà de publicat. In afară de excepţiuni prea dotate, care apar la generaţiuni relativ rari, elevul de liceu are nevoie ca mai întâi să-şi formeze un bagaj de cultură generală şi pe cât se poate să-şi îndrumeze paşii spre specialităţile către care simte aptitudini mai pronunţate. Şi acì pot fi ajutaţi mai cu folos, dacă li se recomandă cărţi şi reviste serioase potrivite puterilor lor, decât dacă sunt încurajaţi să scoată publicaţii.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU.

NOTE MATEMATICE

29. *Alte zece geometrii diverse.* (Vezi Nota 16, pag. 131, Anul XXX).

162. **Aquiformă.**	Vezi Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXX. Pagina 279.
163. **Calculantă.**	Vezi *H. G. Zeuthen.* Histoire des mathématique. Paris 1902. Pag. 183.
164. **Cerească.**	Vezi Astronomia lui *Quetelét*, tradusă de *Spiru Haret.* Iaşi 1873.
165. **Clasică.**	A se vedeà *P. Boutroux.* L'idéal scientifique des mathématiciens. Pag. 145.
166. **Complex inversivă.**	Ca la No. 162. Vol. XXXI. Pag. 74.
167. **Parţială.**	Ca la No. 165.
168. **Real inversivă.**	Ca la No. 166.
169. **Segmentară.**	Vezi *Mathesis* 1906. Pag. 711.

170. **Statică.** *H. Bosmans.* — Le géomètre *Jérome Saccheri*, pag. 13.

171. **Ştiinţifică.** *H. Zeuthen.*—Théoreme du *Pythagore.* Origine de la géométrie scientifique. 1904.

(Va urmà). I. IONESCU.

30. *Asupra notei No. 17. Vol. XXX.* Enunţul trebue rectificat astfel: «Patratele numerelor de forma $(50n \pm m)$ cu m mai mic decât 30, au numerele formate de ultimele două cifre patrate perfecte consecutive, iar numerele formate de celelalte cifre, diferă unul de altul cu n».

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

31. *Asupra exerciţiului 75. Vol. XXX.* Soluţia acestui exerciţiu nu este completă, căci după ce s'au găsit cele două numere, nu s'au cercetat care sunt patrate perfecte. Dintre ele soluţiile sunt numai $5184 = 72^2$ şi $6084 = 78^2$.

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

32. *Asupra notei No. 1. Anul XXXI.* Se poate luà în general

$$n^m = n^{m-2}[(n-1)^2 + (n-1) + n],$$

$$n^m = n^{m-2}[(n-1)n + n].$$

I. NICULESCU-DOBRIDOR.

33. *Asupra problemei 3375.* Această problemă propusă în No. 5, de D-l SOLOMON FELDSTEIN, este rezolvată de D-l AL. PANTAZI în articolul scris: «*Proprietăţi ale patrulaterelor inscriptibile*», pag. 82, Vol. XX, al *Gazetei Matematice.*

M. A. CERNES (Iaşi).

34. *Proprietăţi ale triunghiului* $a^2 = bc$. In cele ce urmează, voiu da câtevà proprietăţi diferite de cele semnalate în Gazetă *).

*) A se vedeà: *Gazeta Matematică*, Vol. XXVI, pag. 243, Problema 2804 şi Nota Matematică 21 pag. 257.
Idem, Vol. XXX, Problema 2841, pag. 384 şi u.

1. *Dreapta care unește isobarii lui* K (punctul lui LEMOINE) *este isogonala bisectoarei unghiului* A.

In adevăr, isobarii lui K au ca coordonate baricentrice

$$K_1(b^2, c^2, a^2), \qquad K_2(c^2, a^2, b^2).$$

Dreapta care îi unește are ca ecuație

$$\alpha(b^2c^2 - a^4) + \beta(c^2a^2 - b^4) + \gamma(a^2b^2 - c^4) = 0.$$

De oarece $a^2 = bc$, ecuația se reduce la

$$\beta b - \gamma c = 0.$$

2. *Dreapta care unește isobarii lui* D (punctul lui LONGCHAMPS) *e bisectoara unghiului* A.

Isobarii lui D sunt

$$D_1(1/b^2, 1/c^2, 1/a^2), \qquad D_2(1/c^2, 1/a^2, 1/b^2).$$

Ecuația dreptei D_1D_2 este

$$\alpha \cdot \frac{a^4 - b^2c^2}{a^2} + \beta \cdot \frac{b^4 - c^2a^2}{b^2} + \gamma \cdot \frac{c^4 - a^2b^2}{c^2} = 0.$$

Făcând iarăși $a^2 = bc$, găsim

$$\beta c - \gamma b = 0.$$

3. *Perpendiculara ridicată pe mijlocul bisectoarei interioare* AA′ *trece prin picioarele* B_1 *și* C_1 *ale simedianelor* BB_1 *și* CC_1.

Figura $AB_1A'C_1$ fiind un romb, C_1A' și B_1A' sunt respectiv paralele cu AC și AB. Triunghiul CB_1A' este asemenea cu CAB și deci avem

$$CB_1/B_1A' = AC/AB, \qquad \therefore \qquad CB_1/AB_1 = AC/AB = b/c.$$

Analog găsim $BC_1/AC_1 = c/b$; deci B_1 și C_1 sunt picioarele simedianelor.

4. *Simedianele* BB_1 și CC_1 *trec respectiv prin primul și al doilea punct al lui* JERABEK.

In adevăr, simedianele au ca ecuații, în coordonate baricentrice, ținând seamă de condiția $a^2 = bc$,

$$(BB_1) \quad c\alpha - b\gamma = 0; \qquad (CC_1) \quad b\alpha - c\beta = 0,$$

iar coordonatele primului și al doilea punct al lui JERABEK:

$$J_1(1/c, 1/a, 1/b), \qquad J_2(1/b, 1/c, 1/a)$$

verifică respectiv aceste ecuații.

5. *Dreptele* CJ_1 *şi* BJ_2 *sunt isotomicele bisectoarelor vârurilor respective.*

In adevăr, aceste drepte au respectiv ca ecuaţii, în hipoteza $a^2 = bc$,

$$a\alpha - b\beta = 0, \qquad a\alpha - c\gamma = 0.$$

6. *Isobarele directe ale centrului cercului înscris* I, *a complimentarului său şi a asociatului la infinit al lui* I, *sunt coliniare, iar dreapta care uneşte aceste puncte trece prin* A.

Coordonatele lor fiind

$$I_1(b, c, a), \qquad I_2(c, a, b)$$

$$g(b+c, c+a, a+b), \qquad I'(b-c, c-a, a-b),$$

verificarea e uşoară.

7. *Dacă unghiul* $A = 60^0$, *triunghiul* $a^2 = bc$ *este automedian* $(2a^2 = b^2 + c^2)$.

CONST. C. POPOVICI.
Elev Cl. VIII, Lic. Internat, Iaşi.

35. *Asupra patrulaterului.* Fie AMBC un patrulater inscriptibil şi A_2, B_2, C_2, P, Q mijloacele segmentelor BC, CA, AB, AM, MB. Fie B', C' proecţiile vârfurilor B şi C pe MA şi M', A', proecţiile vârfurilor M şi A pe BC. Fie ω centrul cercului B'C'A'M'. El se găseşte la intersecţia perpendicularelor duse din A_2, B_2, P, Q, respectiv pe AM, MB, BC, CA.

Să fixăm trei din vârfurile patrulaterului, de ex.: pe A, B, C.

In acest caz A_2 şi B_2 sunt fixe, iar unghiul $A_2\omega B_2$, e constant şi egal cu unghiul C. Deci locul lui ω e un cerc care trece prin A_2 şi B_2 şi prin piciorul perpendicularei dusă din A pe BC, adică prin A', căci atunci când AM devine înălţime în triunghiul ABC, ω se găseşte în A'. Deci cercul $A_2A'B_2$ trece prin centrul ω al cercului B'C'M'N'.

In mod analog, găsim alte trei cercuri $B_2C'P$, $PB'Q$, $QM'A_2$ care trec prin centrul ω.

Să considerăm cazul când M ajunge în A. In acest caz M' se confundă cu A', Q cu C_2, iar ω ajunge la mijlocul distanţei AH, dintre ortocentrul H al triunghiului ABC şi vârful A. Cercul $A_2M'Q$ se confundă atunci cu cercul $A_2A'B_2$, care se vede astfel că trece şi prin mijlocul laturei AB. Deci:

Cercul care trece prin mijloacele laturilor unui triunghiu ABC, *trece şi prin piciorul înălţimei dusă din* A *şi prin mijlocul distanţei* AH *dintre ortocentru şi vârful* A.

Dacă considerăm proecţiile vârfurilor A şi C pe BM, şi ale vârfurilor B şi M pe AC, găsim că cercul care trece prin mijloacele laturilor lui ABC, trece şi prin piciorul înălţimii dusă din B şi prin mijlocul distanţei BH, dintre ortocentrul H al lui ABC şi vârful B.

In mod analog, vom demonstrà că cercul care trece prin mijloacele laturilor, trece şi prin piciorul înălţimii dusă din C şi prin mijlocul distanţei CH dintre vârful C şi ortocentrul H al triunghiului ABC.

Am dat astfel peste teorema lui EULER, asupra cercului celor nouă puncte.

MIHAIL I. FOCŞENEANU.
Sublocotenent, Student, Cluj.

Notă. Punctul ω este *anticentrul* patrulaterului înscris AMBC; se ştie că ω aparţine cercurilor celor nouă puncte ale triunghiurilor ABC, AMB, AMC, BMC. Aceste patru cercuri $A_2A'B_2$, $B_2C'P$, PQB', QA_2M', sunt egale, căci triunghiurile la care se rapoartă au acelaş cerc circumscris, cercul AMBC.

Se ştie că dreptele lui SIMSON a fiecăruia din vârfurile patrulaterului inscriptibil AMBC, în raport cu triunghiul format de celelalte trei vârfuri, se întretaie în ω (vezi problema 3375, care e cunoscută).

(V. C.).

36. *Asupra exerciţiului 63 „G. M." vol. XXI.* In acest exerciţiu se cereà să se stabiliască identitatea:

$$\sum a^2 \frac{\sin B \sin C}{\cos B \sin C + \sin B \cos C} = 2R \sum a \sin B \sin C,$$

între elementele unui triunghiu.

Soluţia este prea lungă, prin faptul că se ia fiecare parte, arătându-se că au valoarea comună 6S, după ce s'au utilizat relaţii din «Culegerea de probleme» şi «Compliments de trigonomètrie».

Se poate da o soluţie extrem de simplă, observând

$$\cos B \sin C + \sin B \cos C = \sin(B + C) = \sin A \qquad \text{şi utilizând}$$

$$a/\sin A = \text{etc.} \ldots = 2R$$

$$\sum 2R\, a \sin B \sin C = 2R \sum a \sin B \sin C.$$

POPA ILIE.
Cl. VII, Liceul Internat, Iaşi.

37. *Asupra problemei 3100.* In această problemă s'ar puteà considerà $y \neq o$, în care caz soluţiile problemei sunt:

$$t = \sqrt{\frac{2(v_0^2 - yg)}{g^2} \pm \frac{2}{g^2}\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{(v_0^2 - yg)^2}}}.$$

Caracteristicele acestei expresiuni ar fi *maximul* şi *minimul* valorilor ei, cari însă se pot mult mai uşor deduce pe o cale pur geometrică, şi ale cărei concluzii conduc că:

pentru $y = o$, avem:
t maximum în cazul traectoriei complimentare
t minimum » » normale.

S'ar mai puteà considerà cazul când y este maximum, dar şi în acest caz, y nu va fi altcevà decât săgeata maximă a traectoriei de amplitudine $2x$, şi a cărei valoare va fi:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Se vede dar, că problema în aceste cazuri pierde din interesul pur matematic, trecând în domeniul specialiştilor, scop pe care nu am căutat să-l urmăresc în propunerea şi rezolvarea ei.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

BIBLIOGRAFIE.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 50. No. 9 şi 10. Fevruarie 1926. Paris.

Revista matematică din Timişoara. Anul V, No. 12. Fevruarie 1926. Timişoara. Teorema lui SIMSON, dedusă din teorema lui PASCAL, de LT.-COL. GH. BUICLIU. Asupra puterii unui polinom, de M. GHERMĂNESCU.

Foaia matematică. Anul III. No. 2. Fevruarie 1926. Chişinău. Generare de identităţi, de L. WEISS.

Buletinul Societăţii Studenţilor în matematici. No. 3. Bucureşti. Proprietăţi ale curbelor plane, de M. NICULESCU. O problemă de geometrie în legătură cu teoria funcţiilor eliptice, de E. BALLAN. Asupra integralelor unei clase de ecuaţii diferenţiale lineare, de GR. C. MOISIL. Câtevà proprietăţi ale polinoamelor lui LAGUERRE, de T. POPOVICIU.

Curierul matematic. Vol. I. No. 12. Fevruarie 1926. Asupra seriei hipergeometrice, de T. POPOVICIU. Asupra unor puncte colineare, de D. NESTOR.

P. SERGESCO. *Sur le module minimum des zéros de l'équation trinome.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.* Paris. Şedinţa din 16 Noemvrie 1925).

N. ABRAMESCU. *Memoriu de titluri şi lucrări.* Cluj. 1925.

A. MAROGER. *Le problème de* PAPPUS *et ses cent premières solutions.* Paris 1925. Librairie Vuibert. Boulevard Saint-Germain, 63. Prix 25 frcs.

Intr'un volum de 386 pagini, autorul se ocupă cu problema celebră a matematicianului grec PAPPUS:

Printr'un punct luat pe bisectoara unui unghiu drept, să se ducă un segment de lungime cunoscută şi ale cărui extremităţi să fie pe laturile unghiului drept,

căreia îi dă nu mai puţin de 100 soluţiuni, cu dezvoltări, consecinţe şi concluziuni uneori cu totul neaşteptate, de natură aritmetică, algebrică sau analitică.

După cum arată D-l PAUL MONTEL în prefaţa scrisă acestei cărţi, „autorul plecând dela o chestiune particulară, simplă, de aspect familiar, ridică puţin câte puţin chestiunea, arătând cum ea se leagă de diferite ştiinţe şi cu ramurile lor... JOSEPH BERTRAND spunea că se face forte să claseze pe candidaţii la o şcoală înaltă, întrebându-i numai asupra cazurilor de egalitate ale triunghiurilor. D-l MAROGER şi-a propus să-i prepare la acest examen, servindu-se de o singură chestiune".

După o introducere asupra ecuaţiilor reciproce, se dă prima soluţie a problemei lui PAPPUS. Ea este însoţită de consecinţe, note, exerciţii. In acelaş mod se tratează alte trei soluţii, după care urmează o digresiune asupra lor. Aci se dau teoreme, ca de exemplu: *suma coeficienţilor unghiulari a celor patru drepte ale lui* PAPPUS *este 2;* — expresiunea $(r^2+5+4\sqrt{1+r^2})$ *dă toate patratele perechi consecutive, afară de al lui 2, dacă înlocuim* $(1+r^2)$ *prin un patrat deja format, începând cu 4; teorema lui* FRÉGIER, etc. Soluţiile 5-12 sunt urmate de o digresiune asupra metodei de combinare a locurilor geometrice; soluţiile 13-15, de alta asupra metodei rădăcinii comune; soluţiile 16-20 de o digresiune asupra caracteristicei patrulaterului lui PAPPUS şi interpretarea soluţiilor străine; soluţiile 21-31 de o digresiune asupra proprietăţilor patrulaterului lui PAPPUS; soluţiile 32-36 de o digresiune asupra mecanizmelor, a hiperbolografului, a unui proiect de inversor; soluţiile 37-40 de o digresiune asupra metodei de implicitaţie; soluţiile 41-75 de o digresiune asupra numărului soluţiilor, formare de locuri, etc.; soluţiile 76-80 urmate de generalităţi asupra transformărilor cuadratice; soluţiile 81-99 de o digresiune asupra dublei transformări, a homotetografului universal; în fine soluţia 100 urmată de un studiu al metodei de străpungere şi o digresiune finală asupra raţionalităţii şi iraţionalităţii literale. Volumul se încheie cu o „Concluzie", în care se arată că s'au întrebuinţat la soluţiile date, toate metodele cunoscute, în special metoda locurilor geometrice, a inversiunii, implicităţii,

străpungerii, etc. Scopul urmărit necontenit, a fost generalizarea. Arată că problema lui PAPPUS este susceptibilă de generalizări, luând punctul afară din bisectoare sau unghiul diferit de 90°, etc.

După cum se vede, această carte este unică în felul ei şi de cel mai mare folos pentru dezvoltarea spiritului de cercetări şi de generalizare matematică. O recomandăm cu toată insistenţa acelor care vor să-şi facă o bună educaţie matematică, sau care vor să se distreze prin citirea de cărţi matematice.

I. IONESCU.

FRANCO PASTORE. *Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina.* VI. *Nuestra mineralogia y geologia.* Buenos-Aires 1925.

NICOLAS LOZANO & ANTONIO PAITOVI. *Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina.* XI. *La higiene publica y las obras sanitarias argentinas.* Buenos-Aires 1925.

GUILLERMO HOXMARK. *Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina.* XIII. *La evolucion de la meteorologia.* Buenos-Aires 1925.

PAUL APPELL. *Traité de Mécanique Rationnelle.* Tomul al 5-lea (Elemente de Calcul Tensorial). Paris, Gauthier-Villars, 1926. (198 pag.).

Fostul rector al Sorbonei, în colaborare cu D-l R. THIRY profesor la Universitatea din Strasbourg, a scos de sub tipar al 5-lea tom din tratatul său clasic de Mecanică.

In această primă fascicolă, se tratează operaţiunile de calcul tensorial, aşă încât ea are mai mult caracterul unei cărţi de analiză. Totuşi cartea conţine la urmă şi câtevă aplicaţiuni importante de Geometrie, Mecanică şi Elasticitate. Planul cărţii este următorul:

In capitolul I, se reamintesc câtevă chestiuni clasice de algebră, despre forme lineare şi cuadratice, păstrându-se caracterul puţin cam arhaic al expunerilor clasice din manualele franceze.

Capitolul II constitue partea centrală a calculului tensorial, expunându-se acî algebra şi analiza tensorială. D-l APPELL introduce şi D-sa notaţiunea simplificată a indicilor muţi, însă notaţiunile întrebuinţate nu sunt totdeauna din cele mai fericite; în special ideia de a notà derivata $dx^i/dx^r = x^i_r$ o socotesc nepotrivită, fiindcă operaţiunea de derivare dispare complet din vedere, ceeace strică clarităţii.

Noţiunea de linii geodesice este introdusă cu ajutorul calculului variaţiunilor, metodă asupra căreia eu fac rezervele mele. Tot în acest capitol se face şi studiul simboalelor lui CHRISTOFFEL, studiu interesant şi bine închegat; noţiunile de covarianţă şi contravarianţă sunt însă prea abstract expuse.

Faimosul tensor al lui RIEMANN-CHRISTOFFEL este obiectul unui studiu clar şi aprofundat şi capitolul se termină cu un rezumat al formulelor tensoriale mai importante, extinse la domeniul diferenţial de ordinul al doilea inclusiv.

In capitolul al 3-lea, cartea cuprinde aplicaţiuni geometrice curente din domeniul teoriei generale a suprafeţelor, adică a unei multiplicităţi minore

cuprinsă într'o multiplicitate euclidiană cu trei dimensiuni. Tot în acest capitol se găsesc tratate exemplele clasice de tensori din mecanică, cum este tensorul elasticităţii, tensorul rotaţiunei corpurilor solide, ş. a. m. d.

Capitolul al 4-lea conţine studiul general al spaţiilor euclidiene cu n dimensiuni, în care se cuprinde evident şi studiul universului newtonian. Aci apare rolul tensorului RIEMANN-CHRISTOFFEL, chestiune care este bine tratată.

In capitolul al 5-lea se studiază spaţiile curbe ale lui RIEMANN. Autorul expune metoda lui RICCI şi LEVI CIVITA, considerând un asemenea spaţiu ca o multiplicitate minoră a unui spaţiu euclidian cu un număr mai mare de dimensiuni. Expunerea este detaliată şi se apropie de aceea a lui LANE.

In sfârşit, în ultimul capitol, se expun lucrările recente ale lui WEYL, EDDINGTON şi CARTAN, asupra geometriei, cu privire la ipotezele ce se pot face asupra connexiunei metrice în deosebire de connexiunea afină.

Aceste lucrări interesante, cari aruncă o lumină vie asupra convenţionalismului structurei spaţiilor, sunt expuse după metoda greoae dar profundă a lui WEYL, fără a se ajută în deajuns de lucrările D-lui CARTAN.

Un ultim capitol, capitolul 8 dat ca anexă, tratează în mod sumar Geometria Cayleyană, adică înrudirea dintre diferitele geometrii ale spaţiului de connexiune metrică uniformă.

Cartea este foarte interesantă şi conţine mult material, dar tratat în mod condensat.

T. L.

CERERI.

136. Mai există: *Chestiuni de examen*, de E. ABASON şi unde se pot procură?

RENÉ I. SPATHY.

137. Dorind să posed Culegerile de probleme No. 1 şi No. 4 epuizate, rog pe cei ce le pot cedà să mă anunţe la Iaşi, Str. Căpitan Păun, No. 3.

M. A. CERNES.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2669. *Se consideră pe o dreaptă* D *diferite sisteme de puncte conjugate* A *şi* A′ *în raport cu o conică* (C) *cu centrul* O. *Din punctele* A *şi* A′, *se duc tangentele la conica* (C) *şi fie* M, N, P, Q *punctele de intersecţie ale acestor tangente şi* m, n, p, q *punctele de contact ale aceloraşi tangente cu conica* (C). *Să se arate că: 1⁰. Diagonalele patrulaterului*

MNPQ *se întâlnesc în polul dreptei* D *în raport cu conica* (C); 2°. *Patrulaterul* MNPQ *este înscris într'o conică fixă; patrulaterul* mnpq *este circumscris unei conice fixe.*

N. ABRAMESCU.

Soluție dată de D-nii: MIHAI FOCȘENEANU și B. M. BARBĂLATT.

1°. Punctele A și A' fiind conjugate, polara lui A trece prin A' și reciproc; deci diagonalele patrulaterului *mnpq* trec prin polul ω al dreptei D în raport cu C. Triunghiurile ωAA' sunt conjugate în raport cu conica (C). Insă considerând patrulaterele MNPQ, *mnpq* se știe că în orice patrulater circumscris unei conice (C), cele două diagonale MP și NQ și dreptele *mp* și *nq*, care unesc punctele de contact ale laturilor opuse, se taie în acelaș punct.

De aci rezultă că diagonalele patrulaterului MNPQ, trec prin punctul de întâlnire al dreptelor *mp* și *nq*, adică prin polul dreptei D în raport cu (C).

2°. Să luăm ca axe de coordonate sistemul de diametrii conjugați ai conicei (C), din care unul să fie paralel cu D. Ecuația dreptei D este

$$x - a = 0, \tag{1}$$

iar a conicei (C)

$$x^2/p + y^2/q - 1 = 0. \tag{2}$$

Coordonatele punctului E de intersecție al dreptelor D și Ox sunt $(a, 0)$.

Să considerăm punctul $A(a, y_1)$; ecuația polarei acestui punct este

$$ax/p + y_1 y/q - 1 = 0. \tag{3}$$

Punctul $A'(a, y_2)$ nu este altcevà decât punctul de intersecție al dreptei D cu dreapta (3), iar coordonatele sale sunt

$$x = a, \qquad y_2 = \frac{q}{y_1}\left(1 - a^2/p\right),$$

de unde

$$y_1 y_2 = q(1 - a^2/p).$$

Deci între lungimile EA și EA' avem relațiunea de mai sus, care ne arată că punctele A și A' determină pe D o involuție cu centrul în E, puterea de involuție fiind

$$K = q(1 - a^2/p),$$

iar punctele duble fiind punctele de intersecție ale conicei (C) și dreptei D.

Pentrucă tangentele duse din fiecare din punctele M, N, P, Q întâlnesc pe D în A sau A', suntem conduși să găsim locul punctelor din plan, așă în cât tangentele duse la (C) să determine pe D o involuție cu centrul în E, iar puterea fiind egală cu K.

Fie (x_0, y_0) un punct al locului. Ecuația tangentelor, duse din acest punct la (C), este

$$\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{p}+\frac{y_0^2}{q}-1\right)-\left(\frac{x_0 x}{p}+\frac{y_0 y}{q}-1\right)^2=0.$$

Punctele de intersecție ale acestor tangente cu D se obțin făcând în ecuația precedentă $x=a$, și apoi aranjând, avem:

$$\frac{y^2}{q}\left(\frac{x_0^2}{p}-1\right)+\frac{2y}{q}\left(y_0-\frac{ax_0y_0}{p}\right)+\left(\frac{y_0^2}{q}-1\right)\frac{a^2}{p}-\frac{x_0^2}{p}-\frac{y_0^2}{q}+\frac{2ax_0}{p}=0.$$

Această ecuație dându-ne ordonatele punctelor A și A', produsul rădăcinilor trebue să satisfacă la relațiunea

$$y_1 y_2 = K,$$

$$x_0^2 q(a^2-2p)+y_0^2 p(a^2-p)+2apqx_0+pq(p-2a^2)=0.$$

Deci locul căutat este reprezentat de ecuația precedentă, și este o conică (C') cu centrul pe axa Ox și care admite acelaș pol

$$(p/a\ ,\ 0)$$

față de D ca și (C), ceeace trebuia să fie așă. Conica (C') taie dreapta D în aceleași puncte ca și conica (C).

3°. Vârfurile patrulaterului MNPQ fiind polurile laturilor patrulaterului *mnpq* față de conica (C), și cum aceste vârfuri sunt pe conica (C'), rezultă, conform teoriei polarelor reciproce, că laturile patrulaterului *mnpq* sunt tangente la polara reciprocă (C'') a conicei (C') în raport cu conica (C), adică tot o conică. Deci patrulaterul *mnpq* este circumscris unei conice (C'').

Eliminând pe λ, locul punctului A' este conica

$$f'_y g'_z - f'_z g'_y = 0.$$

In mod analog, se vede că punctele B' și C' descriu câte o conică.

4°. AA″ fiind o dreaptă ce trece prin intersecţia dreptelor B′C′ şi BC, ale căror ecuaţii sunt $F'_x = 0$, $x = 0$,

$$Ax + By + Dz + \lambda(A'x + B'y + D'z) = 0, \qquad x = 0,$$

are o ecuaţie de forma

$$[By + Dz + \lambda(B'y + D'z)] + \mu x = 0.$$

Scriind că această dreaptă trece prin punctul A(1, 0, 0), urmează $\mu = 0$, aşà că ecuaţia dreptei AA″ este

$$(AA'') \qquad By + Dz + \lambda(B'y + D'z) = 0.$$

In mod analog se vede că ecuaţiile dreptelor BB″, CC″ sunt

$$(BB'') \qquad Bx + Ez + \lambda(B'x + E'z) = 0,$$

$$(CC'') \qquad Dx + Ey + \lambda(D'x + E'y) = 0.$$

Când λ variază, fiecare intersecţie a două din aceste drepte, descrie câte o conică; astfel intersecţia dreptelor AA″, BB″, descrie conica

$$(By + Dz)(B'x + E'z) - (Bx + Ez)(B'y + D'z) = 0.$$

5°. Ecuaţia (1) a dreptei Δ, se poate scrie

$$(2) \quad \lambda^2(B'D'x + E'B'y + D'E'z) + \lambda[(DB' + D'B)x + (B'E + BE')y + (E'D + ED')z] + DBx + BEy + EDz = 0.$$

Infăşurătoarea dreptei Δ se obţine eliminând λ între această ecuaţie şi derivata sa în raport cu λ, sau scriind că realizantul ecuaţiei (2) este zero, adică

$$(3) \quad [(DB' + D'B)x + (B'E + BE')y + (E'D + ED')z]^2 = 4(B'D'x + E'B'y + E'D'z)(DBx + BEy + EDz) = 0.$$

Făcând în această ecuaţie $x = 0$, obţinem

$$[(B'E - BE')y - (E'D - ED')z]^2 = 0,$$

ceeace probează că dreapta BC ($x = 0$) este tangenta conicei (3). Deci conica ce o înfăşură dreapta Δ este înscrisă în triunghiul ABC.

PROBLEMA 2946. *Să se găsiască limita expresiunii:*

$$y = x^m e^{\frac{1}{x^n}},$$

când x *tinde către zero, iar* m *şi* n *sunt numere întregi.*

T. MAREŞ.

Vom distinge 4 cazuri:

I. $m > 0 \quad , \quad n > 0.$

Presupunem că x tinde către zero, descrescând prin valori pozitive.

Vom aveà

$$Ly = m\ Lx + \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n}\left[1 + mx^n\ Lx\right] = \frac{1}{x^n}\left[1 + m\frac{Lx}{\frac{1}{x^n}}\right].$$

Să căutăm mai întâi

$$\lim_{x=0} m\frac{Lx}{\frac{1}{x^n}} = m\lim_{x=0}\frac{Lx}{\frac{1}{x^n}} = \frac{\infty}{\infty},$$

aplicăm regula lui HOSPITAL şi obţinem succesiv:

$$\lim_{x=0} m\frac{Lx}{\frac{1}{x^n}} = m\lim_{x=0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{n}{x^{n+1}}} = \frac{m}{n}\lim_{x=0}(x^n) = 0,$$

prin urmare

$$\lim_{x=0} Ly = \frac{1}{0} \times 1 = +\infty \qquad \text{şi deci} \quad \lim_{x=0} y = +\infty.$$

Dacă x tinde către zero, crescând prin valori negative, atunci însemnăm $x = -\varepsilon$ şi avem

$$y = (-\varepsilon)^m e^{\frac{1}{(-\varepsilon)^n}}$$

şi aici vom deosebi 3 cazuri:

a) m şi n cu soţ, atunci

$$y = \varepsilon^m e^{\frac{1}{\varepsilon^n}} \text{ şi deci } \lim_{\varepsilon=0} y = +\infty \text{ (cazul precedent);}$$

b) m fără soţ şi n cu soţ, avem:

$$y = -\varepsilon^m e^{\frac{1}{\varepsilon^n}} \text{ şi prin urmare } \lim_{\varepsilon=0} y = -\infty;$$

c) n fără soţ

$$y = (-\varepsilon)^m e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}} = (-\varepsilon)^m \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon^n}}}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} y = 0.$$

II. $m > 0$, $n < 0$, expresiunea dată devine:

$$y = x^m e^{\frac{1}{x^{-n}}} = x^m e^{x^n}.$$

Dacă x tinde către zero prin valori pozitive, avem

$$\lim_{x=0} y = \lim_{x=0} x^m e^{x^n} = 0.$$

Dacă x tinde către zero prin valori negative, avem dacă punem $x = -\varepsilon$:

a) n fără soţ: $\lim_{\varepsilon=0} y = \lim_{\varepsilon=0} (-\varepsilon)^m . e^{(-\varepsilon)^n} = \lim_{\varepsilon=0} (-\varepsilon)^m e^{-\varepsilon^n}$

$$= \lim_{\varepsilon=0} (-\varepsilon)^m \frac{1}{e^{\varepsilon^n}} = 0;$$

b) n cu soţ: $\lim_{\varepsilon=0} y = \lim_{\varepsilon=0} (-\varepsilon)^m e^{\varepsilon^n} = 0.$

III. $m < 0$, $n > 0$; în acest caz expresiunea devine:

$$y = \frac{1}{x^m} e^{\frac{1}{x^n}}.$$

Dacă x tinde către zero prin valori pozitive:

$$\lim_{x=0} y = \lim_{x=0} \frac{1}{x^m} \cdot e^{\frac{1}{x^n}} = +\infty.$$

Dacă x tinde către zero prin valori negative, avem dacă punem $x = -\varepsilon$:

a) n cu soţ: $\lim_{\varepsilon=0} y = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} e^{\frac{1}{(-\varepsilon)^n}} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} e^{\frac{1}{x^n}} = \pm\infty.$

După cum m este cu soț sau fără soț:

b) n fără soț: $\lim\limits_{\varepsilon=0} y = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}} = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} \frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon^n}}}$

$$= \pm \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^m e^{\frac{1}{\varepsilon^n}}}.$$

Numitorul acestei fracții, conform celor stabilite la cazul I), va tinde către $+\infty$ și deci

$$\lim y = \pm 0 = 0.$$

IV. $m < 0$, $n < 0$, atunci expresiunea devine:

$$y = \frac{1}{x^m} e^{x^n}.$$

Dacă x tinde către zero prin valori pozitive:

$$\lim_{x=0} y = \lim_{x=0} \frac{1}{x^m} e^{x^n} = +\infty.$$

Dacă x tinde către zero prin valori negative, punem $x = -\varepsilon$:

a) n cu soț: $\lim\limits_{\varepsilon=0} y = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} e^{(-\varepsilon)^n} = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} e^{\varepsilon^n} = \pm\infty,$

după cum m este cu soț sau fără soț:

b) n fără soț: $\lim\limits_{\varepsilon=0} y = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} e^{(-\varepsilon)^n} = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} e^{-\varepsilon^n}$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{(-\varepsilon)^m} \cdot \frac{1}{e^{\varepsilon^n}} = \pm\infty,$$

după cum m este cu soț sau fără soț.

V. Cazurile particulare.

a) $m = 0 \quad n > 0$, expresiunea devine:

$y = e^{\frac{1}{x^n}}$ și $\lim\limits_{x=0} y = 0$, sau $+\infty$, după cum x tinde către zero prin valori negative sau pozitive.

b) $m = 0 \quad n < 0$, expresiunea devine:

$$y = e^{x^n} \quad \text{și} \quad \lim_{x=0} y = 1.$$

c) $n = 0 \quad m \gtrless 0$, expresiunea devine:

$$y = x^m \text{ şi avem } \lim_{x=0} y = 0.$$

Următorul tablou rezumează cele 5 cazuri examinate:

		$m>0$ $n>0$	$m>0$ $n<0$	$m<0$ $n>0$	$m<0$ $n<0$	$m=0$ $n>0$	$m=0$ $n<0$	$n=0$ $m\gtrless 0$
$m=2p$ $n=2q$	$x=+\varepsilon$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	0
	$x=-\varepsilon$	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	1	0
$m=2p$ $n=2q+1$	$x=+\varepsilon$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	—
	$x=-\varepsilon$	0	0	0	$-\infty$	0	1	—
$m=2p+1$ $n=2q$	$x=+\varepsilon$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	—	—	0
	$x=-\varepsilon$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	—	—	0
$m=2p+1$ $n=2q+1$	$x=+\varepsilon$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	—	—	—
	$x=-\varepsilon$	0	0	0	$+\infty$	—	—	—

Se vede din acest tablou, că din cele 24 cazuri posibile, în 10 cazuri expresiunea are pentru $x = 0$ două valori diferite, după cum x se apropie de zero prin valori pozitive sau negative.

T. M.

Au rezolvat problema numai în cazul când x tinde către zero prin valori pozitive.

Cazurile: I, II, III, IV, V, D-l Tib. Popoviciu.

Cazurile: I, II, III şi IV, D-nii: E. Ballan, B. M. Barbălatt, M. H. Brătescu-Danubiu, I. Huber, Şt. Fl. Lăzărescu, Ov. Popea şi Gh. D. Popescu.

Cazul I, D-nii: M. I. Adam, E. Iacob, Şt. Marin, Gr. Moisil, S. Nicolescu, Fl. Negretzu, A. Tauber şi L. Weiss.

Notă. Problema 2946 generalizează chestiunea de Algebră ce s'a propus la concursul de intrare la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti, în anul 1911.

PROBLEMA 3017. *Să se traseze o dreaptă ce unește două puncte date, numai cu ajutorul unei rigle, mai scurtă ca distanța dintre ele.*

ȘTEFAN S. MIHĂESCU.

Fie M și N punctele date, la distanța $2a$ unul de altul, iar $l < 2a$ lungimea riglei. Pentru ca numărul construcțiunilor ajutătoare, ce vom avea de făcut pentru a trasă dreapta dintre punctele M și N, să fie cât mai mic, le vom alege astfel încât să nu avem de trasat segmente mai lungi decât rigla dată. Altfel, dacă segmentul de dreaptă ce vom avea de trasat ar fi mai lung decât rigla, atunci am fi obligați a-l trasă prin 2 sau mai multe așezări continue ale riglei, care complică construcțiunea și micșorează exactitatea ei.

Problema revine deci în a găsi un alt punct P, situat pe drepta MN și cuprins între acestea, așă încât trasarea dreptei MN să se poată face prin două trasări MP și PN. Pentru aceasta, vom distinge două cazuri:

1^0. $a < l < 2a$ și 2^0. $l < a$.

Prima soluțiune. 1^0. Se duc două drepte după voe xOx' și yOy', care se întretaie în punctul O. Se va căutà ca punctul O să fie cât mai aproape de mijlocul segmentului MN, iar una din drepte spre ex. yOy' cât se poate mai aproape de normala la MN; cealaltă dreaptă xOx' va face cu yOy' un unghiu mai închis sau mai deschis, cu cât lungimea riglei l este mai apropriată sau mai depărtată de $2a$. Prin O ducem a treia dreaptă zOz', care să fie cât mai apropiată de simetrica lui xOx' față de yOy'. Ducem apoi prin punctul N două drepte după voe NAC și NC'A' (A și A' fiind pe dreapta xOx', iar C și C' pe dreapta zOz'), una situată dasupra punctului O, iar cealaltă sub punctul O; unim apoi punctul M cu A și A prin dreptele MBA și MA'B' (punctele B și B' fiind pe dreapta yOy'); dreptele obținute prin unirea punctelor C cu B și C' cu B' se întâlnesc în punctul căutat P. In adevăr, triunghiurile ABC și A'B'C' fiind omologice, cu centrul de omologie O, atunci laturile corespunzătoare se vor tăià în trei puncte M, N, P, situate pe o aceeași dreaptă, adică punctul P se va găsi pe dreapta MN, și după modul cum am ales construcția, va fi cuprins între aceste două puncte. Prin alegerea elementelor arbitrare din construcțiune, se poate obține pe deoparte trasarea de drepte mai scurte decât lun-

gimea riglei, iar pe de altă parte se poate obține o construcțiune așà fel ca punctul P să fie cât mai aproape de mijlocul segmentului MN.

2°. $l < a$. In cazul acesta, vom aveà de repetat de mai multe ori construcțiunea dela cazul precedent, cu observațiunea că rigla fiind prea scurtă, trasarea unei drepte arbitrare va trebui făcută prin mai multe așezări ale riglei (prin prelungire), iar unirea punctelor M cu A, M cu A', C cu B și C' cu B' se va face prin metoda dată, căutând a găsì puncte intermediare între punctele ce voim să le unim, bine înțeles dacă rigla dată e prea scurtă și nu putem să le unim direct; astfel se poate obține punctul P, cu ajutorul căruia apoi căutăm alte puncte intermediare $P_1P_2....P_n$ cuprinse între M și N, până când ajungem să trasăm dreapta MN prin unirea succesivă MP_1, $P_1P_2....P_n$ N.

Altă soluție. Referindu-ne la cazul când $a < l < 2a$, găsirea punctului P se poate obține prin următoarea construcțiune:

Trasăm două drepte arbitrare Δ și Δ', aproximativ normale pe MN și cât se poate mai aproape de mijlocul segmentului MN, una deoparte și cealaltă de altă parte. Se duce prin M deasupra și dedesubtul lui MN două drepte arbitrare MA'A și MC'C, care taie pe Δ și Δ' respectiv în punctele A', C' și A, C; unim punctul N cu A' cu C, prin dreptele NBA' și NCB' (punctul B pe Δ și B' pe Δ'); prin unirea punctelor A cu B' și B cu C' se obțin dreptele AB' și BC', care se taie în punctul căutat P, cu ajutorul căruia apoi trasăm dreapta MN prin unirea celor 2 segmente MP și PN. Aceeași observație ca și la prima soluție se poate face la alegerea elementelor arbitrare, pentru a puteà obține construcțiunea cea mai potrivită.

Punctele M, P și N sunt pe aceiași dreaptă, pe baza proprietății exagonului lui PASCAL AB'CC'BA'A, înscris în o conică (în cazul de față două drepte Δ și Δ'), ale cărui laturi opuse vor trebuì să se întâlniască în trei puncte în linie dreaptă.

Cazul când $l < a$ se tratează ca și la prima soluție.

D-nii: EUG. BALLAN, I. C. CIORĂNESCU, M. GEORGESCU, T. I. LĂZĂRESCU, FL. ȘT. LĂZĂRESCU, PAUL IONESCU, DORIN POPESCU, C. POPOVICI, L. WEISS și S. WEISS au indicat prima soluțiune fără să examineze cazul 2°.

D-nii: I. C. CIORĂNESCU, A. NOVAC și C. C. POPOVICI, au dat soluțiunea a doua, fără a examinà cazul $l < a$.

D-nii: D. Brătescu, I. C. Ciorănescu, M. Focşeneanu, I. I. Georgescu, Fl. Şt. Lăzărescu, P. Ionescu, M. Pătroianu, W. Solomon, C. S. Solacolu, P. Ţânţăreanu şi I. C. Vasiliu, au dat alte soluţiuni mai puţin simple, aplicând proprietăţi ale patrulaterului complet.

Formulele geometrografiei ne arată că soluţia II-a este mai simplă ca prima.

Notă. Problema fiind evident simplă în principiu, a fost tratată de foarte mulţi corespondenţi, însă mai mult de 60% dintre dânşii n'au ţinut seamă de elementul cel mai important al problemei, anume că nu li s'a pus la îndemână pentru trasarea acelei drepte decât o riglă mai scurtă decât distanţa dintre cele două puncte date. Astfel, unii dintre corespondenţi au presupus că rigla ar fi gradată şi ar puteà determina jumătăţi de segmente cu ea: alţii au dus paralele şi perpendiculare cu acea riglă, iar alţii au determinat chiar puncte conjugat armonice. Unul dintre corespondenţi a dat drept soluţie una ca aceasta: Se pleacă dela unul din punctele date cu o dreaptă trasată prin mai multe prelungiri cu rigla şi se observă deviarea acesteia faţă de al doilea punct. Corectăm direcţia acestei drepte, se începe cu alta la fel, care se va apropià mai mult de al doilea punct; prin mai multe încercări corespondentul nostru crede că se va ajunge ca dreapta astfel trasată să treacă prin amândouă punctele deodată. Aceasta nu poate fi o soluţie matematică.

PROBLEMA 3098. *Dacă ecuaţia*

$$A_0x^m+....+Ax^p+Bx^{p-1}+Cx^{p-2}+Dx^{p-3}+Ex^{p-4}+....+A_m=0,$$

are toate rădăcinile reale, coeficienţii A, B, C, D, E *a cinci termeni consecutivi, satisfac inegalitatea*

$$(AC-B^2)\,[4(BD-AE)^2+27(BE-DC)^2\,(AC-B^2)]>0.$$

Th. Angheluţă.

Soluţie dată de D-nii: Gh. P. Bogdan, Edgar Russu, Tib. Popoviciu.

Fie $E(x)$ partea întâi a ecuaţiei date. Să însemnăm cu $P(x)$ produsul dintre $E(x)$ şi trinomul

$$x^3+px+q.$$

Punând în evidenţă termenii în x^p şi x^{p-1} din acest produs, avem

$$P(x)=A_0x^{m+3}+....+(Aq+Bp+D)x^p+(Bq+Cp+E)x^{p-1}+....+A_mq.$$

Să determinăm cantităţile p, q, arbitrare până acuma, prin condiţiile de a anulă coeficienţii termenilor de gradul p şi $p-1$ din $P(x)$. Se obţine astfel sistemul

$$\begin{cases} Bp + Aq + D = 0 \\ Cp + Bq + E = 0, \end{cases}$$

care ne dă pentru p şi q, valorile

$$p = \frac{BD - AE}{AC - B^2}, \qquad q = \frac{BE - CD}{AC - B^2}.$$

In adevăr, nu putem aveà

$$AC = B^2,$$

căci ecuaţia

$$E(x) = 0,$$

ar aveà rădăcini imaginare [1]) contrar ipotezei.

Ecuaţia

$$P(x) = 0,$$

în care p şi q au valorile astfel determinate, având lipsă doi termeni consecutivi are două rădăcini imaginare. Rezultă că ecuaţia

$$x^3 + px + q = 0,$$

are o singură rădăcină reală.

Prin urmare avem

$$4p^3 + 27q^2 > 0.$$

Inlocuind p şi q prin valorile lor, se găseşte inegalitatea din enunţ.

Observare. D-l Tib. Popoviciu înmulţind ecuaţia dată prin

$$x^4 + px^2 + qx + r,$$

caută un rezultat analog pentru şase coeficienţi consecutivi, care însă nu se prezintă sub o formă simplă.

Dacă însă s'ar fi înmulţit prin

$$x^3 + ax^2 + bx + c,$$

şi dacă determinantul δ

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix},$$

1) Niewenglowski. Algèbre t. II, pag. 385.

este diferit de zero, a, b, c fiind dați de sistemul

$$Ac + Bb + Ca + D = 0$$
$$Bc + Cb + Da + E = 0$$
$$Cc + Db + Ea + F = 0,$$

între coeficienți există inegalitatea

$$(9c - ab)^2 - 4(3b - a^2)(3ac - b^2) > 0.$$

Dacă δ este nul și se înmulțește cu

$$x^2 + \alpha x + \beta,$$

α, β fiind dați de sistemul

$$\begin{cases} A\beta + B\alpha + C = 0 \\ B\beta + C\alpha + D = 0 \\ C\beta + D\alpha + E = 0, \end{cases}$$

trebuie să avem între coeficienți inegalitatea

$$\alpha^2 - 4\beta < 0.$$

TH. A.

PROBLEMA 3162. *Intr'o cunoscută nuvelă, citim următoarele :*

«După aceia, luând capetele, le așezară în mijlocul mesei, pe rând și cu rânduială, punând pe ale celor mai mici boeri dedesubt și pe ale celor mai mari deasupra, după neam și după ranguri, pânăce făcù o piramidă de 47 căpățâne, vârful cărora se încheià prin capul unui logofăt mare».

Este posibilă facerea unei asemenea piramide ?

DAVID GHEORGHE.

Enunțul nu spune dacă piramida este sau nu regulată. Evident că piramide formate așezând capetele în mod neregulat, sunt posibile.

Să ne ocupăm însă de cazul când piramida este regulată, caz care pentru noi poate prezentă oarecare interes.

Problema astfel pusă, este echivalentă cu problema așezării

unui număr de ghiulele de aceeaşi mărime, în formă de piramidă regulată.

Fie p numărul laturilor poligonului de bază, iar n numărul căpăţânelor aşezate dealungul unei laturi.

Numărul total al căpăţânelor aşezate într'un strat (de bază), în asemenea condiţiuni, este:

$$(\alpha) \qquad P_n^p = 1 + (p-2)\frac{n(n-1)}{2}$$

(A se vedeà J. TANNERRY „Leç. d'Aritm. VI-a ed. pag. 129)"

Stratul imediat superior va aveà $(n-1)$ căpăţâne aşezate dealungul unei laturi, astfel că numărul total de căpăţâni, care să formeze o piramidă regulată cu p laturi şi având câte n căpăţâne aşezate dealungul unei laturi a bazei, este

$$N = \sum_1^n \left[1 + (p-2)\frac{n(n-1)}{2}\right] = \frac{n[(n^2-1)(p-2)+6]}{6}.$$

Problema noastră se reduce dar, la găsirea soluţiilor întregi şi positive ale ecuaţiei

$$(1) \qquad n[(n^2-1)(p-2)+6] = 6.47.$$

Se vede că n este inferior parantezei pe care o înmulţeşte şi atunci, privind membrul al doilea, rezultă că el este inferior lui *47*, condiţie ce de altfel rezultă *a priori* din enunţ.

Egalitatea (1) având loc pentru numere întregi, se vede iarăşi că n nu poate fi decât unul din factorii membrului al doilea, inferiori lui *47*, adică 1, 2, 3, 6.

Să examinăm pe rând aceste valori.

$n = 1$. Egalitatea (1) devine

$$6 = 6.47,$$

care-i absurdă.

$n = 2$. Egalitatea (1) devine

$$2.[3.(p-2)+6] = 6.47$$
$$\therefore \qquad p = 47.$$

Aşà dar *piramida regulată cu 47 de căpăţâni este posibilă când poligonul de bază are 47 laturi;* în acest caz piramida e formată din două straturi, cel dela bază având *46* căpăţâne, cum rezultă şi din formula (α), iar al doilea o singură căpăţână.

$n = 3$. Egalitatea (1) devine

$$3[8(p-2)+6] = 6.47$$

$$\therefore \qquad p = 13.$$

Piramida regulată cu 47 căpăţâni este posibilă când poligonul de bază are 13 laturi; în acest caz, ea e formată din 3 straturi, cel dela bază având 34 căpăţâni, cel din mijloc 12, iar cel din vârf o singură căpăţână, după cum arată formula (α).

$n = 6$. Egalitatea (1) devine

$$6[35(p-2)+6] = 47.6$$

$$\therefore \qquad 35p = 111,$$

care ne dă valoare întreagă pentru p.

Răspunsul la întrebarea din enunţ este astfel, afirmativ.

Notă. La această problemă s'au trimis multe soluţiuni. Nici un corespondent însă nu a tratat chestiunea în general, ca mai sus. Mai toţi s'au mulţumit cu cercetarea cazurilor extrem de particulare ale piramidelor regulate, triunghiulare, patratice, dreptunghiulare.

Singurul care a studiat toate cazurile particulare pânăla piramida cu 9 laturi, servindu-se de formula (α) este d-l N. Botea (Elev Cl. VIII Lic. Cantemir). Puţină atenţie şi mai puţină grabă, l'ar fi condus poate, la soluţiunea ce am dat mai sus.

S'au ocupat de cazurile piramidelor triunghiulare, patratice şi dreptunghiulare, D-nii: Tr. Angelescu, C. Ciorănescu, P. Ionescu, V. Manafu, M. Pătroianu, C. Popovici, Dan Popovici, Gh. Simionescu, B. Vulpanovici, A. Zamfirescu, I. Georgescu-Racoviţa şi I. Vasiliu.

S'au ocupat de cazurile piramidei triunghiulare sau patratice, D-nii: M Adam, N. Mihăilescu, V. Novacu, Dorin Popescu, R. Spathy, N. Teodorescu şi V. Vârlan.

Soluţia D-lui N. Teodorescu (Elev Lic. Spiru Haret), toată presărată cu figuri literare şi consideraţiuni ironice la adresa personagiilor timpului, este totuşi prea puţin matematică.

Qui trop embrasse.....

Nu ne-am ocupat de cazul piramidei dreptunghiulare, întrucât o asemenea piramidă nu se termină cu un singur cap.

M. G.

PROBLEMA 3297. *Fie* l_a, l_b, l_c *lungimile transversalelor unghiulare* AD_a, BE_b, CF_c *care trec prin punctul lui* NAGEL *al unui triunghiu* ABC. *Să se demonstreze că între elementele triunghiului, avem relaţiunea*

$$\frac{l_a^2}{r_a h_a} + \frac{l_b^2}{r_b h_b} + \frac{l_c^2}{r_c h_c} = \frac{4R}{r} - 5.$$

OVIDIU G. POPEA.

Soluţie dată de D-nul IOAN T. POPOVICI.

Să însemnăm cu D_a, E_a, F_a punctele de contact ale cercului exînscris în unghiul A cu laturile BC, CA, AB. Avem

$$CD_a = CE_a = AE_a - AC = p - b.$$

Analog avem $BD_a = p - c.$

Aplicând triunghiului ABC, tăiat de transversala AD_a, teorema lui STEWART, avem:

$$\overline{AC}^2 . BD_a + \overline{AB}^2 . CD_a - BC . CD_a . BD_a = BC . \overline{AD}_a^2$$

$$\therefore \quad b^2(p-c) + c^2(p-b) - a(p-b)(p-c) = a . l_a^2$$

$$\therefore \quad \frac{l_a^2}{r_a h_a} = \frac{1}{2S^2}[b^2(p-c)(p-a) + c^2(p-a)(p-b) - a(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\sum \frac{l_a^2}{r_a h_a} = \frac{1}{S^2}[\Sigma a^2(p-b)(p-c) - p(p-a)(p-b)(p-c)]$$

$$\sum \frac{l_a^2}{r_a h_a} = \frac{1}{S^2} \sum a^2(p-b)(p-c) - 1.$$

Avem însă, succesiv:

$$\Sigma a^2(p-b)(p-c) = abc \, \Sigma a \sin^2 \tfrac{1}{2} A = 2RS \, \Sigma a(1 - \cos A)$$

$$= 2RS(2p - \Sigma a \cos A) = 2RS(2p - R \, \Sigma \sin 2A)$$

$$= 4RS(p - 2R \sin A \sin B \sin C).$$

$$\therefore \quad \Sigma a^2(p-b)(p-c) = 4RS\left(p - \frac{abc}{4R^2}\right) = 4RS\left(p - \frac{S}{R}\right),$$

$$\therefore \quad \Sigma a^2(p-b)(p-c) = 4Sp(R-r).$$

Vom aveà deci:

$$\sum \frac{l_a^2}{r_a h_a} = \frac{1}{S} \cdot 4p(R-r) - 1 = \frac{4}{r}(R-r) - 1,$$

$$\therefore \quad \sum \frac{l_a^2}{r_a h_a} = \frac{4R}{r} - 5.$$

Au dat bune soluţii şi D-nii: C. C. POPOVICI, V. DORNEANU şi AL. C. FLOREA (Elevi Liceul Internat, Iaşi) şi GH. M. CĂLIN (Liceul din Caracal).

D-nii: T. STOICESCU, C. I. PILAT şi AVRAM LUPU (Elevi Liceul Internat, Iaşi), au dat bune soluţii analoage cu cea de mai sus, dar mai puţin dezvoltate.

D-nii: GRIGORE MAREŞ (Elev Liceul Bacău), N. BOTEA şi I. C. VASILIU au rezolvat problema cu ajutorul coordonatelor baricentrice.

PROBLEMA 3306. *Dacă transversalele unghiulare* AO, BO, CO *din planul unui triunghiu* ABC *întâlnesc laturile opuse ale triunghiului respectiv în punctele* A_1, B_1, C_1, *avem relaţiunea*

$$\frac{OA_1}{AA_1}\left[\frac{AB}{BC_1} + \frac{AC}{CB_1}\right] + \frac{OB}{BB_1}\left[\frac{BC}{CA_1} + \frac{BA}{AC_1}\right] + \frac{OC}{CC_1}\left[\frac{CA}{AB_1} + \frac{CB}{BA_1}\right] = 4.$$

CONST. C. POPOVICI.

1. *Soluţie* dată de D-nii: OZIAS M. SCHÄCHTER şi ION C. VASILIU.

Figura formată ne dă

$$\frac{AB}{BC_1} + \frac{AC}{CB_1} = \frac{AC_1}{BC_1} + \frac{AB_1}{CB_1} + 2.$$

Dar, după teorema lui VAN AUBEL, avem:*)

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{BC_1} + \frac{AB_1}{CB_1}.$$

Egalitatea precedentă devine deci

$$\frac{AB}{BC_1} + \frac{AC}{CB_1} = \frac{AO}{OA_1} + 2 = \frac{AA_1}{OA_1} + 1.$$

*) A se vedeà: *Exercices de Géométrie*, par F. G.—M. sixième éd., p. 547, question 1242 j.

Avem prin urmare

$$\frac{OA_1}{AA_1}\left[\frac{AB}{BC_1}+\frac{AC}{CB_1}\right]=\frac{OA_1}{AA_1}\left[\frac{AA_1}{OA_1}+1\right]=1+\frac{OA_1}{AA_1}.$$

Acest rezultat ne arată că prima parte a relației propuse este egală cu

$$3+\left(\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}\right)=4,$$

căci, după teorema lui CEVA, paranteza este egală cu 1.

2. *Soluție* dată de D-nii: CONST. T. IONESCU-BUJOR (Elev Lic. Cantemir-Vodă), CONST. I. PILAT, AVRAM LUPU și TH. STOICESCU (Elevi Lic. Internat, Iași), N. G. BOTEA, VIRGIL RÂPEANU (Lic. Internat, Iași), GRIGORE MAREȘ (Lic. Bacău), D. G. NESTOR și ANDREI T. IONESCU-BUJOR (Elevi Lic. Cantemir-Vodă), AL. C. FLOREA, TOMA I. PUȘCĂ.

Fie α, β, γ coordonatele baricentrice ale punctului O. Se știe că avem:

$$\frac{OA_1}{AA_1}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},\quad \frac{OB_1}{BB_1}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma},\quad \frac{OC_1}{CC_1}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma};$$

$$\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{\beta}{\alpha},\quad \therefore\quad \frac{AB}{BC_1}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha},$$

$$\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \therefore\quad \frac{AC}{CB_1}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha},\ \text{etc.}$$

Vom avea deci:

$$\frac{OA_1}{AA_1}\left[\frac{AB}{BC_1}+\frac{AC}{CB_1}\right]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Acest rezultat ne arată că prima parte a relației propuse este egală cu

$$\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}=4.$$

3. D-nii: GH. M. CĂLIN (Elev Cl. VI, Lic. Caracal), N. I. MANOLESCU, GH. V. NICOLESCU și AUREL POPOVICI (Elevi Lic. Unirea, Focșani) și I. TH. POPOVICI au dat bune soluții cu ajutorul teoremei lui MENELAUS.

Notă. D-l N. G. Botea arată că problema se poate extinde la tetraedru cu următorul enunț:

Se consideră un punct M *în interiorul unui tetraedru* $A_1A_2A_3A_4$. *Dreptele ce unesc punctul* M *cu vârfurile tetraedrului, întâlnesc fețele opuse în* A'_1, A'_2, A'_3, A_4. *Dreptele* $A_1A'_2$, $A_1A'_3$, $A_1A'_4$ *întâlnesc respectiv dreptele* A_3A_4, A_2A_4, A_2A_3 *în punctele* B_{12}, B_{13}, B_{14} *și analog obținem alte puncte* B_{23}, B_{24}, etc. *Avem relația:*

$$\sum \frac{MA'_1}{A_1A'_1}\left[\frac{A_1A'_2}{A'_2B_{12}}+\frac{A_1A'_3}{A'_3B_{13}}+\frac{A_1A'_4}{A'_4B_{14}}\right]=6.$$

PROBLEMA 3326. *Să se demonstreze că funcțiunea*

$$y=\log a$$

este continuă pentru toate valorile lui x, *afară de una.*

Locot.-Col. Gh. Buicliu.

I. *Soluție* dată de D-nii: C. C. Popovici (Lic. Internat, Iași); V. Manafu (Lic. Mânăstirea Dealului); D. Nistor (Lic. Cantemir); I. C. Vasiliu și L. Căldăraru.

Aplicând o relație cunoscută avem

$$y=1/\log_a x.$$

Numitorul este o funcție continuă cunoscută, care nu se anulează decât pentru $x=1$. Deci y devine ∞ pentru $x=1$.

II. *Soluție* dată de D-nii: D. Nistor (Lic. Cantemir); N. Teodorescu (Lic. Spiru Haret); I. Miu (Lic. Caracal); I. P. Nicolaescu (Lic. Roman Vodă) și O. Schächter.

Dăm lui x o creștere h. Fie k creșterea corespunzătoare a lui y. Avem

$$(1)\qquad k=\log_{x+h}a-\log_x a,$$

însă $$\log_{x+h}a=\frac{1}{\log_a(x+h)},\quad \text{și}\quad \log_x a=\frac{1}{\log_x x}$$

așă că (1) devine

$$k=\frac{1}{\log_a(x+h)}-\frac{1}{\log_a x}=\frac{\log_a x-\log_a(x+h)}{\log_a x\,.\,\log_a(x+h)}$$

$$\therefore\qquad k=\frac{\log_a\dfrac{x}{x+h}}{\log_a x\,.\log_a(x+h)}.$$

Sub această formă se vede că la limită avem

$$\lim h = \varepsilon$$

şi deci $$\lim k = \frac{\log_a \frac{x}{x+\varepsilon}}{\log_a x \,.\, \log_a (x+\varepsilon)}.$$

Numitorul se anulează pentru

$$\log_a x = 0 \qquad \therefore \qquad x = 1.$$

Deci se ajunge tot la concluzia dela soluţia întâi.

Au mai rezolvat problema şi D-nii: S. KATZ, H. MARCOVICI (Lic. Laurian); V. DORNEANU şi A. FLORESCU.

PROBLEMA 3376. *Care este condiţia ca rădăcinile ecuaţiei*

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

să formeze o proporţie?

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: V. DORNEANU, T. HULUBEI, A. LUPU, D. I. POPESCU, C. C. POPOVICI, T. I. PUŞCĂ, V. RĂŞCANU şi E. C. RUSSU (Lic. Internat, Iaşi); C. D. SEGÂRCEANU (Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova); E. S. IACOB şi S. KATZ (Lic. Botoşani); C. N. DRÂMBĂ (Lic. Galaţi); L. BRÜLL (Lic. Cantemir, Bucureşti); R. GEORGESCU (Lic. Lazăr, Bucureşti); C. N. POPESCU (Giurgiu); M. N. VASILIU (Piatra); E. GH. GAIU, GH. D. SIMIONESCU.

Fie x_1, x_2, x_3, x_4 cele patru rădăcini ale ecuaţiei date. Se cunosc relaţiile:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p, \tag{1}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = q, \tag{2}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -r, \tag{3}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = s, \tag{4}$$

şi se cere ca:

$$x_1 / x_2 = x_3 / x_4,$$

$$x_1 x_3 = x_2 x_4. \tag{5}$$

Din (4) şi (5), se scoate:

$$(x_1 x_3)^2 = (x_2 x_4)^2 = s$$

$$x_1 x_3 = x_2 x_4 = \pm \sqrt{s}. \tag{6}$$

Inlocuind în (3) găsim:

$$\pm \sqrt{s}\,(x_2 + x_1 + x_4 + x_3) = -r,$$

şi ţinând seamă de (1) avem

$$\mp p\sqrt{s} = -r$$

$$p^2 s = r^2. \qquad (7)$$

Aceasta este condiţia căutată.

PROBLEMA 3381. *Se scrie un patrat de trei cifre cu mâna şi se întoarce foaia cu 180° în planul ei. Numărul care se citeşte acum este tot patrat perfect. Problema analoagă pentru numerele de patru cifre.*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: I. I. Iliuţă-Dăbuleni, I. I. C. Brezuica, E. N. Albeaţă, P. Şerban, I. C. Moisil, M. B. Marinaş, S. Weiss, C. N. Drâmbă, D. Haim, T. G. Cocea, I. D. Zamfir.

Cifrele, care după întoarcerea hârtiei rămân tot cifre, sunt numai 0, 1, 6, 8, 9. Nu putem lua pe 0 la urmă, căci prin întoarcere ese la început. Cu aceste cifre grupele de două cifre care pot termină un patrat sunt 16; 96; 69; 89; 61; 81. Scriem înainte una din cifrele 1; 6; 9 şi extragem rădăcina patrată. Găsim numai patratele 169; 196; 961. Dintre acestea numai ultimele două rămân patrate prin întoarcerea foaei. Deci avem soluţiile *196* şi *961*.

Pentru numerele de patru cifre vom scrie înaintea celor şase grupe de două cifre, care pot termină patratele, pe fiecare din acele numere întoarse cu 180°, adică pe 91; 96; 69; 68; 19; 18; şi scoatem rădăcina numerelor formate. Se găseşte singurul patrat 6889 care se reproduce prin învârtire.

Observaţiuni. 1. Printre numerele de cinci cifre avem numai soluţia *9.6916*

Istinie I. C. Brezuica, I. I. Iliuţă-Dăbuleni,
Ermil N. Albeaţă.

2. Pânăla 1.000.000 nu există cuburi în condiţiunile problemei.

I. I. Iliuţă-Dăbuleni.

EXERCIŢII

30. Să se găsiască patratele de cinci cifre, la care cifrele extreme este cifra mijlocie a rădăcinii lor patrate.

ISTINIE I. C. BREZUICA.

R. Dacă prima cifră a patratului este 1, rădăcina va fi coprinsă între 100 şi 142. Ea însă trebuie să aibă 1 la mijloc şi să dea patrat terminat cu 1. De aci soluţiile $111^2 = 12321$ şi $119^2 = 14161$. Procedând analog se găseşte că nu există patrate începând cu 4 şi cu 5, că avem soluţia $264^2 = 69696$ începând cu 6 şi că nu sunt soluţii începând cu 9.

31. După un număr de o cifră scrim de două ori patratul lui. In ce caz numărul de cinci cifre astfel format este patrat perfect?

GH. M. CĂLIN.

R. Dintre numerele 41616, 52525, 63636, 74949, 86464 şi 98181 numai primul este patratul lui 204.

32. Care sunt patratele de cinci cifre la care primele trei cifre sunt numere prime consecutive?

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

R. Se formează un număr de trei cifre cu cifrele reprezentând trei numere consecutive, se extrage rădăcina patrată şi se caută ce grupă de două cifre să se mai adaoge la dreapta, pentru a eşi o rădăcină exactă de trei cifre. Se găsesc astfel patratele $12321 = 111^2$ şi $35721 = 198^2$ cu primele trei cifre in ordinea crescândă; că nu se pot formă patrate cu primele trei cifre în ordinea descrescândă, şi că mai avem soluţiile $13225 = 115^2$, $21316 = 146^2$, $23104 = 152^2$.

33. Se cer două patrate consecutive de forma *abcab* şi *abdba*.

N. I. MANOLESCU.

R. Grupele de două cifre care pot termină patrate consecutive şi care să fie unul răsturnatul altuia sunt 69 şi 96. Intre 69000 şi 69999 sunt patratele numerelor 263 şi 264 şi anume 69169 şi 69696, care se vede că corespund enunţului. Intre 960000 şi 96999 sunt patratele numerelor 310 şi 311, care nu corespund, căci se termină cu 0 şi 1.

34. Dacă R' şi r' sunt razele cercului circumscris şi inscris triunhgiului ortic al unui triunghiu, avem relaţia

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \frac{r'}{2R'}.$$

OCTAV H. BURSTIN.

R. Avem $\sum \cos^2 A = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$, iar din „Culegere de Probleme", Trigonometria XIX. 13, avem $R = 2R'$, $r' = 2R \cos A \cos B \cos C$, etc.

PROBLEME PROPUSE.

3391. Care este poligonul cu cel mai mic număr de laturi, la care numărul liniilor care unesc toate vârfurile câte două, este un patrat perfect?

I. Ionescu.

3392. Să se găsiască un patrat perfect de 4 cifre, ştiind că dacă i se schimbă între ele ultimele 2 cifre se obţine un cub perfect.

Locot.-Col. Gh. Buicliu.

3393. Se cer patratele de trei cifre, la care ultima cifră este suma cifrelor rădăcinii lor.

I. I. Iliuţă-Dăbuleni.

3394. Intr'un triunghiu oarecare ABC fie A_1, B_1, C_1 şi A_2, B_2, C_2 picioarele înălţimilor şi medianelor corespunzătoare respectiv laturilor BC, CA, AB. Se consideră intersecţiile $M \equiv (A_1B_2,\ A_2B_1)$, $N \equiv (B_1C_2,\ B_2C_1)$, $P \equiv (C_1A_2,\ C_2A_1)$. Să se demonstreze că punctele M, N, P se află pe dreapta lui Euler a triunghiului. Să se generalizeze.

Ion C. Vasiliu.

3395. Fie ABC un triunghiu oarecare, H ortocentrul, O centrul cercului circumscris şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor sale. Fie A_2,B_2,C_2 intersecţiile (AO, HA_1), (BO, HB_1), (CO, HC_1) şi P_a , P_b , P_c intersecţiile (AH, B_2C_2), (BH, C_2A_2), (CH, A_2B_2). Să se demonstreze că:

1. Triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ sunt egale şi înscrise în acelaş cerc;

2. Dreptele A_2P_a , B_2P_b , C_2P_c concură în reciprocul ortocentrului triunghiului $A_2B_2C_2$.

Const. I. Georgescu şi Adrian Buşilă.

3396. Fie φ punctul lui FEUERBACH al unui triunghiu oarecare ABC. Notațiunile fiind cele obișnuite, să se demonstreze relațiile:

$$4(\varphi A^2+\varphi B^2+\varphi C^2)=a^2+b^2+c^2$$
$$+\frac{R}{R-2r}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

$$(b-c)^2\varphi A^2+(c-a)^2\varphi B^2+(a-b)^2\varphi C^2$$
$$=(b-c)^2(p-a)^2+(c-a)^2(p-b)^2+(a-b)^2(p-c)^2.$$

V. CRISTESCU.

3397. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^4-y^4=10^n.$$

E. ȘTEFĂNESCU.

3398. Să se demonstreze că ecuația

$$x^4-\frac{a^4-b^4}{2}x^3+\left[\frac{(a^4-b^4)^2}{16}-\lambda^2(a-b)^2\right]x^2$$
$$+\frac{(a-b)^5(a+b)\lambda^2}{6}x-\frac{(a+b)^2(a-b)^6\lambda^2}{144}=0,$$

are toate rădăcinile reale.

D. V. IONESCU.

3399. Să se demonstreze că în orice triunghiu avem

$$a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A+b\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B+c\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\leqslant 2(a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A+b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B+c\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C).$$

EMIL ȘTEFĂNESCU.

3400. Fie (C) conica de intersecție a unei cuadrice [Q] cu un plan tangent la o cuadrică [Q'] în punctul variabil M. Să se afle locul polarei punctului M în raport cu conica (C), când planul tangent trece printr'un punct fix.

N. ABRAMESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam R. (3289, 347, 69, 74, 80, 86); *Bălășescu N. C.* (P); *Blumen M.* (3369); *Braester I. D.* (3367, 69, 74, 80); *Călin G.* (3319, 27, 39, 69, 74, 80); *Cernes A. M.* (3301, 67, 69, 74, R); *Cocea Gh. Th.* (3301, 74, E); *Constantinescu Angelica* (3301); *Cristescu I. C.* (R); *David Haim* (3339, 47, 67, 69, 80, 86); *Dermer M.* (3369); *Diaconescu V. Th.* (3347, 69); *Dorneanu V.* (3347, 69); *Florea C. Al.* (3327, 39, 46, 47, 67, 69); *Foca I.* (3347); *Focșeneanu M.* (N); *Ghelber M.* (R); *Gaiu Em.* (3337, 74, P); *Galaianțu V. B.* (3369); *Georgescu I. Răducanu* (3380, P); *Gheorghiu Gh.* (3218); *Grünstein E.* (3218, 301); *Hulubei T.* (3327, 39, 52, E); *Iacob Șt. Eugen* (P); *Iliuță-Dăbuleni I.* (3301, R); *Ioachim Gr.* (3380); *Ionescu A. R.* (R); *Iscovici Paul* (3339, 47); *Istinie I. C. Brezuica* (3369, 74, C, R); *Lupescu V. E.* (3339, 47); *Lupu A.* (3345); *Mariș Marius* (3347, 52, 69, 80); *Manoil-Roman A.* (2929, 3369); *Munteanu Gh.* (3347, 69); *Nestor D.* (3374); *Nicolau V. Gh.* (3369); *Nicolau-Dobridor I.* (3369, P); *Popescu N. Corneliu* (3327, 39, 47, 67, 69, 80, N, P, R); *Popescu I. D.* (3301); *Popovici C. C.* (3327, 39, 47, 52, 69, 80, N, R); *Potopeanu G.* (3339, 47); *Pușcă I. T.* (3345, 69); *Rabinovici H.* (3369); *Râpeanu V.* (3345, 69, P); *Roșculeț V. A.* (3345, 69); *Russu C. E.* (3301); *Schileru D.* (3352); *Segal L.* (3347, 52, 69); *Segârceanu C.* (3369); *Simionescu D. G.* (3327, 39); *Spacu G. P.* (3289, 369); *Spathy René* (3327, 37, 39, 47, 80, P, R); *Ștefănescu Em.* (P); *Stoicescu T.* (3369); *Tailer G.* (3327, 39, 74, 75, 80, 86); *Teodorescu N.* (3327, 39, 46, 47, 73, 80, 86); *Vasiliu M.* (P); *Weisbuch M. Al.* (3339); *Weiss Solomon* (3345, 74, N); *Zaharia O. I.* (3347, 69, 80).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1424, 656, 2347, 643, 829, 79, 972, 3017, 92, 216, 26, 33, 48, 52, 58, 59, 62, 70, 79, 82, 99, 303, 11, 12, 17, 21, 26, 28, 32, 33, 34, 42, 44, 52, 53, 54, 59, 62, 63, 65, 66, 71, 72, 73, 77, 78, 82, 83, 84, 87 și 89 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu**, *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită*, 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu**, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* . *(Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu**, (adresa: Str. Basarabia, 45, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.

Mb Asociațiunea pt. Cultura și Literatura Poporului Român
Sibiiu

GAZETA MATEMATICA

: ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.

ĂRUL 8. — APRILIE 1926.

BIBLIOTECA CENTR. ASOCIAȚIUNII SIBIIU

SUMARUL

1. ...zibilitate în cazul unei ... de numerație oarecare . . . . . *Col. C. Felix.*
2. Asupra unor clase de ecuațiuni, având cel mult o rădăcină reală . . . . . *A. Angelescu.*
3. Proprietăți ale curbelor plane . . . . . *Miron Niculescu.*
4. Note Matematice: 38—46.
5. Bibliografii.
6. Cereri.
7. Chestiuni de examen.
8. Probleme rezolvate: 3337, 3346, 3367, 3375, 3386.
9. Exerciții: 35—50.
10. Probleme propuse: 2602, 2696, 3401—3410.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1926

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu**, Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci**, Inginer Inspector General, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu**, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 85, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 64, 75, 76, 78, 79, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 25, 30, 33, 35, 41, 43, 44, 50, 54, 60, 61, 64, 71, 72, 78, 79, 85, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 96, 97, 98, 400, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „Gazeta Matematică“ (Fabrica de Chibrituri din Bucureşti), cu preţul de 12 lei.

CONDIȚIUNI DE DIVIZIBILITATE IN CAZUL UNEI BAZE DE NUMERAȚIE OARECARE.

Deși chestiuni de această natură s'au mai tratat, totuși le găsim interesante pentru elevii de clasa V liceală, și de aceea le dăm aci.

Fie un număr $A = hklmn$, în care h, k, l, m, n, sunt numere întregi, într'o bază de numerație b. El nu exprimă un monom, ci exprimă numărul

$$hb^4 + kb^3 + lb^2 + mb + n. \qquad (1)$$

Este bine înțeles că h, k, l, m și n sunt fiecare mai mici decât baza.

Divizibilitatea cu 2. Dacă baza b este pereche, se înțelege că orice număr cu soț se termină cu o cifră pereche; întocmai cum se întâmplă în numărătoarea noastră cu baza 10.

Dacă însă baza este fără soț, atunci avem șiruri de numere pereche consecutive, care se termină cu cifre soț și altele care se termină cu cifre fără soț și la fel pentru numerele fără pereche. Trebue să căutăm atunci criteriul parităței.

Punând $b = 2p + 1$, avem în exemplul nostru:

$$A = 2^4hp^4 + 2^3kp^3 + 2^2lp^2 + 2mp + (h + k + l + m + n) + \mathcal{M}2.$$

Vedem că numărul A va fi pereche sau nepereche, după cum suma cifrelor lui va fi cu sau fără soț.

Divizibilitatea cu 4. Dacă baza este pereche, expresia (1) ne arată că primii 3 termeni vor fi neapărat divizibili cu 4; dacă suma ultimelor 2 termeni, anume $mb + n$ va fi divizibilă cu 4, atunci întregul număr A va admite acest divizor. Regăsim iarăși condiția cunoscută din numărătoarea noastră obișnuită.

Dacă baza este fără soț, atunci este de forma:

$$\mathcal{M}4 \pm 1.$$

In cazul $b = \mathcal{M}4 + 1$, înlocuind în (1) pe b cu această valoare, găsim că:

$$A = \mathcal{M}4 + (h + k + l + m + n),$$

și A va fi deci multiplu de 4 dacă suma cifrelor lui va fi divizibilă cu 4.

Dacă $b = \mathcal{M}4 - 1$, vom găsi:

$$A = \mathcal{M}4 + (h - k + l - m + n),$$

şi dacă paranteza va fi divizibilă cu 4 şi numărul A va fi divizibil cu 4. Trebuie să facem deci suma cifrelor, atribuindu-le alternativ semnul + şi —; dacă rezultatul va fi divizibil cu 4, atunci numărul dat A va fi şi el divizibil cu 4.

Divizibilitatea cu 3. Avem fie $b = \mathcal{M}3$, fie $b = \mathcal{M}3 \pm 1$.

In cazul când baza este multiplu de 3, vedem imediat din expresia (1) că numărul A va fi divizibil cu 3, atunci când ultima sa cifră va fi divizibilă cu 3.

In cazul când $b = \mathcal{M}3 \pm 1$, regăsim aceleaşi condiţiuni ca pentru divizibilitatea cu 4, anume ca suma cifrelor, respectiv suma cifrelor luate alternativ cu semnul + şi cu — să fie divizibile cu 3.

Divizibilitatea cu 5. Când baza este divizibilă cu 5, atunci numărul A va fi multiplu de 5, dacă ultima sa cifră va fi divizibilă cu 5.

Dacă b nu este multiplu de 5, atunci are forma

$$\mathcal{M}5 \pm 1 \quad \text{sau} \quad \mathcal{M}5 \pm 2.$$

După raţionamentul precedent, în caz că $b = \mathcal{M}5 \pm 1$, regăsim aceeaşi lege ca şi pentru divizibilitatea cu 3 şi cu 4.

Dacă $b = \mathcal{M}5 \pm 2$, atunci găsim că suma

$$2^4h + 2^3k + 2^2l + 2m + n,$$

respectiv suma: $2^4h - 2^3k + 2^2l - 2m + n$, să fie divizibilă cu 5.

Criteriile încep a deveni mai complicate şi devin din ce în ce mai complicate, după cum căutăm condiţiile de divizibilitate cu un număr mai mare.

Pentru numerele 6, 8, 12 va fi suficient ca, după cazuri, să fie divizibile cu 2, sau cu 3, sau chiar cu 6; cu 2, sau cu 4 sau chiar cu 8; cu 3, sau cu 4 sau chiar cu 12, cele 2 sume formate luând toate cifrele cu plus, sau luându-le alternativ cu plus şi cu minus, sau ca să fie divizibilă numai una din acele sume.

Divizibilitatea printr'un divizor al bazei. Un număr A va fi divizibil printr'un divizor al bazei, dacă ultima sa cifră va fi zero sau un multiplu al acelui divizor. Lucrul se vede imediat din expresia (1).

Cazul general. Să căutăm divizibilitatea numărului A printr'un număr $d = pb + r.$ (2)

Din (2) rezultă $b = (d - r)/p$, care este bine înțeles un întreg.

Inlocuind pe b în (1) prin această valoare, avem:

$$A = \frac{Md + hr^4 - pkr^3 + lp^2r^2 - mp^3r + np^4}{p^4}$$

și numărul A va admite deci pe d ca divizor, dacă suma

$$hr^4 - kpr^3 + lp^2r^2 - mp^3r + np^4$$

va fi divizibilă cu d.

Negreșit nu recomandăm aplicarea acestei formule în toate cazurile, de oarece în practică ar da loc la operațiuni mai complicate decât o diviziune directă.

Dăm însă un exemplu:

Fie numărul 32045 în baza de numerație 7, să vedem dacă este divizibil cu numărul 23, în aceeași bază. O diviziune directă, pentru cel ce nu ar fi deprins a face operațiuni aritmetice, în această bază, va fi poate anevoioasă, de aceea vom încercà formula.

Trebuie ca să căutăm deci dacă numărul

$$3 \times 3^4 - 2 \times 2 \times 3^3 - 4 \times 2^3 \times 3 + 5 \times 2^4$$

este divizibil cu 23.

Termenii $3 \times 3^4 = 465$ și $5 \times 2^4 = 143$

$2 \times 2 \times 3^3 = 213$ și $4 \times 2^3 \times 3 = 165.$

Deci suma termenilor pozitivi fiind 641

și a celor negativi 411

Avem diferența 230

care este divizibilă cu 23, deci numărul dat este divizibil cu 23.

Spre verificare, putem traduce acest calcul în numere cu baza de 10.

In această bază, numărul 32045 devine:

$$3 \times 7^4 + 2 \times 7^3 + 4 \times 7 + 5 = 7203 + 686 + 28 + 5 = 7922,$$

iar numărul 23 devine 17.

Ori vedem imediat că 7922 este divizibil cu 17, dând câtul 466.

Col. C. Felix.

ASUPRA UNOR CLASE DE ECUAȚIUNI, AVÂND CEL MULT O RĂDĂCINĂ REALĂ.

In cele ce urmează, vom determină natura rădăcinilor unor polinoame și a unor funcțiuni întregi, utilizând numai o proprietate elementară a integralelor definite și anume: integrala

$$\int_a^b f(x)dx,$$

nu poate să fie nulă dacă funcția $f(x)$ păstrează același semn pentru toate valorile lui x din intervalul (a, b).

1. Să considerăm polinomul $P_n(x)$, de gradul n în x, reprezentat prin integrala

$$(1) \qquad P_n(x) = \int_a^b k(a)\,(x-u)^n\,du,$$

unde funcția $k(u)$ păstrează același semn în intervalul de integrare. Acest polinom nu poate avea decât cel mult o rădăcină reală. In adevăr, dacă n este par, $(x-u)^n$ este pozitiv și deci integrala (1) nu se poate anulă pentru nici o valoare a lui x. Dacă n este impar, cum derivata lui $P_n(x)$ nu poate avea nici o rădăcină reală, urmează că $P_n(x)$ are o singură rădăcină reală r. Această rădăcină este cuprinsă în intervalul (a, b), căci dacă r ar fi în afară de intervalul (a, b), atunci $(r-u)^n$ ar păstrà un semn constant în intervalul de integrare și integrala $P_n(r)$, nu ar puteà fi nulă.

Aplicații. I. Să considerăm polinomul

$$\int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^{\mu-1}(x-u)^n du,$$

unde λ și μ sunt două numere pozitive. Inlocuind pe $(x-u)^n$ prin dezvoltarea sa și ținând seama de egalitatea

$$\int_0^1 u^{\lambda+k-1}(1-u)^{\mu-1}du$$

$$= \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)\ldots(\lambda+\mu+k-1)} \int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^{\mu-1}du,$$

deducem, din cele stabilite, că ecuația

$$x^n - C_n^1 \frac{\lambda}{\lambda+\mu} x^{n-1} + C_n^2 \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)} x^{n-2} - \ldots = 0,$$

unde λ și μ sunt numere pozitive, are toate rădăcinile imaginare, dacă n este par și o singură rădăcină reală (pozitivă și mai mică decât unitatea), dacă n este impar.

II. Polinomul

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} (x-u)^n \, du,$$

ne conduce, ținând seama de formula bine cunoscută

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{a+k-1} du = a(a+1)\ldots(a+k-) \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} \, du,$$

la propoziția următoare: Ecuația

$$x^n - C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a(a+1) x^{n-2} - \ldots = 0,$$

unde a este un număr pozitiv, are toate rădăcinile imaginare, dacă n este par și o singură rădăcină reală (pozitivă), dacă n este impar.

2. Să reluăm polinomul $P_n(x)$ reprezentat prin integrala (1) și să considerăm ecuația

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta \varphi(u) P_n(x+u) du = 0,$$

unde funcția $\varphi(u)$ păstrează același semn în intervalul (α, β). Această ecuație nu poate avea nici o rădăcină reală, dacă n este par, căci $P_n(r+u)$ păstrează același semn oricare ar fi r. Dacă n este impar, derivata integralei (2), este

$$n \int_\alpha^\beta \varphi(u) P_{n-1}(x+u) \, du,$$

integrală care nu se poate anulă pentru nici o valoare reală a lui x. Deci, în acest caz ecuația (2) are o singură rădăcină reală.

Ţinând seama că

$$P_n(x+u) = P_n(x) + \frac{u}{1} P_n^1(x) + \ldots + \frac{u^n}{n!} P_n^{(n)}(x)$$

şi că

$$P_n^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)P_{n-k},$$

vedem că ecuaţia (2) se mai poate scrie sub forma

$$a_0 P_n(x) + C_n^1 a_1 P_{n-1}(x) + C_n^2 a_2 P_{n-2}(x) + \ldots = 0,$$

unde

$$a_k = \int_\alpha^\beta \varphi(u) u^k \, du.$$

Putem lua, spre exemplu,

$$a_k = \int_0^1 u^k \, du = \frac{1}{k+1}.$$

3. Tot în legătură cu polinomul (1), să mai considerăm ecuaţia

$$\int_\alpha^\beta \varphi(a) P_n(ux) du = 0,$$

unde $\varphi(a)$ nu schimbă de semn în intervalul (α, β), *limitele* α *şi* β *având acelaş semn.* Această ecuaţie nu poate avea decât o singură rădăcină reală şi anume, când n este impar. Acest lucru se vede imediat, căci ecuaţia derivată

$$\int_\alpha^\beta \varphi(a) u P_{n-1}(ux) dx = 0,$$

nu poate avea nici o rădăcină reală pentru n impar, deoarece şi u păstrează acelaş semn în intervalul de integrare.

4. Vom indică acum o clasă de funcţiuni întregi, care nu se pot anulă pentru nici o valoare reală a variabilei. Funcţiunea exponenţială e^x, este o astfel de funcţie; cu ajutorul ei vom formă funcţia

$$F(x) = \int_0^1 k(a) e^{nx} du,$$

unde $k(a)$ este o funcție pozitivă în intervalul de integrare. Se vede imediat că $F(x)$ nu se poate anulà pentru nici o valoare reală și finită a lui x.

Putem găsì o regiune mai mare din planul variabilei complexe în care funcția $F(x)$, să nu se anuleze. Dacă

$$F(a+ib)=0,$$

va trebuì să avem în acelaș timp

$$\int_0^{\infty 1} k(a)e^{au}\cos bu\,du=0$$

$$\int_0^{\infty 1} k(a)e^{au}\sin bu\,du=0.$$

Ultima condiție nu poate fi satisfăcută dacă b este cuprins în intervalul $(-\pi, \pi)$ căci în acest caz $\sin bu$, păstrează acelaș semn în intervalul de integrare. Deci în fâșia de plan, cuprinsă între dreptele $y=\pi$ și $y=-\pi$, ecuația $F(x)=0$, nu poate aveà nici o rădăcină.

A. Angelescu.

PROPRIETĂȚI ALE CURBELOR PLANE.

1. Problema, pe care îmi propun s'o dezvolt în ceeace urmează, este următoarea:

Dându-se o curbă plană, pentru care elementele de primele trei ordine există, să se caute conicile cari au — cu această curbă, într'un punct dat — un contact de ordinul al doilea, sau de ordinul al treilea.

Fie M un punct al curbei, pentru care curba este diferită de zero. Să raportăm curba la tangenta MT, luată în sensul arcelor crescânde și la normala MN în sensul concavității curbei.

Atunci ecuația curbei va fi, în domeniul punctului M,

$$(1)\qquad y=\frac{1}{2\rho}x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{d(1/\rho)}{ds}x^3+\ldots,$$

ρ fiind raza de curbură în punctul M.

Ecuația generală a conicilor, cari în M au un contact de ordinul întâiu cu curba noastră, este:

$$(2) \qquad y + Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

Intr'adevăr, pentru $y = 0$, trebuie să avem $x^2 = 0$, deci termenul constant și cel în x, va lipsi.

Să exprimăn că curbele (1) și (2) au un contact de ordinul doi.

Pentru aceasta, în ecuația (2) vom înlocui pe y prin valoarea lui din ecuația (1) și vom anulà coeficientul lui x^2 în ecuația obținută. Vom aveà:

$$\begin{cases} 1/2\rho + A = 0 \\ A = -1/2\rho. \end{cases}$$

Deci ecuația generală a conicilor osculatrice curbei (1) în punctul M, este:

$$(3) \qquad y - \frac{1}{2\rho}x^2 + \lambda xy + \mu y^2 = 0.$$

Din această *rețea* de conice, trebuie să facă parte în mod necesar și cercul de curbură al curbei. Intr'adevăr, condițiile ca (3 să fie un cerc, sunt:

$$\lambda = 0 \quad ; \quad \mu = -1/2\rho.$$

Obținem astfel tocmai cercul osculator: $x^2 + y^2 - 2\rho y = 0$.

Să punem condiția ca (3) să fie o iperbolă echilateră. Obținem ecuația:

$$(4) \qquad y - \frac{1}{2\rho}x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2\rho}y^2 = 0.$$

Prin urmare: *Iperbolele echilatere osculatrice unei curbe într'un punct, formează un fascicol.* Ele au deci patru puncte comune fixe. Trei sunt confundate în M. Să căutăm pe al patrulea. Il obținem imediat, dacă observăm că intersecția fascicolului (4) cu normala MT ($x = 0$),

$$y = -2\rho,$$

nu depinde de λ.

Obținem prin urmare teorema:

Toate iperbolele fascicolului (4) *trec printr'un punct* P, *situat pe normala la curbă.*

Să căutăm locul centrelor acestor iperbole. Dacă:

$$\begin{cases} f(xy) \equiv y - \frac{1}{2\rho} x^2 + \frac{1}{2\rho} y^2 \\ g(xy) \equiv xy, \end{cases}$$

ecuația locului va fi:

$$f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y = 0, \tag{5}$$

sau:

$$x^2 + y^2 + \rho y = 0. \tag{6}$$

Obținem deci un cerc, tangent curbei (1) în M și cu raza egală cu jumătatea razei de curbură. Acest cerc mai taie normala într'un punct O, situat la mijlocul lui MP. Deci una din iperbolele fascicolului (4), va avea un diametru MP. Acest diametru este însă perpendicular pe tangenta MT. Obținem prin urmare teorema:

Există o iperbolă echilateră, osculatrice curbei în M, *pentru care una din axe este normală curbei. Unul din focarele acestei iperbole este centrul de curbură al curbei.*

2. Oprindu-ne aci cu studiul rețelii (3), să exprimăm acum că curbele (1) și (2), au un contact de ordinul trei. In ecuația (2) vom înlocui pe y prin valoarea sa din (1) și vom anulă termenii în x^2 și x^3.

Obținem:

$$\begin{cases} 1/2\rho + A = 0 \\ -1/6\rho^2 \cdot d\rho/ds + 1/2\rho \cdot B = 0, \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} A = -1/2\rho \\ B = \frac{1}{3} \cdot \rho'/\rho. \end{cases}$$

Vom avea deci *fascicolul* de conice:

$$y - \frac{1}{2\rho} x^2 + \frac{1}{3} \frac{\rho'}{\rho} xy + \mu y^2 = 0. \tag{7}$$

Să căutăm locul centrelor acestor conice.

Aplicând ecuația (5), obținem:

$$2y\left[-\frac{1}{\rho}x+\frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho}y\right]=0,$$

adică dreptele:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=\frac{1}{3}\dfrac{d\rho}{ds}y. \end{cases}$$

Prima dreaptă e un loc singular, căci fascicolul (7) conține și conica degenerată:

$$y^2=0,$$

al cărui centru este oricare din punctele ei.

Cât despre a doua dreaptă, ea joacă un rol special în *Geometria afinităților unimodulare*, analog rolului pe care-l joacă normala în geometria ordinară. Din cauza aceasta se și numește: *normala afină* a curbei în punctul M.

Rezultatul remarcabil pe care l-am obținut este următorul:

Locul centrelor conicelor superosculatrice unei curbe plane într'un punct dat, este constituit din normala afină și tangenta ordinară ale curbei în acel punct.

Din fascicolul (6) face parte și o iperbolă echilateră corespunzătoare valorii:

$$\mu=1/2\rho,$$

a parametrului.

Această iperbolă face evident parte și din fascicolul (4), din care se obține pentru:

$$\lambda=\tfrac{1}{3}\cdot\rho'/\rho.$$

Putem deci afla imediat centrul ei. Va fi la intersecția normalei afine cu cercul definit de ecuația (6).

MIRON NICULESCU.
Elev Șc. Normală Superioară, Paris.

NOTE MATEMATICE

38. *Alte zece geometrii diverse.* (Vezi Nota 29, pag. 249, Vol. XXXI).

172. **Afină.**	Vezi *Th. Vahlen.* Abstrakte Geometrie. Pag. 171.
173. **Formei.**	A se vedeà cartea dela No. 175.
174. **Hilbertiană.**	Ca la No. 172. Pag. 266.
175. **Inferioară.**	*Bretschneider.* Lehrgebäude der niederen Geometrie.
176. **Optică.**	Vezi *Euriques.* Les concepts fondamentaux de la sciences. Pag. 14.
177. **Perechilor de puncte.**	*A. Staute.* Geometrie des Punktepaares. Lipsca.
178. **Pitagorică.**	Vezi «Bulletin of the American mathematical Society». Vol. XXIX. Pag. 83.
179. **Quasieliptică.**	*W. Blaschke.* Quasielliptische Geometrie. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Vol. 60. Pag. 61.
180. **Singulară.**	Ca la No. 172. Pag. 76.
181. **Turbiloanelor.**	*A. Föppl.* Geometrie der Wirhelfelder. Lipsca.

(Va urmà). I. Ionescu.

39. *Asupra Numărului Special cu probleme nerezolvate al «Gazetei Matematice».* Un corespondent, care a citit enunțurile problemelor din Numărul Special, cu probleme nerezolvate, atrage atențiunea asupra unora din acele probleme.

a) Problema cu numărul 2696 este aceeași cu problema 2481, iar problema 2602 aceeași cu problema 2439. De aceea, anulăm problemele cu numerele 2602 și 2696 și dăm aceste numere la două probleme din numărul de față.

b) Problema 1000 s'a publicat în Anul X No. 9. Era necesară această indicațiune pentru a se puteà rezolvà problema.

c) Problema 1377 fiind o continuare a problemei 1376, dăm aci enunțul acesteia:

Se dă un cerc fix O cu diametrul AB şi un cerc variabil C cu centrul în A, ce taie O în D şi E, iar A*b* în punctul F în interiorul lui O. Paralela dusă prin F la BE taie pe DE în N, iar AN taie cercul O în P. Se cere: 1) Locul lui M, intersecţia lui AN cu BE; 2) Locul punctelor T şi T', intersecţiile lui AE, cu cercul de centru A şi raza PM.

Această problemă se găseşte rezolvată în Anul XVII pag. 104.

d) La problema 944, fracţia 0,61.... nu este nici fracţia periodică simplă 0,616161...., nici fracţia periodică mixtă 0,6111111.... Punctele după 1 indică că cifrele ce urmează pot fi oricum.

e) La problema 2501 se vorbeşte de Nota matematică No. 22 din acelaşi număr. In acea notă se cereà să se găsiască expresiunea termenului general al şirului recurent 1, 2, 6, 20, 66,.... la care scara de recurenţă este $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} + 2$. Rezultatul este $u_n = 3^{n-1} - 2^{n-1} + 1$. Fracţiunea dată în enunţ trebuie rectificată. Rectificarea se poate găsi de cei care se vor ocupà de chestiune.

I. I.

f) D-nul Mircea Adam ne-a atras atenţia că formula care face obiectul problemei 2511 din *G. M.* Vol. XXII, pag. 191 este greşită. O publicăm din nou cu enunţul rectificat.

V. C.

2511. Să se demonstreze că într'un heptagon regulat ABCDEFG, avem relaţia

$$\frac{l - d_2 + d_1}{l + d_2 - d_1} = \frac{d_2 - l}{d_2 + l},$$

l, d_1, d_2 fiind respectiv lungimile dreptelor AB, AC, AD.

g) Se rectifică de asemenea enunţul problemei următoare:

3107. Să se construiască triunghiul ABC, cunoscându-se unghiul A, latura BC şi lungimea bisectoarei ce pleacă din B.

Lt.-Col. Gh. I. L.

40. *Asupra problemei 3093.* Domnul O. Popea atrage atenţiunea că redactarea soluţiunii dată în G. M. la pag. 389 vol. XXX nu este completă. In cele ce urmează dăm o soluţiune dezvoltată, completă şi mai simplă decât aceea dela pag. 389 vol. XXX, dar ale

cărei elemente n'au fost întrebuințate de nici unul din deslegătorii problemii.

Se observă, că aceeași grupă de două cifre nu poate termină două patrate, pentrucă în acest caz două din cele trei pătrate perfecte sunt identice; de asemenea aceeași cifră nu poate ocupà acelaș loc în cele trei pătrate perfecte, fiindcă celelalte două cifre nu se pot permută în trei moduri diferite. Aceeași cifră nu poate ocupà acelaș loc în două pătrate, fără ca două din cele trei pătrate să înceapă sau să se termine cu aceeași cifră.

Acestea fiind fixate, să presupunem:

I. *Două din cele trei pătrate cerute se termină cu aceeași cifră.*

$$A^2 = 100a + 10b + c \quad , \quad B^2 = 100b + 10a + c \quad (a > b).$$

Avem: $A^2 - B^2 = 90(a - b)$; însă A și B fiind de aceeași paritate, (A+B) și (A—B) sunt ambele pare, adică $A^2 - B^2 = M4$, prin urmare $A^2 - B^2$ poate fi egal cu unul din numerele: 180, 360, 540, 720. Pe de altă parte, A și B fiind cuprinși între 10 și 31, trebue să descompunem pe fiecare din numerele de mai sus, *în doi factori pari*, a căror sumă să fie mai mică decât 62 și a căror diferență să fie mai mare ca 20. Ținând seamă și de $A + B > 20$, avem:

pentru 180: $\begin{cases} A+B=30 \\ A-B=6 \end{cases}$ sau $\begin{cases} A=18 \\ B=12 \end{cases}$ care nu convin problemii;

pentru 360: $\begin{cases} A+B=36 \\ A-B=10 \end{cases}$ sau $\begin{cases} A=23 \\ B=13 \end{cases}$ care nu convin problemii;

pentru 540 nu avem valori de (A + B) și (A — B) în condițiunile arătate, iar pentru 720 avem: $\begin{cases} A+B=40 \\ A-B=10 \end{cases}$, deci $\begin{cases} A=29 \\ B=11 \end{cases}$ care nu convin problemii.

II. *Două din pătrate încep cu aceeași cifră.*

$$A^2 = 100a + 10b + c \quad , \quad B^2 = 100a + 10c + b \quad , \quad (b > c).$$

Observăm în acest caz, că terminațiunile de două cifre ale pătratelor A^2 și B^2 sunt una răsturnată celeilalte și singurele perechi de terminațiuni de pătrate, cu cifre distincte, răspunzând acestei condițiuni, sunt 16, 61 și 69, 96. In aceste două cazuri avem:

$$A^2 - B^2 = 45 \quad \text{și} \quad A^2 - B^2 = 27.$$

Ţinând seamă că A şi B sunt cuprinşi între 31 şi 10, trebue să descompunem pe 45 şi 27 în câte doi factori, a căror sumă să fie mai mică ca 62 şi a căror diferenţă să fie mai mare ca 20.

Avem: $\begin{cases} A+B=45 \\ A-B=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} A=23 \\ B=22 \end{cases}$ şi $\begin{cases} A+B=27 \\ A-B=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} A=14 \\ B=13 \end{cases}$

din care numai $A^2=196$, $B^2=169$ corespund problemii şi dă pentru al treilea pătrat $961=31^2$.

III. In cazul când primele două ipoteze n'au loc, cele trei pătrate, după cele ce am arătat la început, se deduc din unul din ele prin permutări circulare. Se observă, că dacă facem cele şase combinări cu trei cifre diferite, se deduc din ele prin permutări circulare două grupe distincte *abc*, *bca*, *cab*, şi *acb*, *bac*, *cba*. In acest caz, fiecare din cifrele *a*, *b*, *c* termină un pătrat, deci ele ar fi trei din cifrele 1, 4, 5, 6, 9; însă cum pătratele terminate cu 5 au cifra zecilor 2, care nu este terminaţiune de pătrat perfect, iar pe de altă parte, observând că cifra zecilor la pătratele terminate în 1, 4, 9 este *pară*, iar la cele terminate cu 6 este *impară*, rezultă că două din cele trei cifre *a*, *b*, *c* sunt pare, cifra zecilor fiind o singură dată impară.

Prin urmare, avem pentru cele trei numere, care ar puteà fi soluţiuni, următoarele grupe:

164, 641, 416
146, 461, 614
496, 649, 964
469, 694, 946

care însă nu dau trei patrate perfecte.

Rezultă dar că singura soluţiune a problemii o formează numerele:

169, 196, 961.

O. N. Ţ.

41. *Asupra problemei 3184.* Soluţia dată acestei probleme de D-l M. Adam la pagina 312 şi cea dată de D-l S. Weiss la pagina 313 în *Gazeta Matematică* Vol. XXX, sunt eronate. D-lor s'au bazat pe teorema stabilită de D-l Căp. I. Linteş în *Gazeta Matematică* Vol. XXIX, pag. 470, dar greşit aplicată. In adevăr,

pe când în acea teoremă se stabileşte că cel mai mare exponent α al unui factor prim p al lui $n!$ este dat de

$$\alpha = \sum_{1}^{\lambda} E\left(\frac{n}{p^i}\right), \quad \text{unde} \quad \lambda = E\left(\frac{\log n}{\log p}\right),$$

D-nii: M. ADAM şi S. WEISS au luat fără nici o justificare $\lambda = \alpha$.

O. POPEA.

42. *Asupra notei No. 41.* Observaţia D-lui O. POPEA este justă, rămâne însă să se demonstreze cu rigurozitate teorema, sau regula enunţată de D-l CĂP. I. LINTEŞ în „G. M". Vol. XXIX la pagina 470. In însăşi enunţul acelei teoreme la locul citat este o eroare. Cei doritori să caute acea eroare şi să dea demonstraţia riguroasă a teoremei.

GH. B.

43. *Asupra problemei 3295.* Am primit la timp pentru această problemă o soluţie analoagă cu cea publicată la pagina 156, vol. XXXI, dela d-l GH. C. CĂLIN (Clasa VI, Lic. Caracal), ceeace am anunţat pe coperta N-rului 3. Numele d-sale nu a fost pus printre rezolvitorii dela pagina 156, pentrucă redijarea problemei 3295 nu a fost făcută de mine, iar soluţia d-lui GH. CĂLIN mi-a parvenit din eroare.

GH. B.

44. *Asupra problemei 3105* *). In cele ce urmează îmi propun a da o soluţiune geometrică acestei probleme, pe care însă, o voiu pune mai întâi în legătură cu următoarea chestiune, cevă mai generală.

Se consideră cercurile mobile T, ce rămân ortogonale unui cerc fix P şi ale căror centre descriu cercul O'. Care este înfăşurătoarea axelor radicale ale cercurilor T şi ale unui cerc fix O?

Fie M proecţia punctului P, centrul cercului P, pe axul radical al unuia din cercurile T şi al cercului O. Fie, apoi T, extremitatea vectorului $\overline{PT}$, equipolent vectorului $\overline{Ot}$, t fiind centrul cer-

*) „Gazeta Matematică", Vol. XXX, pag. 392.

cului T, considerat. Când cercul T variază, punctul T, descrie un cerc O_1, egal cercului O'.

Punctul P are aceiaşi putere în raport cu toate cercurile T, or, diferenţa puterilor unui punct în raport cu două cercuri este egală cu dublul produsului dintre linia centrelor şi distanţa dela acel punct la axul radical. Prin urmare avem:

$$PT_1 \times PM = Const.$$

Rezultă de aci că locul punctului M este un cerc, obţinut prin inversiunea cercului O_1.

Axele radicale ale cercurilor T şi ale cercului O, fiind perpendiculare în M pe dreptele PM, urmează că sunt tangente, că înfăşoară o conică (E), având unul din focare în P.

In cazul particular, când cercul O' trece prin centrul cercului O, această conică este o parabolă. Intr'adevăr, în acest caz cercul O_1 trece prin P, iar locul geometric al punctului M este o dreaptă.

Dacă cercul O' este concentric cercului O, cercul O_1 are centrul în P, iar locul geometric al punctului M se confundă cu înfăşurătoarea (E), care este acum un cerc cu centrul în P. Locul proecţiunilor centrului cercului O, pe axele radicale în chestiune, este prin urmare un melc al lui PASCAL. In acest din urmă caz, dacă cercul O' coincide cu cercul O, iar raza cercului P este nulă — avem problema 3105.

ŞERBAN GHEORGHIU.

45. *Cazul general al problemei 2824.* Enunţul acestei probleme conţine o restricţiune care nu-i necesară: «*Să se găsiască numărul întreg* ab, *format din numerele* a *şi* b *scrise unul după altul, ştiind că* $b < a$ *şi că*

$$a! + b = (ab)^2\text{»}.$$

Restricţiunea $b < a$ nu-i necesară pentru rezolvarea problemei a cărei soluţie sa publicat în Vol. XXVII, pagina 334.

Fie n numărul cifrelor lui b. Ecuaţia din enunţ se mai poate scrie

$$a! + b = (10^n a + b)^2 = a^2 10^{2n} + 2ab10^n + b^2$$

$$\therefore \quad (1) \quad a! = a^2 10^{2n} + 2ab10_n + b^2 - b.$$

Din (1) se vede că a trebuie să dividă pe $b^2 - b$, deci

$$b^2 - b = ka$$

$$\therefore \quad (2) \qquad b = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k^2a^2}}{2}.$$

Pentru ca b să fie întreg, trebue să avem

$$(3) \qquad 1 + (2ka)^2 = z^2,$$

sau asimilând această egalitate cu ecuația numerelor pitagorice și însemnând cu u și v două numere întregi, (3) dă

I. $\sqrt{1} = 1 = u^2 - v^2$, $2ka = 2uv$, $z = u^2 + v^2$, sau

II. $1 = 2uv$, $2ka = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$.

Prima egalitate din șirul I, nu are loc decât pentru

$$u = 1 \quad , \quad v = 0,$$

ceeace dă $z = 1$ și

$$b = 1, \text{ sau } b = 0, \text{ deci } n = 1.$$

Luând valoarea 1 pentru b, (1) dă

$$a! = 100a^2 + 20a$$

$$\therefore \quad (4) \qquad (a-1)! = 100a + 20 = 100(a-1) + 120,$$

ceeace arată că $a-1$ este unul din divizorii lui 120, adică:

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 15 ; 30 ; 60 ; 120.

Se găsește prin încercări că din aceste numere numai 6 verifică egalitatea (4), deci

$$a - 1 = 6 \qquad \therefore \qquad a = 7$$

iar

$$7! + 1 = (71)^2 = 5041.$$

Luând pentru b valoarea 0, (1) dă

$$a! = 100a^2 \qquad \therefore \qquad (a-1)! = 100(a-1) + 100,$$

adică $a-1$ ar fi unul din divizorii lui 100. Introducând însă în loc de $a-1$ divizorii lui 100, se găsește că ultima egalitate nu-i satisfăcută pentru nici o valoare.

Convenind a zice că 01 este numărul format de 1 scris după 0, găsim și soluția

$$0! + 1 = (01)^2.$$

Prima din egalităţile II, arată că u şi v, nu sunt numere întregi, deci nu vor da soluţii pentru a şi b.

Pe această cale am găsit şi numere a şi b care satisfac ecuaţia

$$a! + b = (a + b)^2,$$

pe care am propus-o cu numărul 101, în *Foaia Matematică*.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

46. *Asupra exerciţiului 44, anul XXIX, «G. M.»* Acest exerciţiu este un caz particular al următoarei teoreme datorită lui FRÉGIER.

Coardele unei conice văzute sub un unghiu drept dintr'un punct al ei, trec printr'un punct fix aşezat pe normala acelui punct.

A se vedeà articolul D-lui ŢIŢEICA din vol. XXI, «G. M.»

VALERIU N. MANAFU.

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Tomul XL, No. 2. Fevruarie 1926. Bruxelles. Asupra fasciculelor de curbe plane de ordinul $3m$, având nouă puncte multiple de ordinul m şi legătura lor cu suprafaţa cubică generală, de B. GAMBIER. Asupra podarei şi pseudo-podarei unei curbe strâmbe, de R. GOORMAGHTIGH. Teoria ecuaţiilor în „*Invenţiune nouă în Algebră* de ALBERT GIRARD" de H. BOSMANS. Asupra câtorvà triunghiuri speciale, de A. DE HUISSER.

J. NEUBERG. Note matematice asupra tetraedrului, Supliment la *Mathesis* (Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, Decembrie 1925).

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 50, No. 11. Martie 1926.

Curierul Matematic. Vol. II. No. 1 Martie 1926. Bucureşti. După un an, de I. FÂNTÂNARU, N. BOTEA, O. BOLGIU şi L. BRÜLL. Asupra unor ecuaţii cu rădăcinile reale, de N. G. BOTEA. Asupra unui sistem de linii, de I. V. VASILIU. Câtevà propietăţi remarcabile, de O. BOLGIU.

Revista matematică din Timişoara. Anul V. No. 1. Martie 1926. Timişoara. Diviziunea polinoamelor, de T. LALESCU.

Foaia matematică. Anul III. No. 3, Martie 1926 Chişinău. Asupra unor chestiuni de geometrie, de N. G. BOTEA.

M. Niculescu. *Sur une classe de séries dont le cercle de convergence est une ligne singuliére essentielle.* (Extras din *Bulletin de la Société des Sciences de Cluj*, tomul III, decemvrie 1925).

Comandor Corneliu Buchholtzer. *Telegrafie şi telefonie fără fir.* Chişinău. 1926. (No. din Biblioteca *Foii matematice*).

R. Deltheil. *Probabilités géométriques.* Paris. Gauthier Villars et C-nie, Editeurs 1926.

Acest volum este fascicola II din tomul II al colecţiunii *Traité du Calcul des probabilités et de ses aplications,* publicat sub direcţiunea lui Emil Borel. El conţine, cu oarecare adaose, cursul pe care autorul l'a ţinut la Collège de France în 1922—1923.

In Cap. I se reaminteşte principiile generale ale calculului probabilităţilor, aplicaţiuni la probabilităţile continui, paradoxul lui Bertrand, problemele lui Poincaré: ruleta şi repartizarea micilor planete pe zodiac. Cap. II se ocupă cu condiţiunile generale de alegere ale probabilităţii elementare. După ce se arată cum se măsoară mulţimea punctelor din plan şi a dreptelor, face să intervină teoria grupurilor, transformările lor infinitezimale, condiţiunile ca ele să admită un invariant integral dat, după care se scot unele concluziuni generale. In Cap. III se studiază probleme relative la puncte, cu diferite aplicaţiuni, printre care şi problema cuadrilaterului convex a lui Sylvester, pentru domenii de diferite forme. In Cap. IV sunt probleme asupra dreptelor, începând cu celebra problemă a acului lui Buffon, apoi problema funicularelor lui Barbier şi teoremele lui Crofton. Cap. V se ocupă cu chestiuni referitoare la probleme în spaţiu. Arată cum se poate măsură mulţimea dreptelor din spaţiu, a planelor din spaţiu, se ocupă de teorema lui Minkowski şi termină cu chestiuni relative la poziţiunile unui solid în spaţiu. Cap. VI este consacrat problemei sferei în spaţiul cu m dimensiuni.

Autorul a căutat ca într'un spaţiu restrâns să dea o ideie generală de starea actuală a calculului probabilităţilor geometrice şi de legăturile lui cu alte ramuri ale ştiinţelor matematice, în special cu măsura mulţimilor şi cu teoria grupurilor de transformaţiune. Broşura poate fi citită cu folos, atât de cei ce se ocupă cu calculul probabilităţilor, cât şi de cei ce se interesează de progresul ştiinţelor matematice.

I. Ionescu.

Buletinul Societăţii Studenţilor în matematici. No. 4. Bucureşti. Linii trase pe o suprafaţă, de Al. Niculescu. Teoreme de geometria triunghiului, de T. Popoviciu. Asupra funcţiunilor şi operatorilor ce satisfac o condiţiune Apfell, de Gr. C. Moisil. Asupra discriminantului unei ecuaţiuni algebrice, de T. Popoviciu. O problemă de geometrie în legătură cu teoria funcţiunilor eliptice, de E. Ballan.

CERERI.

Răspuns la cererea No. 133. In No. dela 15 Fevruarie al Gazetei Matematice s'au indicat câtevà erori de tipar in tabelele de patrate şi cuburi din *Formularul de Matematici* de V. Coman şi N. Malla. Eu am mai găsit eronate următoarele patrate: pentru 83 patratul 6880, in loc de 6889; pentru 679 patratul 451041, în loc de 461041 şi pentru 853 patratul 727600, in loc de 727609.

Istinie I. C. Brezuica.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE» DIN ANUL 1926.

PROBELE SCRISE.

(8 aprilie 1926).

A. PROBE TEORETICE.

(Timpul acordat: 3½ ore).

Clasa VI-a.

Algebra. 1. Să se afle limita expresiunii

$$E = \frac{\sqrt[m]{x+\sqrt[n]{x}}}{\sqrt[n]{x+\sqrt[m]{x}}},$$

când x tinde către zero. Discuţie, în cazul când m şi n sunt numere pozitive.

2. In jurul unei mese circulare se aşează şase persoane, dintre care trei sunt bărbaţi şi trei femei. Să se aranjeze aceste persoane, astfel încât un bărbat să se găsiască, sau între două femei, sau între un bărbat şi o femee; iar o femee să se găsiască, sau între doi bărbaţi, sau între un bărbat şi o femee. In câte moduri se pot aranjà cele şase persoane, în jurul mesei, în aceste condiţiuni.

Generalizare.

Algebra. 1°. Se consideră funcţiunea

$$y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\alpha},$$

α fiind un parametru real.

a) Să se studieze variaţia funcţiunii, pentru $\alpha < 1$, $\alpha > 1$ şi $\alpha = 1$, construindu-se curba în toate aceste cazuri.

b) Să se determine α astfel ca punctul pentru care y este maximum să se afle pe bisectoarea unghiului xOy.

c) Să se calculeze în acest din urmă caz y, cu şapte zecimale exacte.

2°. Să se găsiască condiţia, ca polinomul

$$x^3 + px^2 + qx + r$$

să poată fi pus sub forma

$$(x + \alpha)^3 + \beta.$$

Geometrie. Se consideră un patrulater ABCD înscris într'un cerc O. Din punctul P de intersecţie a diagonalelor patrulaterului, se duc perpendicularele PK, PL, PM, PN pe laturile acestuia. Să se dovedească următoarele:

1°. Perpendicularele PK, PL.... sunt bisectoarele unghiurilor patrulaterului KLMN.

2°. Ca patrulaterul KLMN să fie inscriptibil într'un cerc ω, este necesar şi suficient ca diagonalele AC, BD să fie perpendiculare între ele.

3°. Dacă şi această din urmă condiţiune este îndeplinită şi dacă punctele K', L', M', N', sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD şi DA, dreptele K'M, M'K, L'N şi N'L trec toate prin punctul P.

Trigonometrie. 1. Se dă $\cos a$ şi se cere $\sin \frac{1}{4}a$ şi $\cos \frac{1}{4}a$.

Aplicaţie pentru $\cos a = -\frac{7}{8}$.

2. Mai sunt alte formule fundamentale, în afară de cele cinci cunoscute?

3. Să se rezolve un triunghiu rectiliniu, cunoscând 2 laturi şi unghiul cuprins. Discuţie.

(Se vor lua ca date b, c, A şi se vor determină a, B, C).

Clasa VII-a.

Algebra. Să se studieze şi să se reprezinte grafic, variaţiunea funcţiunilor următoare:

$$y = L(1+x), \qquad z = \frac{x}{1+\frac{x}{2}}, \qquad u = \frac{x}{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}}.$$

Cu ajutorul curbelor găsite, să se studieze şi să se reprezinte grafic, variaţiunea funcţiunilor:

$$Y = y - z, \qquad Z = y - u \qquad (x \geqslant -1).$$

Să se demonstreze că Y este o funcţiune crescătoare cu x, tangentă în

origină la axa de x, iar Z are un maximum pentru $x = 0$ şi un minimum pentru $x = 24$.

Să se deducă următoarele inegalităţi:

a) $$L(1+x) < \frac{x}{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}} < \frac{x}{1+\frac{x}{2}}, \quad \text{pentru } -1 \leqslant x < 0;$$

b) $$\frac{x}{1+\frac{x}{2}} < L(1+x) < \frac{x}{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}}, \quad \text{„ } 0 < x < 3+\sqrt{21};$$

c) $$\frac{x}{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}} < \frac{x}{1+\frac{x}{2}} < L(1+x), \quad \text{„ } x > 3+\sqrt{21}.$$

Mecanica. Un sistem de forţe aplicate unui solid, poate fi inlocuit, intr'o infinitate de moduri, cu două forţe. Să se arate că dacă (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) sunt două moduri deosebite de reducere ale aceluiaşi sistem de forţe şi dacă forţele P_1 şi P_2 se intâlnesc intr'un punct M, atunci forţele Q_1 şi Q_2 sunt in acelaş plan trecând prin M.

Să se aplice in cazul unui sistem de trei forţe egale cu F, aplicate după muchiile SA, BS şi CB ale unui tetraedru regulat SABC şi respectiv in sensurile dela S la A, dela B la S şi dela C la B, arătându-se cum variază grupurile de forţe (P_1, Q_1), (P_2, Q_2),... când alegem punctul M in vârful S al tetraedrului.

Clasa VIII-a.

Algebra superioară. Se dă ecuaţiunea:

$$f(x) = (x^2+\beta^2)^2 + \alpha x(x^2-\beta^2) = 0,$$

care se bucură de proprietatea că are produsul a două rădăcini, egal cu produsul celorlalte două.

Se cere:

1°) Să se rezolve ecuaţiunea cu ajutorul ecuaţiunilor de gradul al 2-lea.

2°) Să se verifice că şi ecuaţiunea $f(x+\beta) = 0$ are *aceleaşi două* proprietăţi ca şi ecuaţia $f(x) = 0$.

Geometrie analitică. Se consideră o elipsă având axele $\overline{AA'} = 2a$ şi $\overline{BB'} = 2b$ şi un punct M variabil pe ea.

Fie R şi N' punctele unde tangenta in M taie axele AA' şi BB' şi asemenea R' şi N punctele unde normala in M taie pe AA' şi BB'.

1°) Să se calculeze $\overline{NN'}$ şi $\overline{RR'}$;

2°) Să se deducă că

$$\overline{RR'}/\overline{NN'} = \pm \operatorname{tg} \widehat{MOA},$$

(O fiind centrul elipsei) şi să se stabilească rezultatul şi pe cale geometrică.

3°) Să se găsiască locul geometric al punctului P(x, y), mijlocul segmentului $\overline{NR}$.

Să se studieze locul obţinut, rezolvind ecuaţiunea locului în raport cu y.

4°) Se se arate, că dacă luăm pe tangentă un punct M', astfel ca $\overline{M'R} = \overline{N'M}$, triunghiurile OM$m$ şi OM'm' sunt echivalente.

(m şi m' sunt respectiv proecţiunile lui M şi M' pe axa AA').

B. PROBE PRACTICE.

(Timpul acordat: $3\frac{1}{2}$ ore).

Clasa VI-a.

Trigonometrie. 1. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin(x + a) + \sin(x - a) = 1.$$

Discuţie pentru valorile lui a cuprinse între 0° şi 360°.

2. Luând pentru x, cea mai mică valoare pozitivă ce rezultă din relaţia

$$\operatorname{tg}^2(3x - 45^0) = \sin 27^0,\ 36' + \sin 74^0,\ 28' + \sin 77^0,\ 56',$$

se cere a se calculă expresiunea

$$E = \sqrt[3]{\frac{n^4 \operatorname{tg}^2(x + 23^0)}{m \cos^5 x}},$$

în care

$$m = 0{,}05305 \quad \text{şi} \quad n = 1{,}2546.$$

3. Să se rezolve şi discute ecuaţia

$$\frac{\sin a}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin a} = m,$$

a fiind un arc dat, cuprins între o şi π, iar m fiind un parametru variabil.

Clasa VII-a.

Algebra. Să se găsiască printr'o reprezentare grafică, în care intervale se află rădăcinile ecuaţiunii

$$Lx = \text{arc tg}\, x.$$

Să se calculeze cu două zecimale exacte, cu ajutorul tablelor de logaritmi, rădăcina cuprinsă între $e^{\frac{1}{4}\Pi}$ şi $e^{\frac{1}{2}\Pi}$.

Geometria descriptivă. 1°) Printr'o dreaptă *dată* (ab, $a'b'$), oarecare, să se ducă un plan perpendicular pe planul definit de linia de pământ şi punctul *dat* (c', c).

2°) Cu ajutorul unei rabateri convenabile, să se afle proecţiunile punctelor principale ale triunghiului ABC.

(Epura va fi însoţită de o legendă explicativă).

Mecanica. 1) Un trepied OABC se reazemă în punctele A, B, C pe teren ; picioarele sale OA, OB şi OC sunt dispuse simetric în raport cu verticala ce trece prin O, iar unghiurile AOB, BOC şi COA sunt egale cu α. Atârnând în O, o greutate P, să se găsiască presiunile transmise în picioarele trepiedului, precum şi componentele orizontale şi verticale ale presiunilor transmise de picioare pe teren.

Aplicaţie $\alpha = 60^0$.

2) Un corp de greutate 1 kgr., cade fără iuţeală iniţială pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat făcând unghiul $\alpha = 30^0$ cu orizontul. Ţinând seama de frecarea dintre corp şi plan (frecarea e o forţă îndreptată după linia de cea mai mare pantă, opusă mişcărei şi proporţională cu presiunea normală a corpului pe plan, coeficientul de proporţionalitate fiind *f)*, coeficientul de frecare fiind $f = 0{,}1$, se cere iuţeala pe care o va avea corpul, când ajunge la un nivel cu 5 m. mai jos ca punctul de plecare.

Clasa VIII-a.

Algebra superioară. Se dă ecuaţiunea :

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4ax - 3b = 0$$

şi se cere să se determine parametrii a şi b aşă fel ca ecuaţia să aibă:

1°) *o* rădăcină *dublă ;*

2°) *două* rădăcini *duble ;*

3°) *o* rădăcină *triplă* şi una simplă.

Geometria analitică. Se dau două cercuri

$$(C_1) \qquad x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$(C_2) \qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

şi se cere să se scrie ecuaţiunea cercului tangent la cercurile date şi având centrul pe dreapta

$$(D) \qquad x - 2y + \alpha = 0.$$

Să se determine condiţiunea pentru ca problema să admită două soluţiuni (Γ_1) şi (Γ_2).

Fie M_1 şi M_2 punctele de tangenţă ale cercurilor (Γ_1) şi (Γ_2) cu (C_1) ; N_1 şi N_2 punctele de tangenţă ale cercurilor (Γ_1) şi (Γ_2) cu (C_2). Fie I_1 punctul de întâlnire al tangentelor în M_1 şi M_2 la (C_1) şi I_2 punctul de întâlnire al tangentelor în N_1 şi N_2 la cercul (C_2).

Să se verifice că I_1I_2 este perpendiculară pe dreapta D şi să se stabiliască rezultatul şi pe cale geometrică.

(Figura va fi construită luând ca unitate de lungime un centimetru. Origina axelor de coordonate poate fi schimbată după voie).

ŞCOALA POLITECHNICĂ

Geometria analitică. I. Se dă o conică oarecare C şi două puncte M_1 şi M_2 în planul ei. Să se arate că există o conică Γ, care trece prin punctele comune polarelor punctelor M_1 şi M_2 cu conica C şi în acelaş timp prin cele două puncte date M_1 şi M_2.

Să se demonstreze că condiţia necesară şi suficientă ca conica Γ să fie iperbolă echilateră, este ca punctele M_1 şi M_2 să fie conjugate faţă de cercul lui MONGE (ortoptic) al conicei C. Ce devine această condiţie în cazul când C e o iperbolă echilateră sau o parabolă?

Să se facă o cercetare analoagă pentru cazul când Γ ar fi un cerc.

II. Se dă suprafaţa

$$xy + yz + xz = 1.$$

Să i se găsiască toate secţiunile plane care sunt iperbole echilatere.

Calcul diferenţial şi integral. I. Pe părţile pozitive ale axelor perpendiculare Ox, Oy, Oz, se dau puncte A şi P pe Ox, B şi Q pe Oy, C şi R pe Oz, punându-se $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OP = p$, $OQ = q$, $OR = r$.

Ducând prin A, B, C drepte paralele la axe, se formează un paralelipiped dreptunghiu, în care însemnăm cu D vârful diagonal opus vârfului O. Luând în planul PQR un punct oarecare M, se duc prin el planuri paralele cu feţele triedrului $Oxyz$. Aceste trei planuri formează cu feţele paralelipipedului OD, care pleacă din D, un nou paralelipiped, în care M şi D sunt diagonal opuse. Să se determine poziţia lui M în planul PQR, aşa ca paralelipipedul MD să aibe cel mai mare volum.

Să i se găsiască o construcţie geometrică.

II. Să se găsiască volumul cuprins între paraboloidul $z = x^2 + y^2$, planul xOy, planul xOz, planul bisector $x = y$ şi planul $x = 1$.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3337. *Să se construiască un triunghiu* ABC, *cunoscând latura* a, *raza* R *a cercului circumscris şi unghiul* α *pe care tangenta în vârful* A *la cercul circumscris îl face cu dreapta lui* EULER *a triunghiului.*

B. M. BARBĂLATT.

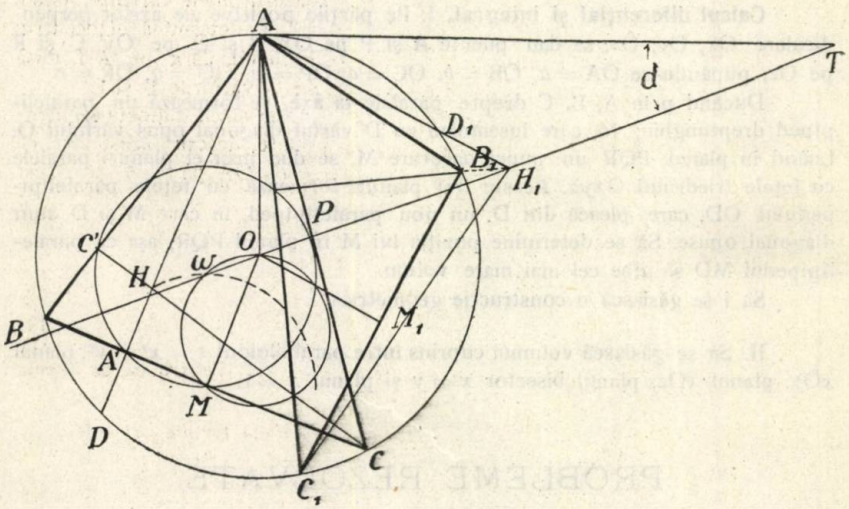
Soluţie dată de D-nii: C. IONESCU-BUJOR, ANDREI IONESCU-BUJOR şi D. NESTOR (Elevi Liceul Cantemir Vodă), EUGEN V. LUPESCU şi TEODOR COCEA (Elevi Liceul Piteşti), GH. MUNTEANU şi

I. Nicolau-Dobridor (Elevi Cl. VI Liceul Militar, Craiova), Corneliu N. Popescu (Elev Cl. VI Liceul Giurgiu), Em. Gh. Gaiu (Elev Cl. VII Liceul Bârlad), Istinie I. C. Brezuica (Liceul Caracal), C. Adrian Gheorghiu (Lic. Piteşti).

Fie O centrul cercului circumscris, H ortocentrul, ω centrul cercului celor nouă puncte, M mijlocul laturei BC, T punctul de intersecţie al tangentei în A la cercul O cu dreapta OH.

In triunghiul dreptunghic OAT cunoaştem cateta OA, egală cu raza dată R şi unghiul OTA egal cu α. Putem apoi determină pe OM, înscriind într'un cerc cu raza R o coardă egală cu a şi ducând o perpendiculară din centrul cercului pe această coardă.

Se ştie însă că $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OM}$; am determinat deci şi pe AH. Urmează atunci următoarea construcţie:



Descriem un cerc cu raza R, în care ducem o rază arbitrară OA. Pe această rază, luată ca catetă, construim triunghiul OAT dreptunghic în A şi în care $\sphericalangle OTA = \alpha$. Din A ca centru cu o rază $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OM}$ descriem un cerc care taie pe OT în H şi H_1. Din O ducem o paralelă la AH, pe care luăm o lungime OM egală cu cea determinată în modul de mai sus; perpendiculara dusă în M pe OM (sau pe AH) taie cercul O în B şi C; ABC este triunghiul căutat. In mod analog, punctul H_1 ne dă un al doilea triunghiu AB_1C_1 care corespunde chestiunei.

Soluţie dată de D-l R. I. SPATHY (Elev Cl. VII, Liceul Matei-Basarab).

Se ştie că raza ωM a cercului celor nouă puncte este paralelă cu OA, iar tangenta dusă în M la acest cerc e paralelă cu tangenta AT. De aici rezultă că dreapta OM este văzută din ω sub un unghiu egal cu $(90^0 - \alpha)$. Urmează atunci următoarea construcţie:

Cu raza dată R descrim un cerc cu centrul O. In acest cerc înscrim coarda $BC = a$ şi ducem OM perpendiculară pe BC. Pe OM ca coardă, construim segmentul de cerc capabil de unghiul $(90^0 - \alpha)$, iar din M ca centru, cu o rază egală cu R : 2 descrim un cerc, care taie segmentul în centrul ω al cercului celor nouă puncte. Din ω cu raza R : 2 descrim cercul celor nouă puncte, care taie pe BC în M şi A'; A' va fi piciorul înălţimei dusă din A; perpendiculara dusă în A' pe BC taie cercul O în A.

Notă. Soluţiile trimese de corespondenţi prezintă unele variante. Astfel, D-nii: I. NICOLAU-DOBRIDOR şi GH. MUNTEANU după ce determină ortocentrul H, prelungesc pe AH până taie cercul O în D. Perpendiculara pe AH, dusă prin mijlocul segmentului HD, determină cu cercul O vârfurile B şi C.

D-nii: EM. GH. GAIU şi CORNELIU POPESCU observă că mijlocul segmentului OH este centrul ω al cercului celor nouă puncte, descriu acest cerc cu raza R : 2 şi determină pe M ducând OM paralelă cu OA până ce taie acest cerc.

Discuţie. E de observat că unghiul dat α trebue să fie ascuţit, el fiind un unghiu dintr'un triunghiu dreptunghic.

O altă condiţie este

$$a < 2R. \qquad (1)$$

Fie P piciorul perpendicularei dusă din A pe OT. Pentru ca problema să fie posibilă mai trebue ca $AP < AH$.

Avem $AP = R\cos\alpha$, iar $AH = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Deci trebue ca

$$\cos\alpha \leqslant \sqrt{4 - a^2/R^2}. \qquad (2)$$

Observăm însă că dacă $a < R\sqrt{3}$, atunci $\sqrt{4 - a^2/R^2} > 1$, iar condiţiile (1) şi (2) sunt a fortiori satisfăcute.

Dacă însă $a > R\sqrt{3}$, atunci $\sqrt{4 - a^2/R^2} < 1$. In acest caz, pe lângă condiţia (1) trebue ca mărimea unghiului ascuţit să fie astfel, ca să satisfacă şi condiţia (2).

Problema are in totdeauna două soluţii şi numai una când inegalitatea (2) devine egalitate.

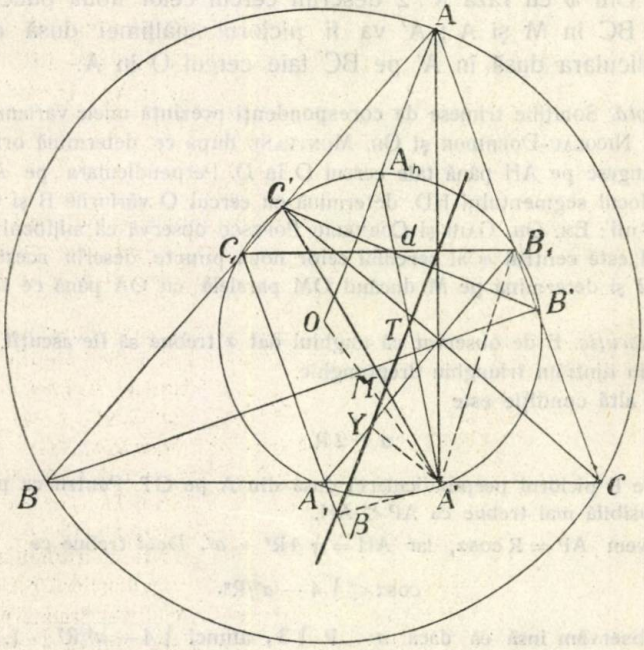
(V. C.

PROBLEMA 3346. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare,* $A_1B_1C_1$ *triunghiul său complimentar şi* A'B'C' *triunghiul ortic. Să se demonstreze că dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* A', B', C' *în raport cu triunghiul* $A_1B_1C_1$ *se întretaie în centrul cercului lui* TAYLOR *al triunghiului* ABC.

CONST. C. POPOVICI.

Soluţie dată de D-nul N. TEODORESCU (Elev cl. VII, Liceul Spiru Haret).

Fie A_h ortocentrul triunghiului AB'C' şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.



Se ştie că centrul cercului lui TAYLOR al triunghiului ABC este mijlocul T al dreptei $A'A_h$ (ROUCHÉ ET DE COMBEROUSSE, Géométrie plane, nouvelle édition, p. 496), iar dreapta lui SIMSON a punctului A' în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ trece prin mijlocul M al dreptei A'O, care uneşte pe A' cu ortocentrul O al triunghiului $A_1B_1C_1$.

Fie α punctul unde AA' taie pe B_1C_1, β şi γ proiecţiile lui

A′ pe C_1A_1 şi A_1B_1 ; α este proiecţia lui A′ pe B_1C_1, iar $\beta\gamma\alpha$ este dreapta lui SIMSON a punctului A′, în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

Patrulaterul $A'\gamma\alpha B_1$ fiind inscriptibil, avem

$$\sphericalangle \gamma\alpha A' = \sphericalangle \gamma B_1 A' = \sphericalangle A_1B_1A' = \sphericalangle A_1B'A'.$$

Dar $\sphericalangle A_1B'A' = \sphericalangle A_1B'C - \sphericalangle A'B'C = \sphericalangle C - B,$

căci triunghiul A_1CB' fiind isoscel, unghiul $A_1B'C = \sphericalangle C$, iar dreapta A′B′ este antiparalelă cu AB. Deci

$$\sphericalangle \gamma\alpha A' = \sphericalangle C - B.$$

Se ştie însă că şi $\sphericalangle OAA' = \sphericalangle C - B$ şi deci dreapta lui SIMSON $\beta\gamma\alpha$ este paralelă cu raza OA ; ori ea trecând prin mijlocul M a lui A′O va trece şi prin mijlocul T a lui $A'A_h$. Problema este deci demonstrată.

A rezolvat problema şi D-nul LEON SEGALL.

Notă. Demonstraţia precedentă se poate prescurtă mult dacă observăm că α este mijlocul înălţimei AA′. Dreapta $\beta\gamma\alpha$ trece deci prin mijlocul M a lui OA′ şi prin mijlocul α a lui AA′; ea va trece deci şi prin mijlocul T a lui A_h A′.

D-nii: AL. C. FLOREA, GRIGORE MAREŞ şi SOLOMON WEISS au arătat că proprietatea care face obiectul problemei 3346, rezultă din proprietăţile demonstrate de D-nul TRAIAN LALESCU în articolul intitulat: *Asupra unui punct remarcabil al triunghiului (Gazeta matematică,* Vol. XXI, p. 241), în nota 19: *O clasă de triunghiuri remarcabile, (Gazeta Matematică,* Vol. XX, p. 213) şi în nota 28: *Despre ortopol, (Gazeta Matematică,* Vol. XX, p. 294).

După notaţiunile şi proprietăţile stabilite de D-nul TR. LALESCU în aceste note şi articol, triunghiul ortic A′B′C′ şi triunghiul complimentar $A_1B_1C_1$, sunt două triunghiuri S înscrise în cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC. Deci dreptele lui SIMSON ale vârfurilor unuia din triunghiurile $A_1B_1C_1$, A′B′C′, în raport cu celalt triunghiu, sunt concurente în mijlocul T al dreptei care uneşte ortocentrele acestor două triunghiuri ; se arată apoi că T este centrul cercului lui TAYLOR al triunghiului ABC.

Se mai demonstrează că punctul T este ortopolul fiecăreia din laturile unuia din triunghiurile $A_1B_1C_1$, A′B′C′ în raport cu celalt triunghiu.

(V. C.).

PROBLEMA 3367. *Se împart laturile triunghiului* ABC *în acelaş raport* m : n, *mergând în acelaş sens. Fie* A_1, B_1, C_1 *punctele astfel căpătate respectiv pe laturile* BC, CA, AB. *Procedăm la fel cu triunghiul* $A_1B_1C_1$ *împărţind laturile sale tot în raportul* m : n. *Fie* S, S_1, S_2, S_3,... *ariile triunghiurilor* ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, *etc. Se cere să se afle în funcţie de* S, m *şi* n *limita sumei*

$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_p+\ldots$$

EUGEN BALAN.

Soluţie dată de D-nii: GRIGORE IOACHIM, AL. C. FLOREA, CORNELIU POPESCU, TOMA PUŞCĂ, GEORGE TAILER, OZIAS M. SCHÄCHTER, O. I. BRAEŞTER, R. I. SPATHY, HAIM COHN, H. MARCOVICI, H. DAVID, LAZĂR KATZ, AVRAM LUPU, ALEXANDRU WEISBUCH, M. A. CERNES, RĂDUCANU I. GEORGESCU, I. C. VASILIU.

Avem prin ipoteză

$$\frac{B_1A}{B_1C}=\frac{m}{n} \quad \therefore \quad B_1A=\frac{bm}{m+n},\ B_1C=\frac{bn}{m+n}.$$

In acelaş mod găsim:

$$C_1B=\frac{cm}{m+n},\ C_1A=\frac{cn}{m+n},\ A_1C=\frac{am}{m+n},\ A_1B=\frac{an}{m+n},$$

Dar $S_1=S-(\text{aria } AB_1C_1+\text{aria } BC_1A_1+\text{aria } CA_1B_1)$;

$$\text{aria } AB_1C_1=\tfrac{1}{2}AB_1\cdot AC_1\sin A=\tfrac{1}{2}bc\frac{mn}{(m+n)^2}\sin A=S\frac{mn}{(m+n)^2}$$

$$\text{aria } BC_1A_1=\frac{mnS}{(m+n)^2},\quad \text{aria } CA_1B_1=\frac{mnS}{(m+n)^2}.$$

Avem deci:

$$S_1=S\left[1-\frac{3mn}{(m+n)^2}\right].$$

In mod analog obţinem

$$S_2=S_1\left[1-\frac{3mn}{(m+n)^2}\right]=S\left[1-\frac{3mn}{(m+n)^2}\right]^2$$

$$S_3=S\left[1-\frac{3mn}{(m+n)^2}\right]^3$$

. . . . . .

$$S_p = S\left[1 - \frac{3mn}{(m+n)^2}\right]^p.$$

Limita căutată este deci limita sumei

$$S\left[\left(1 - \frac{3mn}{(m+n)^2}\right) + \left(1 - \frac{3mn}{(m+n)^2}\right)^2 + \ldots + \left(1 - \frac{3mn}{(m+n)^2}\right)^p + \ldots\right],$$

care este o progresie geometrică descrescătoare.

Limita căutată este deci

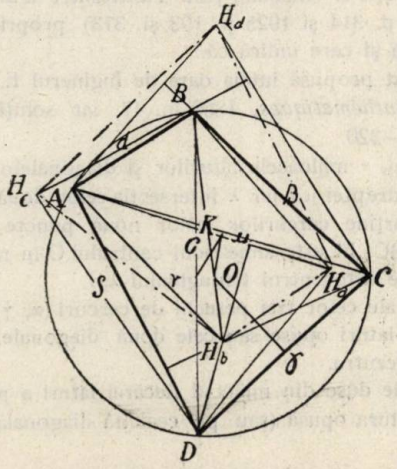
$$S\frac{m^2 - mn + n^2}{3mn}.$$

D-nii: N. Teodorescu, C. Drâmbă, N. I. Manolescu şi N. Botea, au rezolvat problema cu ajutorul geometriei analitice.

PROBLEMA 3375. *Dreptele lui* Simson *ale vârfurilor unui patrulater inscriptibil, în raport cu triunghiurile formate prin unirea vârfurilor rămase ale patrulaterului, sunt concurente.*

Soluţie dată de D-nii: George Tailer şi David Haim (Elevi Liceul Codreanu, Bârlad), Ion C. Vasiliu (Liceul Bacău), N. I. Manolescu (Liceul Focşani).

Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului ABCD; H_a, H_b, H_c, H_d ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC; γ mijlocul laturei CD.



Se ştie că în orice triunghiu, distanţa dela un vârf oarecare al triunghiului la ortocentru, este egală cu îndoitul distanţei dela

centrul cercului circumscris la latura opusă vârfului considerat. Deducem că dreptele AH_b, BH_a sunt ambele egale cu 2.0γ. Dar ele fiind şi paralele, urmează că figura $ABH_a H_b$ este un paralelogram şi deci diagonalele AH_a, BH_b se întretaie în părţi egale. Fie K punctul de intersecţie al acestor diagonale.

Analog demonstrăm că patrulaterele $BCH_b H_c$ şi $DAH_d H_a$ sunt paralelograme, de unde conchidem că punctul K este şi mijlocul diagonalelor CH_c şi DH_d.

Pe de altă parte, se cunoaşte următoarea proprietate: dreapta lui SIMSON a unui punct P, de pe cercul circumscris unui triunghiu, în raport cu acest triunghiu, trece prin mijlocul dreptei care uneşte punctul P cu ortocentrul triunghiului.

Proprietăţile de mai sus învederează problema.

D-l A. LUPU arată că problema 3375 a mai fost propusă în *„Gazeta Matematică"* Vol. XXIII, p. 278, sub Nr. 2229, cu următorul enunţ:

Punctul de întâlnire al celor patru drepte ale lui SIMSON ale punctelor A, B, C, D faţă de triunghiurile BCD, CDA, DAB, ABC dintr'un patrulater inscriptibil ABCD, este centrul hiperbolei echilatere circumscrise patrulaterului.

D-l CORNELIU POPESCU arată că problema se găseşte în *F. G.-M. Exercices de géométrie*, VI éd., p. 576 şi 577 sub Nr. 1276 *b* şi 1277 *b*., iar D-l T. GH. COCEA arată că problema se găseşte şi în *Foaia Matematică* din Chişinău, Anul I, sub N-rul 42.

Notă. Punctul K poartă numele de *anticentrul* patrulaterului inscriptibil ABCD.

Dăm aci după D-l J. NEUBERG *(Sur l'anticentre d'un quadrilatère inscrit, Mathesis* 1924 p. 314 şi 1925 p. 193 şi 373) proprietăţile de care se bucură figura formată şi care indică că:

Problema a fost propusă întâia oară de Inginerul E. LEMOINE în *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1869 p. 47, iar soluţiunile au apărut la pag. 174—178 şi 317—320.

Fie α, β, γ, δ, μ, ν mijloacele laturilor şi diagonalelor AB, BC, CD, DA, AC, BD; G mijlocul dreptei $\mu\nu$, iar λ intersecţia celor două diagonale AC, BD.

Punctul K aparţine cercurilor celor nouă puncte ale triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC. El este simetricul centrului O în raport cu punctul G.

Anticentrul este ortocentrul triunghiului $\lambda\mu\nu$.

Axele radicale ale celor trei perechi de cercuri (α, γ), (β, δ), (μ, ν) care au ca diametre două laturi opuse sau cele două diagonale ale patrulaterului ABCD, trec prin anticentru.

Perpendicularele duse din mijlocul fiecărei laturi a patrulaterului (sau a unei diagonale) pe latura opusă (sau pe cealaltă diagonală), trec prin anticentru.

Proiecțiunile vârfurilor A, B, C, D pe diagonalele opuse formează un patrulater A'B'C'D', asemenea cu ABCD, înscris într'un cerc cu centrul K.

Patrulaterele $H_a H_b H_c H_d$, ABCD sunt egale și simetrice în raport cu K.

Pentru punctul K s'au propus și alte denumiri, precum *centrul lui* WALLACE, *punctul lui* LEMOINE, *punctul lui* MATHOT.

(V. C.)

PROBLEMA 3386. *Fie* I *centrul cercului înscris unui triunghiu oarecare* ABC. *Cu o rază arbitrară, se descrie un cerc* Γ *concentric cu cercul* I, *care taie laturile ce pleacă din vârfurile* A, B, C *respectiv în perechile de puncte* (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2).

Să se demonstreze că cercurile O_a, O_b, O_c *tangente la laturile triunghiului* ABC *în perechile de puncte* (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) *au ca centru radical, când* Γ *variază, punctul lui* GERGONNE *al triunghiului considerat.*

N. BLAHA.

Soluție dată de D-nii: RADU ADAM (Elev în Cl. VI Liceul Constanța), GEORGE TAILER și DAVID HAIM (Elevi Liceul Codreanu Bârlad).

Să însemnăm cu D, E, F punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB. (Punctele B_1, C_2 se află pe latura BC; C_1, A_2 pe latura CA, iar A_1, B_2 pe latura AB).

Corzile A_1B_2, A_2C_1, B_1C_2 din cercul Γ sunt egale, căci ele sunt egal depărtate de centrul acestui cerc. Deci:

$$A_1B_2 = A_2C_1.$$

Dar mai avem, prin construcție, $AA_1 = AA_2$; deci:

$$AB_2 = AC_1,$$

ceeace probează că vârful A aparține axei radicale a cercurilor O_b și O_c.

Observăm însă că $DB_1 = DC_2$, deoarece D este mijlocul corzei B_1C_2 din cercul Γ. Prin urmare D se află și el pe axa radicală a cercurilor O_b, O_c.

Rezultă de aci că AD este axa radicală a cercurilor O_b, O_c.

In mod analog demonstrăm eă BE este axa radicală a cercurilor O_c, O_a, iar CF a cercurilor O_a, O_b. Problema este deci demonstrată, căci transversalele unghiulare AD, BE, CF determină punctul lui GERGONNE.

D-nii N. TEODORESCU (Elev Cl. VII Liceul Spiru Haret), ISTINIE I. C. BREZUICA (Lic. Caracal), arată că proprietatea care face obiectul problemei, rezultă implicit din proprietăţile 1), 2), 4) şi 13) din articolul D-lui BLAHA, *Proprietăţi importante ale triunghiului*, din *Gazeta Matematică* Vol. XXX, p. 241 şi u.

EXERCIŢII

35. La care patrate de trei cifre acestea pot formă progresie aritmetică?

G. TAILER.

R. Suma cifrelor este intreitul cifrei medii, deci se divide cu 3. Patratul căutat se va divide cu 9. Rădăcina lui se divide cu 3. Cea mai mică este 12, cea mai mare 30. Formăm patratele multiplilor de 3 dintre aceste limite, inclusiv dânsele, şi găsim că soluţiile problemei sunt 324 şi 576, patratele lui 18 şi 24.

36. La care patrate de trei cifre suma şi produsul cifrelor sunt patrate?

J. WEINSTEIN.

R. Dacă ultima cifră este 0, avem patratele 100, 400, 900, care corespund enunţului. Dacă ultima cifră este 1, produsul celorlalte două este un patrat şi cifra zecilor pereche. Deci produsul primelor două cifre poate fi: 4; 16; 36; 64. Desfacem aceste numere în produse de doi factori, facem suma lor mărită cu 1 şi vedem care ne dă un patrat ca rezultat. Găsim soluţia 441. Procedăm analog şi cu cifrele 4; 5; 6; 9 care pot termină un patrat. Se mai găseşte soluţia 144.

37. Să se arate că numărul:

$$\underbrace{999\ldots\ldots}_{m-n-1}\ \underbrace{98000\ldots}_{m+n-1}\ \underbrace{01000\ldots}_{2n-1}\ \underbrace{001999\ldots}_{m-n-1}\ \underbrace{980000..01}_{m+n-1}$$

este un patrat perfect.

N. G. BOTEA.

R. Punem $a = 999\ldots 98000\ldots 01 = 10^{2m} - 2.10^{m+n} + 1$ şi atunci numărul dat devine $(10^{2m} + 1)a + 10^{2(m+n)}$, unde, înlocuind pe a, găsim $(10^{2m} - 10^{m+n} + 1)^2$.

38. Să se arate că $(4096^4 + 16390 \times 4095^2 + 16385)^{1024} > 2 \cdot 16^{12288}$.

V. Dorneanu.

R. Putem scrie $(4096^4 + 4096^2 (16384 + 6) + 16384 + 1)^{1024} > 2.16^{12288}$, Dar $16384 = 4 \times 4096$; $12288 = 3 \times 4096$ şi deci reese $(4097^4)^{1024} > 2.4096^{4096}$, ceeace este adevărat, căci $(n + 1)^n > 2n^n$ (*Culegere de probleme*, Algebra. 22. IX. pag. 28).

39. Nu se poate ca numărul *aaaa*.... scris în sistemul cu baza B să se scrie *bbbb*... în sistemul cu baza 2B.

C. C. Popovici.

R. Ar trebui ca să avem:

$$a \frac{B^n - 1}{B - 1} = b \frac{2^m B^m - 1}{2B - 1},$$

$$a(B^n - 1)(2B - 1) = b(2^m B^m - 1)(B - 1).$$

$$2a B^{n+1} - aB^n - 2^m bB^{m-1} + 2^m bB^m - (2a - b) B + (a - b) = 0.$$

Această ecuaţie nu poate da valori întregi pentru B, căci ar trebui ca $(a - b)$ să se dividă cu B, şi avem $a < B$, $b < B$.

40. Să se arate când

$$5^{2n} \cdot 5^{2(n+1)} + 12^{2n} \cdot 456 = \mathcal{M}\, 481 \text{ ?}$$

C. N. Bălăşescu.

R. Avem $25 \cdot 625^n + 144^n \cdot 456$. Dar $625 = 481 + 144$; $456 = 481 - 25$. Deci se reduce la $\mathcal{M}\, 481$.

41. Se cere patratul de trei cifre, aşa că înmulţind unităţile cu sutele şi împărţind produsul cu zecile, să găsim 15 ca rezultat.

I. Foca.

R. Reese imediat că unităţile sau sutele sunt 5 şi că câtul celorlalte două cifre este 3. De aci deducem soluţiile 315 ; 513 ; 526 ; 539 ; 625 ; 935.

42. La care patrate de patru cifre ultima este patratul primei?

E. St. Iacob.

R. Ultima cifră poate fi 1, 4 sau 9, când prima este respectiv 1, 2 sau 3. Ultimele două pot fi 01 ; 21 ; 41 ; 61 ; 81 ; 04 ; 24 ; 44 ; 64 ; 84 ; 09 ; 29 ; 49 ; 69 ; 89. O primă soluţie este de forma 1*s*01 şi căutăm ce valori ar puteà aveà *s* ştiind că rădăcina este coprinsă între rădăcinile patrate ale lui 1001 şi 1901. Procedând aşà găsim soluţiile 1521 ; 1681 ; 2304 ; 2704 : 3249 ; 3969, care sunt respectiv patratele numerelor 39 ; 41 ; 48 ; 52 ; 57 ; 63.

43. Dacă $a^2 = 2bc$, atunci numerele $(b + c - a)$, $(b - a)$, $(c - a)$ sunt numere pitagorice.

C. C. Popovici.

R. Relaţiunea :

$$(b + c - a)^2 = (b - a)^2 + (c - a)^2,$$

dezvoltată, duce la relaţia din enunţ.

44. Să se afle locul geometric al mijloacelor diagonalelor trapezelor isoscele înscrise într'un cerc dat, ştiind că unghiul laturilor neparalele este constant.

M. H. Bătescu-Danubiu.

R. Fie E intersecţia laturilor neparalele AD, BC ale trapezului ABCD. Unghiul E fiind constant, unghiurile egale din A şi B sunt şi ele constante, iar diagonalele AC şi BD sunt corzi de mărime constantă în cercul dat ; locul e un cerc concentric cu cercul dat.

45. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghiu ABC şi A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse vârfurilor. Dreapta A_1B_1 întâlneşte pe CB, CA în A_2 şi A_3 şi analog obţinem punctele B_2, B_3 şi C_2, C_3. Dreptele B_2C_3, C_2A_3, A_2B_3 sunt concurente, iar A_2C_2 şi B_3C_3 sunt egale şi paralele respectiv cu A_3B_3 şi A_2B_2.

George Tailer.

R. Punctul de concurenţă este centrul cercului, etc.

46. Fie R_a , R_b , R_c razele cercurilor ce trec prin centrul cercului circumscris şi prin două din vârfurile triunghiului. Să se demonstreze relaţia

$$\Sigma a^2\left[\frac{b}{R_b} + \frac{c}{R_c}\right] = 24S.$$

Mircea Adam.

R. Se ştie că avem $R = R_a \cdot 2\cos A$, etc. astfel că relaţia propusă devine

$$\Sigma a^2[\sin 2B + \sin 2C] = 12S.$$

47. Laturile unui triunghiu se împart în acelaş sens în raportul 1 : 3 prin punctele A_1, B_1, C_1. Fie l_a , l_b , l_c lungimile dreptelor AA_1, BB_1, CC_1. Avem relaţia

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = \frac{13}{16}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Mircea Adam.

R. Mai general dacă punctul A_1 împarte latura BC în raportul $A_1B:A_1C = m:n$, relaţia lui STEWART ne dă

$$\overline{AA_1}^2 = c^2.\frac{CA_1^2}{a} + b^2.\frac{BA_1}{a} - BA_1.CA_1.$$

Dar $$BA_1 = \frac{ma}{m+n}\ ,\quad CA_1 = \frac{na}{m+n}\ .$$

$$\therefore\quad l_a^2(m+n)^2 = (m+n)nc^2 + (m+n)mb^2 - mna^2,\ \text{etc.}$$

Obţinem $$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = \frac{m^2+mn+n^2}{(m+n)^2}(a^2+b^2+c^2),$$

care pentru $m:n = 1:3$ ne dă relaţia propusă.

48. Între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţiunea

$$r_a(r_b+r_c)^2 + r_b(r_c+r_a)^2 + r_c(r_a+r_b)^2 = 4p^2(R+r).$$

ION GEORGESCU-RACOVIŢĂ.

R. Cu ajutorul relaţiilor $S = (p-a)\,r_a = (p-b)\,r_b = (p-c)\,r_c$, obţinem

$$\Sigma\, r_a(r_b+r_c)^2 = \frac{p^2}{S}\Sigma\, a^2(p-a) = \frac{p}{r}\left[p(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3)\right]$$

şi ţinem seamă de relaţiile:

$$a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-r^2-4Rr),\quad a^3+b^3+c^3 = 2p(p^2-3r^2-6Rr).$$

49. Într'un triunghiu oarecare avem relaţiunea

$$\frac{r_a\,r_b\,r_c}{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)} = \sin\tfrac{1}{2}A\,\sin\tfrac{1}{2}B\,\sin\tfrac{1}{2}C.$$

T. V. DIACONESCU.

R. Avem $r_a\,r_b\,r_c = pS$, $\quad r_b + r_c = ap/r_a$, etc.

$$\sin\tfrac{1}{2}A\,\sin\tfrac{1}{2}B\,\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{(p-b)(p-c)(p-a)}{abc} = \frac{S}{pabc},\ \text{etc.}$$

50. Într'un triunghiu oarecare avem relaţiile

$$\frac{\sin A}{r_a} + \frac{\sin B}{r_b} + \frac{\sin C}{r_c} = \frac{2}{R}\cdot\frac{r_a+r_b+r_c}{a+b+c},$$

$$\frac{r_a}{\sin A} + \frac{r_b}{\sin B} + \frac{r_c}{\sin C} = \frac{(r_a+r_b+r_c)^2}{a+b+c}.$$

TRAIAN N. ANGELESCU.

R. Avem $$\frac{\sin A}{r_a} = \frac{1}{2R}\cdot\frac{a}{r_a} = \frac{1}{2R}\cdot\frac{a(p-a)}{S}$$

$\Sigma\,\dfrac{\sin A}{r_a} = \dfrac{1}{2RS}\,\Sigma\, a(p-a)$, etc. şi ţinem seamă de relaţia $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

Pentru a doua relaţie, mai observăm că avem $ap = r_a(r_b+r_c)$, etc.

PROBLEME PROPUSE*).

2602**). Se cer patratele mai mici ca 10000, la care suma cifrelor diferă de produsul lor cu un patrat.

G. TAILER.

2696**). Despărțim un patrat de zece cifre în două părți printr'o linie trasă pe mijlocul lui și constatăm că cele două numere astfel formate diferă cu 1000. Se cere patratul de zece cifre.

N. G. BOTEA.

3401. Să se găsiască 7 numere întregi consecutive, a căror sumă să fie egală cu $10^n + 1$.

COLONEL GH. BUICLIU.

3402. Care este partea zecimală a lui $a^{4.5^{99}} / 5^{100}$, în care a este prim cu 5.

E. ȘTEFĂNESCU.

3403. Să se determine numărul N, care satisface relația:

$$\varphi[\varphi(N)] = 28,$$

$\varphi(I)$ fiind indicatorul lui I.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

3404. Insemnând cu $[n/2]$ cel mai mare întreg cuprins în $n/2$, să se demonstreze identitatea

*) La problema 3382, propusă în „Gazeta Matematică", Vol. XXXI, pag. 239, să se înlocuiască $100(A \pm 1) + B$, prin $100(A \pm 5) + B$.

**) Probemele cu aceste numere fiind publicate mai înainte sub alte numere, se înlocuesc prin prezentele.

$$5(-1)^n u^2_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + 5\,\frac{1-(-1)^n}{2}\,u^2_{\left[\frac{n}{2}\right]} + [3(-1)^n - 1](-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} = u_n + u_{n-2},$$

u_n fiind termenul de rangul n din şirul lui FIBONACCI ($u_1=1$, $u_2=2$).

N. KAUFMANN.

3405. Se dau dreptele OA şi OB şi se duc arcele de cerc AC şi BC tangente în C şi respectiv la cele două drepte în A şi B. Problema admite o infinitate de soluţii. Care este aceea, care face minimă diferenţa patratelor razelor celor două cercuri?

I. IONESCU.

3406. 1°. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1-u^2}{1+u^2} & \dfrac{1-v^2}{1+v^2} & \dfrac{1-w^2}{1+w^2} \end{vmatrix},$$

descompunându-l în factori.

2°. Din calculul lui D să se deducă valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2\frac{1}{2}x & \sin^2\frac{1}{2}y & \sin^2\frac{1}{2}z \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ \sin 2x & \sin 2y & \sin 2z \end{vmatrix}.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

3407. Trei cercuri O_1, O_2, O_3 se taie două câte două în trei puncte A, B, C situate în linie dreaptă (A este intersecţia cercurilor O_1 şi O_2, B a cercurilor O_1 şi O_3, C a cercurilor O_2 şi O_3). Fie CD coarda comună cercurilor O_2, O_3. Se duce prin D o dreaptă care trece prin intersecţia cercurilor O_1, O_3 şi taie cercul O_1 în A'.

Tot prin D se duce o altă dreaptă care trece prin intersecţia cercurilor O_1, O_2 şi taie cercul O_1 în B'. Să se arate că corzile AA', BB', CD sunt paralele.

Ion Fundăţeanu.

3408. Fie d_a, d_b, d_c distanţele centrului cercului circumscris unui triunghiu la laturile sale. Dintre toate triunghiurile înscrise într'un acelaş cerc, care este acela în care expresia

$$d_a d_b d_c \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

este maximă?

N. P. Arcadian.

3409. Dacă $(b-c)/(b+c) = \operatorname{tg}\varphi$, unde b şi c sunt catetele unui triunghiu dreptunghiu ABC, să se demonstreze relaţiile:

$$(1)\quad \frac{h_a}{a} = \frac{\cos 2\varphi}{2} \qquad \text{şi} \qquad (2)\quad abc \sin 2\varphi = h_a (b^2 - c^2),$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

Corneliu N. Popescu.

3410. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare, avem relaţiunea

$$\frac{1}{r_b r_c - r r_a} + \frac{1}{r_c r_a - r r_b} + \frac{1}{r_a r_b - r r_c} = \frac{1}{2Rr'},$$

notaţiunile fiind cele obişnuite, iar r' raza cercului înscris în triunghiul ortic.

Ion Coşereanu.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Angelescu Aureliu (3353, 69); *Aronovici S.* (3347); *Avram L.* (3326); *Borneanu G. A.* (3391); *Braester O. I.* (3365, 73); *Brezuica I. I. C.* (3347, 63, 80, 83, E, P, R); *Brüll L.* (3334, 42); *Călin G.* (3342); *Cernes A. M.* (3363, 91, E, R); *Cocea Gh.* (3383); *Diaconescu V. T.* (3319, 80); *Dorneanu V.* (E); *Drâmbă C.* (3301, E); *Feldstein S.* (3342); *Florea A.* (3326); *Foca I.* (3369, E), *Georgescu I. Răducanu* (3399); *Gheorghiu C. Adrian* (3353, 69); *Gheorghiu Gh. Th.* (3347, N, R); *Grünstein E.* (3369, 80, 91, 94, P); *Haim D.* (3352, 83, 84, 91, P); *Hulubei T.* (3377, 80, E); *Iacob Eugen* (3353, P, R); *Iliuță Dăbuleni I.* (E); *Ionescu Bujor Th. C.* (3289, 353, 74, 80); *Manolescu N.* (3374, 77, 83, E); *Marcovici H.* (E); *Marinaș M.* (3383); *Mihăilescu St. N.* (3347, 74, 80); *Morțun Em.* (3347, 91); *Nestor D.* (3366); *Nicolau Dobridor I.* (3363, 83, E); *Pârvu A.* (3301, P); *Popescu I. D.* (3352, 53, E); *Popescu Virgil* (3383, C, E, P); *Pușcă T.* (3326); *Segall Leon* (3374, 95); *Spathy René* (3374, 83, 91); *Ștefănescu Em.* (E, P); *Tailer G.* (3377, 82, 84, E); *Tănase T. C.* (R); *Tauber A.* (3271); *Teodorescu N.* (3342, A); *Un anonim* (3339, 80); *Vasilescu Bartolomeu* (3377, 80) *Vasiliu C. Ion* (3339, 45, 47, 69, 74, 80, 94, P); *Vasiliu M. I.* (3391); *Weisbuch M. A.* (3369, 91, 94); *Weiss S.* (3342, E); *Zaharia O. I.* (2929, 3374); *Zamfir I. D.* (3363, 83, C).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută* **cu îngrijire** *pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2461, 643, 829, 972, 3059, 86, 167, 73, 78, 99, 206, 16, 27, 33, 44, 52, 58, 72, 82, 99, 303, 11, 12, 17, 21, 22, 24, 30, 32, 42, 44, 48, 49, 52, 62, 66, 71, 72, 73, 78, 82, 84, 87, 89, 92, 93, 97 și 98 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. G. **Borneanu,** (adresa: Str. Basarabia, 45, Bucureşti).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Dm Asociațiunia pentru Cultură și Literatură Poporului Român din Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.
NUMĂRUL 9. — MAI 1926.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

SUMARUL

1. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice“ din anul 1926 . . . . . *G. Țițeica.*
2. Asupra dreptelor ale căror toate punctele sunt depărtate egal de trei drepte date. Drepte echidistante . . . . . *N. Abramescu.*
3. Câteva proprietăți ale unei clase de patrulatere . . . . . *Cristea Mateescu.*
4. Note Matematice: 47—50.
5. Bibliografii.
6. Cereri.
7. Probleme rezolvate: 2635, 3024, 3078, 3112, 3187, 3216, 3233, 3345, 3374, 3391.
8. Exerciții: 51—58.
9. Probleme propuse: 3411—3420.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1926

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu**, Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci**, Inginer Inspector General, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu**, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 85, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 64, 75, 76, 78, 79, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 25, 33, 35, 41, 43, 44, 50, 54, 60, 61, 64, 71, 72, 79, 85, 87, 89, 90, 93, 96, 97, 98, 400, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „Gazeta Matematică“ (Fabrica de Chibrituri din Bucureşti), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXI *SUPLIMENT* No. 9

DARE DE SEAMĂ

asupra mesei comune a membrilor şi corespondenţilor „Gazetei Matematice", din seara zilei de 10 Aprilie 1926, cu prilejul Concursului anual.

Reuniunea anuală a „*Gazetei Matematice*" cu ocaziunea Concursului a fost totdeauna o manifestare cu un deosebit înţeles moral, ea fiind dovada, prin prezenţa şi entuziazmul corespondenţilor, că o muncă statornică şi dezinteresată ca aceea a semănătorilor de idei şi sentimente, din fruntea „*Gazetei*", este răsplătită de frumoasele rezultate ce se obţin la Concurs.

Imprejurările nu mi-au prilejuit putinţa de a luà parte la examinare; dar convorbirile cu examinatorii, mi-au dat convingerea că dacă numărul concurenţilor variază, calitatea şi pregătirea lor rămâne mereu la nivelul ridicat, pe care îl creiază o muncă neobosită şi o activitate cinstită şi conştiincioasă la „*Gazeta Matematică*".

Ar fi însă o greşală a se judecà rezultatele activităţei „*Gazetei*" numai după rezultatul concursului dintr'un an anumit; ea face mult mai mult, căci nu numai canalizează şi amplifică o ramură de activitate ştiinţifică, dar creiază în acelaş timp în tineret o solidă armătură morală şi sufletească.

Reuniunea din acest an a dat loc unei alte manifestări îmbucurătoare: manifestarea, drept recunoaştere a marei contribuţii aduse de „*Gazetă*" pe ogorul culturei naţionale, din partea Guvernului, reprezentat prin Domnul Subsecretar de Stat, Inginer MIHAIL MANOILESCU, fost şi D-sa strălucit corespondent al „*Gazetei*". Ea priveşte înfăptuirea locaşului propriu „*Gazetei*", pentru care D-sa a făgăduit tot sprijinul, chiar în cursul acestui an.

Rezultatul technic al Concursului din anul acesta se vede în alt loc; mă voiu mărgini, în cele ce urmează, să redau cele petrecute la masa comună din seara de 10 Aprilie, ţinută în sala Manufacturei de tutun Belvedere, care reia astfel tradiţia de dinainte de războiu, disputând Fabricei de Chibrituri dela Filaret, dreptul de găzduirea oaspeţilor „*Gazetei*" pentru o seară.

După luarea primului contact, între membri şi corespondenţi, luăm loc la marea masă în formă de „U" din centrul sălei.

In răgazul ce mi-l îngăduie studiul frumoaselor menuuri, al mesei frumos împodobite cu flori, al sălei ornamentate cu guirlande de verdeaţă, toate trădând gustul organizatorilor şi dragostea ce au pus pentru a face cât mai atrăgătoare puţinele ceasuri petrecute împreună, fac câte-va observaţiuni asupra modului cum este alcătuită masa şi sunt repartizate locurile:

1. Masa în formă de „U" adăposteşte în partea centrală pe membrii, iar

pe cele două laturi pe corespondenţi. Raportul între lungimea bazei şi suma lungimei laturilor, ereà oarecum imaginea raportului ce există între entuziazmul trecutului şi prezentului, pentru „*Gazeta Matematică*".

2. O linie de demarcaţie destul de netă, ereà trasată între membrii platonici şi cei activi. Rolul simbolic de stâlpi ai acestori membri din urmă, ereà pus în relief de vecinătatea stâlpilor sălei, în dreptul cărora ereau aşezaţi.

In mijlocul lor ereà D-l Subsecretar de Stat la Ministerul de Finanţe, înconjurat de cele patru coloane, pe cari a rezemat şi reazămă edificiul „*Gazetei Matematice*", D-nii: IOACHIMESCU, IONESCU, CRISTESCU şi ŢIŢEICA.

Au mai luat parte la masa festivă a Gazetei, următorii D-ni:

ING. T. ALEXANDRESCU, directorul Manufacturei de tutun Belvedere, AL. BUNESCU, I. BUŞILĂ, M. CIOC, COL. C. FELIX, GH. M. FILIPESCU, R. GABRIELESCU, M. GHERMĂNESCU, R. IANCULESCU, GH. ILIESCU, GH. IOACHIMESCU, ADV. AL. IONESGU, LT.-COL. GH. LITEANU, S. MIREA, CR. MATEESCU, I. VASILIU, I. C. MITITELU, C. C. MITITELU, GH. NICHIFOR, CRISTEA NICULESCU, C. ORAŞANU, S. PAŞCANU, TH. REVICI, D. STAN, O. ŢINO, GR. ZAMFIRESCU şi CĂP. GR. ZAPAN.

Dintre corespondenţi, candidaţi la concurs anul acesta, au participat:

AL. C. BASARAB, GH. M. CĂLIN, SOLOMON M. FELDSTEIN, I. I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ, TELEMAC HULUBEI, A. T. IONESCU BUJOR, LAZĂR KATZ, VALERIU MANAFU, DUMITRU G. NESTOR, CONSTANTIN L. PILAT, CORNELIU N. POPESCU, AL. A. ROŞU, T. STOICESCU, G. TAILER, OTO BRAESTER, ION CHIRILĂ, HAIM COHN, GR. IOACHIM, CONST. T. IONESCU BUJOR, AVRAM LUPU, HAIM MARCOVICI, GRIGORE MAREŞ, ION M. MIU, TOMA I. PUŞCĂ, VIRGIL RÂPEANU, OZIAS SCHÄCHTER, TRAIAN ANGELESCU, NICOLAE BOTEA, MARIUS GEORGESCU, ADRIAN NOVAC, CONST. C. POPOVICI, GH. GH. VASILIU, ION VASILIU, EMIL ŞTEFĂNESCU.

Tradiţionala atmosferă de caldă familiaritate, rezultat al comunităţei de de amintiri, pentru membri, ai comunităţei de aspiraţiuni, pentru concurenţi, se stabileşte foarte curând.

Orchestra grănicerilor, ce ani dearândul a contribuit la darea unui colorit artistic, de un deosebit gust, ariilor cântate în timpul mesei, a reuşit şi anul acesta să-şi menţie neclintită poziţia, cu toate asalturile repetate date de postul de radiofonie instalat de Soc. „*Energia*". Loial este însă de a recunoaşte că munca deosebită depusă de D-l Ing.... al acestei societăţi a fost continuu contrariată de neterminabilele descărcări atmosferice din acea seară, ce veneau să se adaoge la condiţiunile, şi altfel destul de neprielnice, pentru acest fel de producţiuni în Bucureşti.

La şampanie, cel dintâiu ia cuvântul D-l Subsecretar de Stat dela Ministerul de Finanţe, M. MANOILESCU, care ridică paharul pentru cel mai mare matematician al nostru, pentru Acela care a trasat cea mai frumoasă epură pentru noi, hotarele României Mari de astăzi, pentru Majestatea Sa REGELE FERDINAND I şi pentru Familia Regală.

Asistenţa ascultă în picioare imnul naţional.

D-l G. ŢIŢEICA relevă faptul că pentru întâia oară un reprezentant al Guvernului ia parte la masa comună a „*Gazetei*". Aceasta se poate explică atât prin faptul că se recunoaşte astfel că „*Gazeta*" este o instituţie venerabilă, deasupra oficialităţei, cât mai ales prin aceea că sentimentele ce leagă pe re-

prezentantul Guvernului de Gazetă, l-au făcut să se supună puternicei legi a amintirilor, grație căreia "*Gazeta*" : „*poți s'o părăsești, dar nu poți s'o uiți*".

Închină pentru D-l Subsecretar de Stat M. MANOILESCU.

D-l Ing. ALEXANDRESCU, Directorul Manufacturei de Tutun Belvedere, grație buna voinței căruia masa comună a avut loc în localul acestei Manufacturi, — își reamintește cu plăcere de a i se fi publicat în „*Gazeta Matematică*" de acum 30 de ani, soluțiile problemelor propuse la Bacalaureat. In calitatea sa de vechiu colaborator al „*Gazetei*", se simte fericit de a puteà primi pe membrii și concurenții „*Gazetei*" și închină pentru prosperitatea Societății „*Gazeta Matematică*".

Închină deasemenea pentru D-l Subsecretar de Stat la Finanțe M. MANOILESCU.

D-l V. CRISTESCU reamintește că acesta este cel de-al 20-lea concurs al „*Gazetei Matematice*" și face un mic istoric al acestor concursuri, ce se termină cu masa comună, care în primii ani s'a ținut la D-l A. IOACHIMESCU acasă. Din anul 1910 până la războiu, aceste mese s'au dat la Manufactura de Tutun Belvedere. După războiu, și până anul acesta, s'a beneficiat pentru ele de ospitalitatea Fabricei de Chibrituri Filaret. In sfârșit, anul acesta, Manufactura Belvedere își ia revanșa, spre beneficiul membrilor și al corespondenților, cari apreciază deplin rezultatele acestei rivalități.

Închină pentru D-nul M. MANOILESCU. De asemenea pentru conducătorii Manufacturei de Tutun Belvedere, D-nii: I. ALEXANDRESCU și C. MITITELU.

D-nul I. IONESCU, completând pe D-nul CRISTESCU, relevă concursul dat, pentru perfecta reușită a reuniunei, de către D-nul I. VASILESCU, căruia i se cuvin deasemenea mulțumiri și de care este sigur că se va întrece pe sine însuși anul viitor.

D-nul G. ȚIȚEICA răspunde cererilor de a se auzi lecțiunea tradițională de morală, arătând de ce trebue menținută această tradițiune cu tot caracterul oficial, pe care îl are masa din acest an. Originile acestei cuvântări se confundă cu însăși primele mese comune, ținute la D-nul A. IOACHIMESCU acasă, când s'a spus sincer tinerilor concurenți că trebuie folosită ocaziunea pentru a li se insuflă și principii morale.

Continuând această sănătoasă tradiție, D-nul G. ȚIȚEICA arată că dacă unui tineret însuflețit de așà de frumoase calde și curate sentimente, cum sunt concurenții „*Gazetei*", i se mai dă sfaturi, aceasta se face pe baza a două postulate.

Postulatul I: Ca în urma ostenelilor și încordărei cerute de Concursul „*Gazetei*", în urma unei mese copioase (bine stropite cu vinuri excelente și bine afumate cu țigări delicioase), concurenții mai sunt în stare să asculte, și mai ales să asimileze o cuvântare cu fond moral.

Postulatul II: Ca în circumstanțele sus amintite, această cuvântare va merge la inima fiecărui candidat.

Dar chiar în afară de aceste postulate, D-sa ca mai în vârstă și mai cu experiență, are dreptul și datoria de a atrage atențiunea tinerilor asupra amenințărilor sub care se află Țara noastră mai mult decât orice Țară din Europa. Aceste amenințări le cunoaștem cu toții și o simplă privire pe harta Europei ni le va reaminti în orice moment.

In interiorul țării, mari probleme sociale se pun, născute din procesul de închegare al acestui neam viguros după secole de despărțire.

Acest admirabil popor românesc numai acum începe să renască. Apăsat

sute de ani de imprejurări vitrege, el a dus o viaţă grea, care l-a împiedicat să-şi valorifice însuşirile şi să-şi ocupe locul cuvenit în mersul înainte al omenirei.

Este acum momentul, ca eşiţi din greutăţile trecutului, aceste însuşiri să se manifeste şi este rolul tinerimei ca să dea măsura puterilor cu care este înzestrat acest neam.

Oricât de grele ar fi problemele ce se pun, trebue să avem credinţa că ele pot fi totuş soluţionate, ca şi cele matematice, cu condiţia de a fi urmărite şi rezolvate prin sforţările comune ale naţiunei întregi. Numai astfel se va putea face Renaşterea Ţării.

Corespondenţii *„Gazetei"*, ca unii ce sunt urmăriţi ziua şi noaptea de problemele ce-i preocupă, nu pot fi străini sentimentului de dragoste către ţară. Pentru refacerea ţării, în afară de chestiunile economice şi financiare care sunt arzătoare, mai trebue să fie la bază si un *program sufletesc*, care ne spune că orice fapt pe care îl facem, contribue în bine sau în rău la binele Ţării.

Fiecare individ este dar responsabil faţă de Neam, prin faptele sale.

Unele pot micşorà cultura neamului, ceeace constitue o trădare. Înălţarea culturei din contră, este un adaos la patrimoniul general.

Orice sforţare dar, cât de mică, găseşte reflexul în progresul general al Ţării şi tot astfel trebue privită şi munca modestă ce se depune de corespondenţi la *„Gazeta Matematică"*. D-sa Ridică paharul şi închină în sănătatea concurenţilor, cărora le urează: *„Bine aţi venit la concurs, transformaţi iluziile în realităţi"*.

Din partea concurenţilor, se ridică D-nul Anghelescu (elev cl. VIII, Giurgiu), care îşi propune să strângă intervalul în care se găsesc simţimintele concurenţilor, prin metode a *părţilor proporţionale şi a lui* Newton.

Arată că ia cuvântul, nu numai din datorie, ci ca un ecou născut de bunăvoinţa membrilor *„Gazetei"*. Prin reuniunea comună, s'a arătat că *„munca"* şi *„Petrecerea"* sunt două variabile în funcţie de parametrul *om*. O dezvoltare normală a individului, nu poate fi decât atunci când raportul $\frac{\text{muncei}}{\text{petrecerea}} > 1$, raport pe care a reuşit a-l insufla *„Gazeta Matematică"* tuturor corespondenţilor săi.

Gazeta este rezultanta forţelor care contribue la prosperitatea ei: membri şi corespondenţi.

D-nul Anghelescu închee pentru rezultantă şi componentele ei.

Se ridică apoi D-nul Subsecretar de Stat M. Manoilescu, care vorbeşte acum în calitate de vechiu corespondent al *„Gazetei"*. Odinioară, acum 16 ani, lua şi D-sa parte, în calitate de corespondent, la concursul din cel de al XIV-lea an de apariţie al revistei.

Astăzi, în anul al XXXI-lea, se regăseşte din nou cu profesorii săi de odinioară, din grupul cărora se desprind impresive figurile celor *„patru"*. D-sa arată în formule conchise ce înseamnă D-nii: I. Ionescu, V. Cristescu, G. Ţiţeica şi A. G. Ioachimescu pentru *„Gazeta Matematică"*, pentru învăţământul matematic, pentru Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele de odinioară şi mai ales pentru Cultura Românească de orice grad.

Prin activitatea lor constantă şi neobosită, ei au devenit sinonimi cu

„*Gazeta*". Neezitând a se pune ştiinţa cea mai înaltă şi prestigiul catedrei Universitare în slujba potolirei setei de cunoştinţi elementare, s'a dat astfel un exemplu nepreţuit şi o nouă impulsie acestei sete. Căutând îndărăt îşi aminteşte de exemplu de admirabilele prelegeri asupra Gravitaţiunei, ce se ţineau la Şcoala de Poduri şi Şosele, şi cari, inutile poate pentru ingineri, nu puteau lipsi de a ridică pe elevi la o înălţime sufletească, pe care numai poezia Matematicei o poate da.

Dar admiraţia subiectivă ce o are pentru cei „*patru*", nu-l poate împiedica să examineze în chip obiectiv opera realizată de „*Gazeta Matematică*".

In curs de ani de zile, ea a dat numeroşi oameni de ştiinţă, care au ştiut să-şi utilizeze cunoştinţele în folosul comun, atât în Războiul Neamului, cât şi mai pe urmă în perioada de Refacere a Ţărei.

In timpul luptelor crâncene, fie ca luptători modeşti. dar conştiincioşi, fie îndărătul frontului la Artilerie, împroşcând inamicul cu formulele „*Gazetei*", foştii colaboratori şi-au făcut pe deplin datoria. Mai târziu, în refacere, ei au adus în serviciul Ţărei cunoştinţele technice, matematice, disciplina şi calităţile dobândite prin muncă încordată şi continuă ce le-o cereà „*Gazeta*".

Alături de cunoştinţele matematice, „*Gazeta*" a dat colaboratorilor săi două calităţi fundamentale :

Intâiu, *modul de a gândi obiectiv*, oricare ar fi fost ulterior ramura lor de activitate, într'o ţară unde „*Gazetele*" celelalte se muncesc tocmai spre a deturnà cetitorii lor dela acest fel de gândire.

Al doilea, *fondul de idealism*, într'o vreme când viaţa culturală a neamului nostru era la o criză, iar curentele generoase ce hrăniseră generaţiile precedente, nu mai prindeau.

Aceste rezultate de seamă, au fost dobândite de o mână de Ingineri şi de Profesori, lucrând pentru nevoile tineretului cu cel mai mare devotament şi dezinteresare. „*Gazeta*" era şi este un punct luminos, o şcoală de idealism, ce este menită să trăiască peste generaţii.

Astăzi suntem datori să-i aducem nu numai omagiile noastre, ci şi *răsplata* acestei munci depuse.

Tinerii să-i aducă prinosul gândirei lor. Profesorii, ceiace este mai bun în preocupările lor, iar aceia ce au eşit din câmpul Ştiinţei, şi cari poate nu ar mai îndrăzni să înfrunte azi rigurozităţile unui examen, datori sunt să-i dea *concursul* lor.

Călăuzit de această ideie şi datorie, D-nul Subsecretar de Stat al Ministerului de Finanţe, declară în numele Guvernului, pe care îl reprezintă, că va da Gazetei fonduri, pentru a-şi construi un etaj anul acesta, când urmează a se pune şi piatra fundamentală.

D-l M. Manoilescu, îşi închee cuvântarea sa, închinând în sănătatea celor „patru pietre morale ale edificiului".

Generoasa făgăduinţă a D-lui Subsecretar de Stat al Ministerului de Finanţe, este primită cu cel mai mare entusiasm şi cu aplauze unanime de întreaga asistenţă, care vede în acest gest o prea bine meritată recunoaştere a marei influenţe morale şi culturale exercitată de „*Gazetă*" asupra tineretului şi totodată chezăşia unei dezvoltări şi mai prospere în viitor.

Cu acest gest, ideia locaşului propriu al „Gazetei Matematice", păşeşte spre o realizare materială.

D-l A. G. Ioachimescu luând cuvântul, relevă că s'a dat cuvenita atenţiune *Forţei Morale*, despre care s'a ocupat D-l G. Ţiţeica. Urează D-lui Ţiţeica să facă ani mulţi această cuvântare tradiţională, tot mai caldă şi mai cu drag. D-l M. Manoilescu, dând importanţa meritată *Forţelor Culturale*, a făgăduit să înceapă clădirea „Gazetei Matematice". Nu trebuie însă uitată o a treia forţă, care este reprezentată prin *Armată*. „Gazeta" a fost întotdeauna în cei mai buni termeni cu Armata, căci şi Ofiţerii îşi bazează cunoştinţele lor pe Technică şi Matematică. De aceea, reprezentanţii Armatei, au fost mereu în mijlocul membrilor „Gazetei" şi sunt şi la această masă comună, fiind reprezentaţi prin D-nii: Colonel Felix, Lt.-Col. Liteanu şi Căpitan Zapan.

D-l Ioachimescu încheie, închinând paharul pentru reprezentanţii Armatei ca şi pentru tinerii concurenţi cari vor intră în armată. Le urează să-şi iubească Ţara şi Meseria.

D-l I. Ionescu, ca întemeietor al „Gazetei", se crede dator a atrage atenţia că avem în mijlocul nostru pe cel mai asiduu cetitor al revistei, care citeşte toată „Gazeta" de câte 2-3 ori. Acesta este D-l Gh. Iliescu, care face desinteresat, greaua muncă de corector al „Gazetei", şi o face să apară matematiceşte, la 15 ale fiecărei luni. Corespondenţii fac o caldă manifestaţie de simpatie D-lui Iliescu.

D-l Avocat A. Ionescu, ia cuvântul şi se adresează tinerilor concurenţi, cărora le aduce laude că după munca grea de şcoală, au renunţat la vacanţă pentru a se pune la o muncă şi mai grea, a concursului „Gazetei", răsplătită prin sărbătorirea de astă seară.

Alături de cuvântările frumoase ale celorlalţi vorbitori, face şi D-sa două constatări experimentale:

„I-a constatare". Toţi colaboratorii „Gazetei", al căror suflet a fost odată legat de „Gazetă", nu se mai pot despărţi de ea şi revin mereu la dânsa".

D-sa explică aceasta prin rolul covârşitor ce-l are „Gazeta" asupra structurei sufleteşti, nu numai asupra celor ce au o activitate ştiinţifică, ci şi asupra celor cu activităţi politice, sociale, etc. Educaţia pozitivă pe care o insuflă „Gazeta", contribue ca actele noastre să devină cugetate, fie ele din domeniul vieţei publice, private sau profesionale.

„II-a constatare". Foştii colaboratori ai „Gazetei" s'au înălţat la cele mai de seamă trepte sociale şi ca exemplu D-sa dă pe D-l Sub-Secretar de Stat M. Manoilescu, care a fost şi dânsul un asiduu corespondent al „Gazetei Matematice". Asupra corespondenţilor de azi, veghiază toţi aceşti foşti colaboratori, pentru care orice progres al elevilor, este prilej de mulţumire şi de interes.

O nemulţumire avem în acest an şi ea trebue neapărat corijată; trebue ca numărul candidaţilor să covârşească pe acela al membrilor „Gazetei Matematice". Dar mai ales, *trebue ca toate colţurile* Ţării să fie reprezentate la concursurile *„Gazetei Matematice"*.

Candidaţii de azi trebue să ducă peste tot iubirea pentru *„Gazetă"* şi dragostea de ştiinţă pozitivă, pe care aceasta o reprezintă. *„Gazeta"* a trecut prin vremuri grele, aşa că azi această operă este mai leznicioasă decât odinioară, căci deşi localul ei numai acum se începe, există însă o clădire mult mai importantă în fiinţă, templul imaterial al ştiinţei fondat de cei patru.

Cei tineri nu numai că trebuie să se închine în acest templu, ci trebuie să se şi pregătească de preoţie, pentru a continuă opera fondatorilor şi a o amplifică.

Clădirea materială este şi ea începută azi, cu gestul D-lui MANOILESCU. Închină în sănătatea candidaţilor, şi-i roagă să se preocupe necontenit de opera începută şi încheie, ridicând paharul pentru reprezentantul Guvernului, precum şi pentru noul Guvern, căruia îi urează o activitate trainică, sănătoasă şi *românească* întru totul.

D-l V. CRISTESCU citeşte scrisori din partea membrilor împiedicaţi de a lua parte la masa „Gazetei", printre cari:

D-l Ing. C. MALCOCI, reţinut de boală acasă, urează Societăţii să reuşească a-şi apropiă câţi mai mulţi oameni de bine, în măsură de a-i consolidă situaţia materială, care împreună cu entuziasmul membrilor săi, să-i asigure existenţa în viitor.

D-l P. SERGESCU se scuză de asemenea şi trimite cele mai călduroase urări „Gazetei" şi „stâlpilor", ca din partea unuia pe care *„Gazeta"* l-a format.

D-l O. ŢINO comunică omagiile D-lui ANGHELUŢĂ (Cluj), care e reţinut de a lua parte la concurs.

D-l IOACHIMESCU se ridică şi spune că nu poate lăsă un lucru neobservat şi anume, că în mijlocul candidaţilor nu se găsesc reprezentanţii noilor provincii.

La ultinul concurs dinainte de război, prevăzându-se parcă consecinţele lui pentru Neamul Românesc, s'a făcut urarea de a ne revedeà după războiul României, din toate părţile românizmului. Indeplinindu-se visul, s'a sperat că vom fi împreună Români „dela Sighet, la Bazargic şi dela Cetatea Albă, la Timişoara".

După rezultatele strălucite obţinute de reprezentanţii liceului din Arad anii trecuţi, aceste speranţe păreau îndreptăţite. Trebuie însă să recunoaştem cu întristare că dăm îndărăt. Anul acesta singurul concurent din afara vechiului Regat, din Timişoara, e şi el „Regăţean".

Constatarea nu e îmbucurătoare şi să sperăm că se va remediă şi că la concursurile viitoare vom aveà reprezentanţi autochtoni din toate ţinuturile *„dela Nistru până 'n Tisa"*.

Este de datoria celor ce au contact şi influenţă în noile ţinuturi, să intervină. Cauza mai trebuie căutată şi în puzderia de reviste Matematice, ce înfloresc în fiecare orăşel. In afară de una, două, care se prezintă în condiţii mai bune, şi al căror rost poate fi justificat prin necesitatea unei reviste intermediare, pentru formarea primelor cunoştinţe matematice, restul se prezintă în condiţii rele, din toate punctele de vedere.

In această ordine de idei, D-sa se referă la excelentul articol al D-lui Colonel BUICLIU (v. „G. M.", Martie 1926), prin care se arată tot răul ce rezultă din această împrăştiere a activităţei celor cu dragoste de Matematici, atât în ceeace priveşte difusarea cunoştinţelor matematice printre tineretul liceelor noastre, cât şi pentru cultura generală a elevilor înşăşi. Este dar momentul potrivit ca să se renunţe la aceste tendinţe centripetale, pentru ca cel puţin odată pe an să se întrunească Românii din toate părţile Ţărei, toţi cei legaţi prin această frumoasă pasiune: dragostea de matematici.

D-l G. NICHIFOR, inspirat de faptul că acum 16 ani de zile, D-l Inginer

M. MANOILESCU erà printre concurenţii „Gazetei“ la capul mesei, iar azi se află intruna din cele mai inalte drepte sociale, şi totuşi a venit la masa „Gazetei“, interpretează aceasta ca o dovadă că D-sa, oricât de sus s'ar ridică, va ştì intotdeauna să se apropie de cei mici. D-l MANOILESCU, ca liceean, a făcut o poezie care s'a publicat.

D-l G. NICHIFOR spune că a făcut şi D-sa o poezie, căreia ii dă citire şi anume, o fabulă ce este inspirată de faptele de mai sus.

CEI DOI INFINIŢI.

— FABULĂ —

Când-va pe o cărare
Mergeà cu ingâmfare
O mândră *arătare!*
Ce-i zic *„infinit mare“*.

In mersu-i de voinic
Măreaţa arătare,
Striveà cu nepăsare
Un praf *„infinit mic“*.

Dar iată, se ridică
Un fir de praf semeţ
Şi zise fără frică
Ilustrului drumeţ:

— Mă iartă dar îmi pare
Că ne cunoaştem bine!
— Tu! un biet praf.... mirare!
Să te cunoşti cu mine!

— Ba mai mult, zise micul
De nu vă supăraţi
In termeni matematici
Ne zice lumea fraţi!

— Cum tu cu mine frate?
Eşti îndrăsneţ îmi pare....
N'ai auzit fărtate
De *infinitul mare“?*

— Te ştiu răspunse praful
Dar este o transformare,
Ce în *nimic* preface
Chiar *infinitul mare!*

Şi el n'apucă bine
Cuvântul să-şi termine
Când aide de-o dată
Vântu 'ncepù să bată.

Tot praful într'o trombă
Transformă aprig vântul
Lovind ca şi o bombă
Şi măturând pământul!

Din *infinitul mare*
După acest groaznic jaf
A mai rămas îmi pare
Numai un fir de praf!

Morala scumpi-amici
Nu o mai spun aici,
Căci sunt convins că oricine
O simte ca şi mine!!

D-l. căpitan ZAPAN îşi exprimă speranţa şi bucuria ca anul viitor „Gazeta“ va aveà local propriu.

In semn de mulţumire D-sa propune, şi adunarea aplaudă cu entusiasm, ca D-l. Subsecretar de Stat MANOILESCU să intre ca membru în Soc. *„Gazeta Matematică“*.

In încheere, D-l. căp. ZAPAN reaminteşte de activitatea neuitatului I. D. TEODOR, care a iubit atât de mult Gazeta, şi care a făcut atât de mult

pentru propăşirea ei, închină în memoria mult regretatului membru al „Gazetei".

Asistenţa se ridică în picioare!

D-l Cristea Niculescu arată fondul înalt sufletesc care stă la baza activităţei *„Gazetei"* şi care este: *Iubirea*. *„Gazeta"* a fost şi este susţinută prin dragostea membrilor, ingineri şi profesori, care iubind pe elevi, caută să-i înalţe din punct de vedere moral şi intelectual. Masa comună a „Gazetei" trebuie privită ca o taină a cuminecărei sufleteşti. Tăria *„Gazetei"* stă tocmai în acest puternic sentiment al dragostei şi din acest sentiment înalt, ea trăieşte şi prosperă.

Grelele probleme ce se pun azi ţărei noastre, nu-şi pot găsi deslegare decât graţie tot acestui sentiment cristalizat în *dragostea de Ţară şi de Meserie*. La frumoasele cuvinte spuse de cei dinaintea D-Sale, D-l Cristea Niculescu nu mai poate adaogă de cât o manifestare a emoţiei şi iubirei sale pentru *„Gazetă"*, cântând din vioară câteva bucăţi duioase, ce produc o adâncă impresie.

D-l A. Bunescu. în calitate de Secretar de şedinţă, îşi exprima bucuria de a puteà trece in curând această însărcinare D-lui Subsecretar de Stat M. Manoilescu, ca fiind cel mai nou admis la *„Gazetă"*. Făcând aluzie la calificarea de *„platonician"* matematic, pe care o are, D-sa mărturiseşte că a devenit mai materialist şi aşteaptă cu nerăbdare timpul, pe care-l speră cât mai apropiat, când va puteà beneficià de confortul şi ospitalitatea Casei *„Gazetei"*. Îşi exprimă de asemenea speranţa, că programul de împroprietărire al noului Guvern, nu va omite *„Gazeta Matematică"*, al căreia loc pe Calea Griviţei, este prea îndepărtat.

Ca încheere, D-l Bunescu, făcând elogiul muncei desinteresate pe care o depun profesorii de liceu, membri ai *„Gazetei"*, le compară activitatea cu a Sf. Ioan Botezătorul, care iniţiază pe neofiţi în marea taină, şi închină în sănătatea lor.

D-l A. G. Ioachimescu, a cărui cuvântare precedentă a făcut o adâncă impresie, se simte dator să semnaleze şi un fapt foarte îmbucurător, şi anume entuziasmul tinerilor membri, cari au luat locul bătrânilor examinatori, reţinuţi de alte însărcinări. Asistând la examinări, D-sa a putut cu bucurie vedeà la tinerii examinatori nemărginită dragoste pentru *„Gazetă"*, însoţită de o adâncă cunoaştere a resorturilor sufleteşti ale concurenţilor.

Întorcându-se la elevi, D-sa le arată necesitatea de a-şi împodobi sufletele şi cu alte cunoştinţe de cât cele matematice şi în deosebi *cu dragostea de Artă*.

D-l O. Ţino, în numele tinerilor examinatori, de care a vorbit atât de elogios D-l Ioachimescu, se ridică pentru a răspunde. In primul rând D-sa arată cât de grele sunt azi condiţiunile în care membrii *„Gazetei"* îşi jertfesc din timpul şi activitatea lor. Comparat cu acestea şi cu activitatea ce se cereà odinioară corespondenţilor, pentru a fi admişi la marea probă a concursurilor, elevii se bucură de condiţii extrem de uşoare.

Prinşi în vârtejul activităţei lor intense, şi având de luptat cu greutăţile vieţei, tot mai mari azi, membrii *„Gazetei"* găsesc totuşi putinţa de a jertfi din timpul lor, pentru a ajutà pe corespondenţi să-şi consolideze cunoştinţele. Sunt unii membrii cari, în afară de aceasta au o activitate de un înalt caracter ştiinţific şi Naţional; alţii sunt prinşi de ocupaţiunile lor în industrie şi în

diferite întreprinderi, cari le cer toată energia lor. In aceste împrejurări ei îşi fac totuşi toată datoria către „*Gazetă*".

Dl. O. Ţino urează tuturor acestor membrii prosperitate în activitatea lor şi a întreprinderilor lor.

Adresându-se celor vechi, Dl. O. Ţino îi roagă să nu lase pe tineri singuri în îndeplinirea grelei sarcini, şi să continue mai departe marele lor rol de îndrumători în formarea caracterelor.

Intorcându-se în fine către corespondenţi, D-sa le arată cum membrii tineri încearcă a se plăti de datoria contractată faţă de „*Gazetă*" şi ridică paharul pentru tinerii corespondenţi, urându-le ca şi ei la rândul lor să-şi plătească cât mai curând cu dragoste această datorie.

D-nul V. Cristescu încheind partea consacrată cuvântărilor, face un scurt istoric al evoluţiei Concursurilor „*Gazetei*", începând cu primul din anul 1902, ţinut pe baza de probleme, şi al cărui premiant a fost tocmai vorbitorul precedent, D-nul O. Ţino.

Concursul al doilea a fost în 1904, şi a fost pe baza de articole la „*Gazetă*".

A urmat apoi o serie de Concursuri, dela 1905 la 1908 inclusiv, ţinute cu chestiuni identice pentru toate clasele, redactorii mergând din oraş în oraş, în diferite centre unde se ţineau concursurile.

Din anul 1909 concursurile au luat caracterul pe care îl au şi astă-zi, adică de reuniuni la sfârşitul vacanţei Paştelor, ţinute în Bucureşti.

Cetind listele premianţilor „Gazetei" până în 1916 inclusiv, D-l V. Cristescu atrage atenţia că numeroşi dintre aceştia sunt azi membri de ai Societăţei, contribuind la bunul ei mers. D-l Subsecretar de Stat M. Manoilescu, figurează ca premiant în 4 ani consecutivi, iar numeroşi alţi Ingineri şi Profesori, ce fac cinste ocupaţiei lor, figurează deasemenea pe aceste liste de premianţi.

Incheind, D-l Cristescu îi dă ca exemplu corespondenţilor prezenţi, de ceeace poate face munca cinstită şi desinteresată.

D-l Ioachimescu declară cu aceasta închisă partea oficială şi invită pe corespondenţi să arate ceiace sunt în stare să facă şi în alte domenii de activitate, decât cel matematic.

Intr'o atmosferă de caldă comunitivitate sufletească, se încep numeroase convorbiri între membri şi corespondenţi şi se improvizează un frumos program artistic.

Acesta, ca în toţi anii, este rezultatul aportului vechilor membri şi ai entusiasmului, timid la început şi tot mai simţit spre sfârşitul reuniunei, al tinerilor corespondenţi.

Au contribuit în deosebi D-nii: Ghermănescu, Lt. Col. Liteanu, G. Nichifor, C. Orăşanu, precum şi D-nii Elevi: A. Anghelescu, A. Ionescu-Bujor, C. Ionescu-Bujor, Popovici, Vasiliu, etc. etc. cântând diferite bucăţi de muzică clasică şi populară, declamaţii, diferite imitaţii, etc. etc.

Spre orele trei din noapte, în mijlocul veseliei generale, se încinge tradiţionala horă, la care entusiasmul tinereţei se înfrăţeşte cu bucuria membrilor de a fi petrecut o seară atât de înviorătoare ca atmosferă morală. Reuniunea ia apoi sfârşit, adăogându-se o nouă verigă la lanţul solidarităţei, ce leagă pe membrii de corespondenţi.

Ing. S. Paşcanu.

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1926.

Concursurile «Gazetei Matematice», anunţate cu regularitate toamna, ţinute cu aceeaş regularitate primăvara, îşi au la rând fiecare farmecul, interesul şi particularitatea sa. Pentru examinatori, cei mai mulţi din ei concurenţi şi premiaţi de altădată, pulsul acesta anual al tinereţei matematice e mai mult decât o curiozitate firească, e un semn viu al progresului, pe care fiecare ţine să-l determine precis, precum se determină o speranţă matematică. Aşà se explică curiozitatea şi a membrilor vechi şi a celor mai noi ai Societăţii noastre în urmărirea peripeţiilor concursului, dela supravegherea lucrărilor scrise, teoretice şi practice, la hărţuiala aceea pitorească a probelor orale, când candidatul rămâne uneori singur surprins, că o chestiune pe care credeà că o ştie şi o stăpâneşte, în realitate n'o pătrunsese în de ajuns.

Ca în toţi anii, colegii noştri, D-nii: MALCOCI şi ILIESCU au organizat, cu toată grija, amănuntele materiale aşà de esenţiale concursului. Hârtie, cerneală, sugătoare, hârtie milimetrică, problemele tipărite sub plic, camionetă specială pentru transport la masă şi la concurs, toate au fost pregătite şi supraveghiate.

Deasemenea, D-l G. THIERRIN a primit în gazdă în Institut pe candidaţii fără familie în Bucureşti, iar D-l Profesor D. BUNGEŢIANU a încuviinţat, ca totdeauna, ţinerea concursului în sălile laboratorului de Căldură şi Gravitate. D-l A. G. IOACHIMESCU a reuşit să obţină pentru ţinerea concursului mari înlesniri.

D-nul inginer ALEXANDRESCU, Directorul Manufacturii de tutun Belvedere şi D-l CL. MITITELU au organizat Masa comună, la care ne-a făcut cinstea să asiste şi s'o prezideze D-l M. MANOILESCU, actual subsecretar de Stat la Finanţe, fost distins corespondent şi de mai multe ori premiant al «Gazetei».

Tutulor le aducem cele mai bune mulţumiri şi toată recunoştinţa pentru osteneala dată şi serviciile aduse.

Comisia de examinare a fost compusă din D-nii: C. MATEESCU, pentru Geometrie şi Algebră la clasa VII, Loc.-Colonel LITEANU, pentru Trigonometrie, CL. MITITELU, pentru Mecanică, G. NICHIFOR, pentru Geometrie descriptivă şi Algebră la clasa VIII şi O. ŢINO, pentru Geometria analitică. Se înţelege dela sine că mulţi din membrii

«Gazetei», care au asistat şi dintre care unii au făcut parte altădată din comisiunea de examinare, au pus întrebări, dând astfel însufleţire concursului.

* * *

Odată cu ţinerea concursului, s'a anunţat în Noembrie 1925 şi darea premiului ANGHEL SALIGNY de 1000 lei «primului reuşit la un concurs de Matematici superioare, ţinut între elevii Anului I al Şcoalei Politechnice din Bucureşti, odată cu concursul general».

S'a prezintat un singur candidat, D-l EMIL ŞTEFĂNESCU, cunoscut ca harnic şi bun corespondent al «Gazetei» şi candidat acum pentru a cincea oară la concursurile noastre.

I s'a dat, de către cel care scrie aceste rânduri, o probă scrisă de Geometrie analitică şi alta de Calcul diferenţial şi integral. Cea dintâi a fost bună, a doua foarte bună, din toate punctele de vedere. La oral i s'au pus chestiuni din aceleaşi materii, destul de grele şi de delicate, şi a reuşit să iasă din greutăţi care uneori nu erau mici. Fără cea mai mică îndoială, iar nu din faptul că a fost singurul candidat, D-nul EMIL ŞTEFĂNESCU merită premiul „ANGHEL SALIGNY".

La concurs au fost înscrişi 36 de candidaţi, dintre care s'au prezintat 34. Au fost elemente foarte bune, au fost şi slabe. Ne-a părut rău că n'am avut reprezentanţi din toate părţile Ţării.

Rezultatul de anul acesta e bun. Au fost şi surprize: candidaţi foarte buni, din cauza unei probe nereuşite, n'au putut fi înscrişi în lista premiaţilor şi au rămas la menţiune, care e onorabilă.

1. Locul întâi în clasificarea noastră a fost acordat în unanimitate D-lui VALERIU MANAFU, elev în clasa VI la *liceul militar Mânăstirea Dealului*. Soluţia pe care a dat-o problemei teoretice de geometrie a fost magistrală, întrebuinţând metoda elementară, metode superioare (fascicule omografice, teoria conicelor), dând generalizări şi discutând de aproape problema. Problema practică de algebră a fost de asemenea foarte bine studiată, iar răspunsurile excelente de geometrie şi foarte bune de algebră au dovedit o intuiţie vie şi cunoştinţe întinse. I se acordă ca premiu: *Exercices de Mécanique* de P. AUBERT & G. PAPELIER, *Exercices de Géométrie Analytique* de P. AUBERT & G. PAPELIER (3 vol.) şi *Curs de Matematici Generale* de GH. BRATU.

2. D-l CONST. C. POPOVICI, elev în clasa VIII la *liceul In-*

ternat din Iaşi, vine în locul al doilea, mai ales prin răspunsurile sale orale sigure şi precise atât la algebră, dar mai ales la geometria analitică. Lucrarea scrisă de algebră e foarte bine făcută, cea de geometrie analitică e şi ea bună. I se dau ca premiu volumele: *Cours de Mécanique* de PAUL APPEL, *Géométrie Différentielle projective des réseaux* de G. ŢIŢEICA, *Calculul algebric* de TRAIAN LALESCU şi *Curs de Matematici Generale* de GH. BRATU.

3. In rândul al treilea vine D-l TRAIAN N. ANGELESCU, elev particular în clasa VIII la Giurgiu, pentru lucrarea scrisă de geometrie analitică, foarte bine şi sistematic studiată, pentru examenul oral de algebră, precum şi pentru celelalte probe, care au fost şi ele bune. I se dau ca premii: *Théorie des équations algébriques* de JULIUS PETERSEN, *Lecţiuni de teoria funcţiunilor* de DAVID EMMANUEL şi *Curs de Matematici generale* de GH. BRATU.

4. D-l NICOLAE BOTEA, elev în clasa VIII la *liceul Cantemir* din Capitală, a trecut o probă orală de algebră, care a dovedit cunoştinţi întinse şi sigure. Proba scrisă de algebră şi cele două probe de geometrie analitică, dintre care cea scrisă cu observare interesantă geometrică, au fost mai mult decât bune. I se dau ca premiul volumele: *Cours de Mécanique* de PAUL APPELL, *Géometrie Différentielle projective* de G. ŢIŢEICA şi *Curs de Matematici generale* de GH. BRATU.

5. D-l GR. IOACHIM, elev în clasa VII la *liceul Militar*, Iaşi, a ieşit foarte bine la oralul de algebră, dar binişor la oralul de mecanică; celelalte probe bune. I se dau ca premiu: *Calculul algebric* de TRAIAN LALESCU, *Distanţele cereşti şi structura universului* de G. DEMETRESCU şi *Curs de Matematici generale* de GH. BRATU.

6. D-l G. TAILER, elev în clasa VI la *liceul Codreanu*, Bârlad, a eşit fóarte bine la trigonometrie, bine la oral de algebră, dar la lucrarea, bună de alfel, de algebră, a făcut curbele greşite. I se dau ca premiu volumele: *Exércices de Géométrie Analytique* de P. AUBERT & G. PAPELIER (t. III), *Exerciţii de Mecanică* de ERNEST ABASON şi *Curs de Matematici generale* de GH. BRATU.

7. D-l GR. MAREŞ, elev în clasa VII la *liceul Ferdinand I* din Bacău, a făcut o foarte bună epură de geometrie descriptivă, şi probe bune de algebră. I se acordă ca premiu volumele: *Calculul algebric* de TRAIAN LALESCU, *Distanţele cereşti şi structura*

universului de G. Demetrescu şi *Curs de Matematici generale* de Gh. Bratu.

8. D-l Corneliu Popescu, elev în clasa VI la liceul *Ion Maiorescu* din Giurgiu, a trecut o foarte bună probă orală de algebră, dar lucrarea scrisă lasă de dorit; la trigonometrie a ieşit bine. I se dau ca premiu cărţile: *Exercices et épures de Géométrie Descriptive* de P. Aubert & G. Papelier (texte et planches) şi *Curs de Matematici generale* de Gh. Bratu.

In afară de aceşti candidaţi, care merită premiile din anul acesta, menţionăm pe următorii candidaţi: D-l Schächter Osias, pentru probele de algebră, Ionescu-Bujor T. Const. pentru oralul la geometrie descriptivă, Miu Ion pentru algebră, Katz L. pentru oralul de algebră, Hulubei Telemac pentru trigonometrie, Vasiliu Ioan pentru algebră şi Georgescu Marius pentru probele orale de algebră şi de geometrie analitică.

Şi astfel concursul nostru adaugă, an cu an, sforţări noi şi prin urmare speranţe noi de viaţă matematică românească, teoretică şi aplicată, mai largă şi mai bogată.

Delegat pentru rapoarte
G. Ţiţeica.

ASUPRA DREPTELOR ALE CĂROR TOATE PUNCTELE SUNT DEPĂRTATE EGAL DE TREI DREPTE DATE. DREPTE ECHIDISTANTE.

Se ştie că, fiind date trei drepte concurente, există patru drepte ce trec prin punctul lor comun şi ale căror toate punctele sunt egal depărtate de cele trei drepte concurente date. Să considerăm aceeaşi problemă în cazul când cele trei drepte date nu sunt concurente [1]).

Fie D_1 şi D_2 două drepte oarecare în spaţiu. Să luăm ca axe de coordonate perpendiculare, pentru axa Oz perpendiculara lor comună, iar ca axe Ox şi Oy bisectoarele unghiului ce formează

1) Problemă sugerată de D-l A. Angelescu.

între ele paralelele la dreptele D_1 şi D_2, duse prin mijlocul perpendicularei comune. Ecuaţiile dreptelor D_1 şi D_2 sunt:

$$z = c, \qquad y = mx; \qquad z = -c, \qquad y = -mx.$$

Locul punctelor egal depărtate de aceste două drepte este

$$(z-c)^2 + \frac{(y-mx)^2}{1+m^2} = (z+c)^2 + \frac{(y+mx)^2}{1+m^2},$$

sau

$$cz(1+m^2) + mxy = 0, \tag{1}$$

un paraboloid iperbolic ce conţine axele Ox şi Oy.

Generatoarele rectilinii ale acestei suprafeţe sunt:

$$x = -c\lambda(1+m^2), \qquad z = \lambda my, \tag{2}$$

$$y = -c\mu(1+m^2), \qquad z = \mu mx. \tag{3}$$

Să considerăm o dreaptă D_3,

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Scriind că distanţele unui punct (x, y, z) la dreptele D_1 şi D_3 sunt egale, avem paraboloidul iperbolic

$$(z-c)^2 + \frac{(y-mx)^2}{1+m^2} = [(x-a)\cos\beta - (y-b)\cos\alpha]^2 \tag{4}$$
$$+ [(y-b)\cos\gamma - z\cos\beta]^2 + [z\cos\alpha - (x-a)\cos\gamma]^2.$$

Să vedem dacă suprafeţele (1) şi (4) au o generatoare G comună. Pentru aceasta, vom scrie că o generatoare (2) a primei suprafeţe este pe suprafaţa (4). Inlocuind în (4) pe x şi z cu valorile lor, (2), şi scriind că rezultatul înlocuirii, care este de gradul al doilea în y, se reduce la o identitate, avem

$$(\cos\beta + \lambda m\cos\gamma)^2 = \frac{m^2}{1+m^2}, \tag{5}$$

$$-b\sin^2\beta + c\lambda(1+m^2)\cos\alpha\cos\beta + a\cos\beta\cos\gamma + b\lambda m\cos\beta\cos\gamma \tag{6}$$
$$+ c\lambda^2 m(1+m^2)\cos\alpha\cos\gamma + a\lambda m\cos\alpha\cos\gamma = 0,$$

$$c^2 + m^2c^2\lambda^2(1+m^2) = c^2\lambda^2(1+m^2)^2\sin^2\alpha + 2ac\lambda(1+m^2)\sin^2\alpha \tag{7}$$
$$+ a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta - 2bc\lambda(1+m^2)\cos\alpha\cos\gamma - 2ab\cos\alpha\cos\beta.$$

Din ecuația (5) se găsesc două valori pentru λ, iar fiecăreia îi corespund din ecuațiile (6) și (7) două valori pentru a și două pentru b în funcțiune de $\cos\alpha$ și $\cos\beta$. Deci, *fiind date două drepte* D_1 *și* D_2, *există două congruențe de drepte* D_3, *astfel că la fiecare dreaptă* D'_3 *a primei congruențe, corespunde o dreaptă* D''_3 *a celeilalte congruențe, în așa fel că este o dreaptă* (G), *generatoare de primul sistem a paraboloidului (1), ale cărei toate punctele sunt egal depărtate de dreptele* D_1, D_2, D'_3, *precum și de dreptele* D_1, D_2, D''_3. De asemenea, *sunt alte două congruențe de drepte* D_3, *ale căror drepte* D'''_3, D''''_3 *sunt grupate perechi, astfel că există o generatoare de primul sistem a paraboloidului (1), ale cărei toate punctele sunt egal depărtate de dreptele* D_1, D_2, D'''_3 *precum și dreptele* D_1, D_2, D''''_3.

Considerând generatoarele (3) de al doilea sistem ale paraboloidului (1), *sunt alte patru congruențe de drepte* D_3 *ale căror drepte* se pot grupà ca și pentru cazul precedent, și *pentru care există drepte* (G), *generatoarea de sistemul al doilea ale paraboloidului (1), echidistante de dreptele* D_1, D_2, D_3.

Scriind că o generatoare λ și una μ se găsesc deodată pe paraboloidul (4), se obțin alte trei ecuații analoage cu (5), (6), (7), ce depind de μ, a, b, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, care împreună cu (5), (6), (7), ne dau un număr finit de valori pentru λ, μ, a, b, $\cos\alpha$, $\cos\beta$. Fie λ_1, λ_2 valorile lui λ și μ_1, μ_2 valorile lui μ scoase din ecuațiile (5) și analoaga ei. Inlocuite în ecuațiile (6), (7) și analoagele lor, avem sistemele:

$$\begin{cases} f_2(\lambda_1, a, b, \cos\alpha, \cos\beta) = 0, \\ f_3(\lambda_1, a, b, \cos\alpha, \cos\beta) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(\lambda_2, a, b, \cos\alpha, \cos\beta) = 0, \\ f_3(\lambda_2, a, b, \cos\alpha, \cos\beta) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2(\mu_1, a, b, \cos\alpha, \cos\beta) = 0, \\ \varphi_3(\mu_1, a, b, \cos\alpha, \cos\beta) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2(\mu_2, a, b, \cos\alpha, \cos\beta) = 0, \\ \varphi_3(\mu_2, a, b, \cos\alpha, \cos\beta) = 0; \end{cases}$$

Combinând aceste sisteme două câte două, se vede că fiind date două drepte D_1 și D_2, *există un număr finit de drepte* D_3, *astfel că la fiecare dreaptă* D_3, *corespund două drepte* (G), *generatoare ale paraboloidului (1), ale cărui toate punctele sunt egal depărtate de* D_1, D_2, D_3. *Dreptele* (G) *sunt echidistante de dreptele* D_1, D_2, D_3.

Ar fi interesant de studiat configurația formată de punctele de intersecție ale unui plan dat cu dreptele D_1, D_2, D_3 și echidistantele lor.

In cazul $a = b = c = 0$, dreptele D_1, D_2, D_3 sunt concurente în acelaş punct, iar dreptele (G) sunt echidistante [1]) faţă de dreptele date.

N. ABRAMESCU.

CÂTEVA PROPRIETĂŢI ALE UNEI CLASE DE PATRULATERE.

In cele ce urmează, voiu stabili câtevà proprietăţi, ce cred că sunt, cea mai mare parte nouă, ale unei categorii de patrulatere inscriptibile. O parte din aceste proprietăţi au format enunţul problemei de geometrie elementară ce am propus la concursul Gazetei Matematice din anul curent.

Să coborîm din punctul P, de întretăere al diagonalelor, perpendicularele PK, PL, PM, PN, respectiv pe laturile AB, BC, CD şi DA, ale patrulaterului ABCD înscris în cercul O.

1. *Dreptele* PK, PL, PM, PN *sunt bisectoarele unghiurilor patrulaterului* KLMN. Intr'adevăr, din patrulaterul inscriptibil CLPM rezultă că: $\sphericalangle LCP = \sphericalangle LMP$; din patrulaterul inscriptibil DMPN rezultă că: $\sphericalangle NDP = \sphericalangle NMP$; în sfârşit din patrulaterul ABCD rezultă că: $\sphericalangle NDP = \sphericalangle LCP$; deducem din egalităţile precedente că $\sphericalangle LMP = \sphericalangle NMP$.

2. *Condiţia necesară şi suficientă ca patrulaterul* KLMN *să fie inscriptibil, este ca diagonalele* AC, DB, *să fie perpendiculare între ele.*

Intr'adevăr, din cele precedente rezultă că

$$\text{măs.} \sphericalangle NML = \text{măs.} \sphericalangle ADB + \text{măs.} \sphericalangle ACB = \text{arc. } AB.$$

Apoi $\text{măs.} \sphericalangle NKL = \text{arc. } DC$ deci

$$\sphericalangle NML + \sphericalangle NKL = 2 \sphericalangle DPC.$$

Insă, ca patrulaterul KLMN să fie inscriptibil, este necesar şi

1) A se vedeà: APPELL, *Sur un système particulier de quatre droites concurantes dans l'espace, droites équirésultantes (Bulletin de la Société mathématique de France*, t. L, 1922, p. 219); G. NICHIFOR, *O reprezentare specială a dreptelor echirezultante (Buletinul Asociaţiei de matematici pure şi aplicate*, anul II, 1923. p. 223).

suficient ca suma $\sphericalangle NML + \sphericalangle NKL = 180^0$, deci necesar şi suficient este ca unghiul DPC al diagonalelor să fie drept.

In cele ce urmează, vom presupune că patrulaterul ABCD *îndeplineşte condiţia perpendicularităţii diagonalelor.* Propunem a numi acest patrulater: *ortopatrulater inscriptibil.*

3. *Dacă punctele* K', L', M', N' *sunt mijloacele laturilor patrulaterului* ABCD, *dreptele* KM', MK', LN', *şi* NL' *trec toate prin punctul* P.

Intr'adevăr, M' fiind centrul cercului DPC, $\sphericalangle M'PC = \sphericalangle M'CP$. Insă $\sphericalangle M'CP = \sphericalangle DBA = \sphericalangle APK$, deci $\sphericalangle M'PC = \sphericalangle APK$, adică M', P, K sunt colineare.

4. *Cercul* KLMN *trece şi prin punctele* K', L', M', N'. Am văzut la 2) că măs.$\sphericalangle MNK$=arcBC=măs. $2\sphericalangle BDC$=măs.$\sphericalangle PM'C$; deci: $\sphericalangle MNK = \sphericalangle KM'M$, adică punctele MM'NK sunt conciclice.

Spre a reliefă această proprietate, voiu numi acest cerc *cercul celor opt puncte ale ortopatrulaterului inscriptibil.*

5. *Centrul* ω *al cercului celor opt puncte se află pe dreapta* OP, *la jumătatea segmentului* LP, de oarece punctul ω trebue să se găsiască la intersecţia perpendicularelor pe mijloacele coardelor K'K, L'L, M'N şi N'N.

6. *Dreptele* K'M' *şi* L'N' *trec prin* ω, deoarece figura K'L'M'N' fiind un dreptunghiu, ω este în acelaşi timp centrul dreptunghiului.

7. *Perechile de drepte* (MN', NM'), (NK', KN'), (KL', LK') *şi* (LM', L'M) *se întâlnesc în puncte situate pe dreapta* OP. Fie acele puncte respectiv D_2, A_2, B_2 şi C_2.

In adevăr, fie D_2 punctul (MN', NM'). In exagonul inscriptibil M'K'MN'L'NM', laturile (1, 4) (2, 5) şi (3, 6) determină dreapta lui PASCAL ωPS.

8. Fie A_1, B_1, C_1, D_1, picioarele perpendicularelor scoborîte din vârfurile patrulaterului ABCD pe dreapta OP şi ρ raza cercului ω.

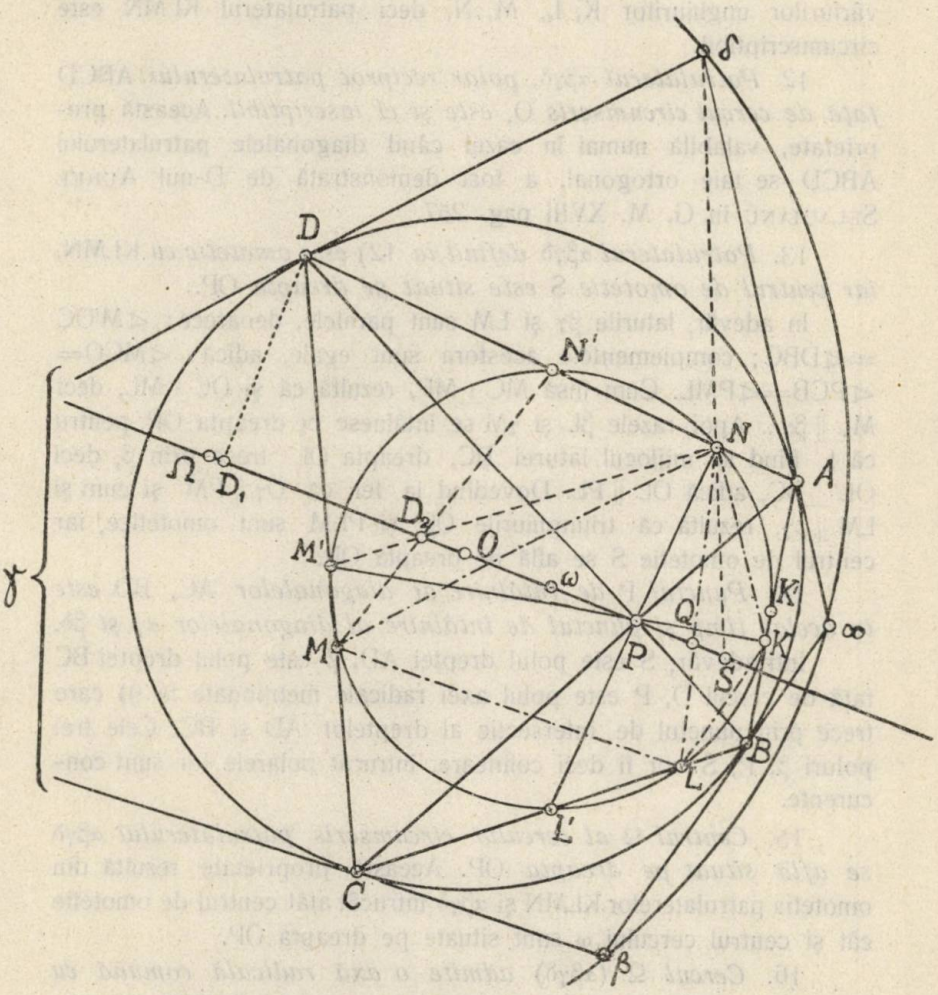
Perechile de puncte (A_1 *şi* A_2) *şi analoagele formează o involuţie cu centrul în* ω *cu puterea* ρ^2.

In adevăr, din patrulaterul înscris NN'MM' rezultă că DD_1 este polara D_2. Analog se dovedeşte pentru celelalte puncte.

9. *Polara punctului* P *faţă de cercul* ω *este axa radicală a cercurilor* O *şi* ω.

In adevăr, polara lui P faţă de cercul ω se află unind punctele (LL', N'N) şi (NN', MM'). Ori, aceste puncte coincid cu punctele

de intersecție ale dreptelor (AD, BC) și (AB, DC); deci polara punctului P, față de cercul ω, este și polară a aceluiaș punct față de cercul O.



10. Există următoarea relațiune metrică:

$$\rho^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{\overline{OP}^2}{4}.$$

In adevăr, dacă O_1 este intersecția polarei lui P cu dreapta OP, avem:

$\overline{OP}.\overline{OO_1} = R^2$; $\overline{\omega P}.\overline{\omega O_1} = \rho^2$; $\overline{\omega P} = \overline{OP}/2$; $\overline{\Omega O'} = \overline{OO'} - \overline{OP}/2$.

Din aceste relaţiuni deducem pe cea enunţată.

11. *Punctul* P *este centrul cercului înscris în patrulaterul* KLMN. Intr'adevăr, acest punct se află la intersecţia bisectoarelor vârfurilor unghiurilor K, L, M, N, deci patrulaterul KLMN este circumscriptibil.

12. *Patrulaterul* $\alpha\beta\gamma\delta$, *polar reciproc patrulaterului* ABCD *faţă de cercul circumscris* O, *este şi el inscriptibil.* Această proprietate, valabilă numai în cazul când diagonalele patrulaterului ABCD se taie ortogonal, a fost demonstrată de D-nul AUREL SELAGIANU în G. M. XVIII pag. 257.

13. *Patrulaterul* $\alpha\beta\gamma\delta$ *definit la* 12) *este omotetic cu* KLMN, *iar centrul de omotetie* S *este situat pe dreapta* OP.

In adevăr, laturile $\beta\gamma$ şi LM sunt paralele, deoarece: $\sphericalangle M'OC = \sphericalangle DBC$; complementele acestora sunt egale, adică: $\sphericalangle MCO = \sphericalangle PCB = \sphericalangle PML$. Cum însă $MC \perp MP$, rezultă că şi $OC \perp ML$, deci $ML \parallel \beta\gamma$... Apoi, razele βL şi γM se întâlnesc pe dreapta OP, pentru că L' fiind la mijlocul laturei BC, dreapta OL' trece prin β, deci $OL' \perp BC$, adică $OL' \parallel PL$. Dovedind la fel că $O\gamma \parallel PM$ şi cum şi $LM \parallel \beta\gamma$, rezultă că triunghiurile $O\beta\gamma$ şi PLM sunt omotetice, iar centrul de omotetie S se află pe dreapta OP.

14. *Punctul* P *de întâlnire al diagonalelor* AC, BD *este în acelaş timp şi punctul de întâlnire al diagonalelor* $\alpha\gamma$ *şi* $\beta\delta$.

Intr'adevăr, S este polul dreptei AD, β este polul dreptei BC faţă de cercul O, P este polul axei radicale menţionate la 9) care trece prin punctul de intersecţie al dreptelor AD şi BC. Cele trei poluri β, P, S vor fi deci colineare, întrucât polarele lor sunt concurente.

15. *Centrul* Ω *al cercului circumscris patrulaterului* $\alpha\beta\gamma\delta$ *se află situat pe dreapta* OP. Această proprietate rezultă din omotetia patrulaterelor KLMN şi $\alpha\beta\gamma\delta$ întrucât atât centrul de omotetie cât şi centrul cercului ω sunt situate pe dreapta OP.

16. *Cercul* Ω ($\alpha\beta\gamma\delta$) *admite o axă radicală comună cu cercurile* ω *şi* O, *care este şi polară a punctului* P *faţă de toate cele trei cercuri.*

Polara lui P faţă de cercul Ω trece prin punctul ($\alpha\delta$, $\beta\gamma$). Aceste drepte fiind însă tangente la cercul O în A şi C, punctul ($\alpha\delta$, $\beta\gamma$) se află şi pe polara lui P în raport cu cercul O. Punând în legătură această observaţie cu proprietatea stabilită la 9) rezultă proprietatea aci enunţată.

17. *Punctul de întâlnire al diagonalelor* KM, LN *se află pe dreapta* OP. Această proprietate este o consecință imediată a proprietății stabilite la 13).

18. *Perpendicularele scoborîte din* α, β, γ, δ *pe laturile* AB, BC, CD, DA se întâlnesc în O, care este corespondentul omotetic al punctului P în patrulaterul KLMN. Proprietatea aceasta rezultă din faptul că laturile $\alpha\delta$, $\delta\gamma$ sunt tangente în A, D la cercul O și deci $O\delta \perp AD$ și $O\delta \parallel NP$.

S'ar mai puteà deduce din proprietățile de mai sus încă multe altele, în chipurile următoare:

a) Considerând triunghiul format din laturile $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$. Cercul O este atunci înscris, cercul Ω circumscris.

b) Considerând triunghiul ABC înscris în cercul O.

c) Considerând punctul P fix și punctele ABCD mobile pe cercul O, ceeace permite găsirea de locuri geometrice.

d) Considerând izocline plecând din punctul P.

e) Transformarea acestor proprietăți, aplicând diferite metode de transformare a figurilor.

CRISTEA MATEESCU.

NOTE MATEMATICE

47. *Aritmetici și Algebre diverse.* Toate tratatele de mai jos se găsesc în biblioteca Școlii Politechnice din Zürich, din catalogul căreia le-am extras. Numerele indicate pentru fiecare carte reprezintă numărul de ordine din bibliotecă.

73125.	**Stifel,** *Mich.*	Arithmetica integra. Norinbergae. 1544.
73101.	„ „	Deutsche Arithmetica, inhaltend die Hausrechnung, die deutsche Coss, die Kirchrechnung. Nürnberg. 1545.
71212.	**Scheubelius,** *J.*	Arithmeticus libellus. Lipsiae 1563.
76284.	**Faber,** *Jacobus.*	Arithmetica speculativa Boetii per Jacobum Fabrum Stopulensem in compendium redacta. Basileae 1536.

72134. **Roth,** *P.* Arithmetica philosophica. Nürnberg. 1608.

71309. **Henisch,** *G.* Arithmetica perfecta. Aug. Vind. 1609.

71896. **Wilken,** *M.* Flores algebraici, d. i. Algebra oder Coss. Emden 1622.

71117. **Napier,** *J.* Raddologia, trad. della lat. lingua da M. Locatello. Verona 1623.

71738. „ „ Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo. Edinburgi. 1617.

7971. **Rahn,** *Joh. Heinrich.* Teutsche Algebra oder algebraische Rechenkunst. Zürich. 1659.

7651. **Wiedeburg,** *Joh. Ernst Basil.* Elementa arithmeticae speciosae. Erlangae 1757.

7177. **Brander,** *G. F.* Arithmetica binaria. Augsburg 1775.

7795. **Develey,** *E.* Arithmétique d'Emile. 2 éd. Paris 1802.

75506. **Ballin,** A(mand) G(abr.). Petit traité d'arithmétique décimale. 2. Ed. Rouen 1838.

7940. **Ritter.** *L. F.* Allgemeines Volksrechenbuch 3. A. Stuttgart 1846.

7342. **Lefour,** Arithmétique et géométrie agricole. Paris. 185 ?

7746. **Redouly,** *Ch.* Grammaire et logique des mathématiques élémentaires. Paris 1867.

76808. **Herrmann,** *Frdr.* Katechismus der Algebra... Mit 8 Fig. L. 1872.

A.1699/25. **Girndt,** *Mart.* Leitfaden der Bautechnischen Algebra 4. A. Mit 29 Fig. u. 2 Taf. 1911. (Der Unterricht an Baugewerkschulen 25).

Cartea cu No. 71117 este traducerea aceleea cu No. 71738.

Printre cărţile de mai sus se află, după cum rezultă şi din titlu, şi cărţi cari conţin pe lângă chestiuni de aritmetică şi algebră şi chestiuni din alte ramuri ale matematicelor ca: No. 7342, 7746, etc. De remarcat e că diferenţierea dintre aritmetică şi algebră, la început aproape nu există, cel puţin pentru unii din autorii cărţilor de mai sus; astfel la No. 73101 în aritmetică e trecută şi «*die deutsche Coss*», care la No. 71896, e echivalentă cu algebra.

W. Solomon.
(Student, Zürich).

Din aceste cărți s'au catalogat în Notele ce am publicat până în prezent în *Gazeta Matematică*, următoarele:

No. 73125	la	*Aritmetici*	No. 45.
No. 71309	»	»	No. 30.
No. 7177	»	»	No. 31.
No. 7971	»	*Algebre*	No. 13.
No. A.1692/25	»	»	No. 9.

Ca aritmetici specioase, am citat alta la No. 9; ca aritmetici zecimale alta la No. 50 și ca aritmetici agricole, alta la No. 1. Cele necatalogate vor fi menționate în notele viitoare. E bine ca cercetări analoage cu cele făcute de D-l W. Solomon, să fie făcute de corespondenții noștri, căci astfel după câțiva ani s'ar puteà completà mai ușor catalogul tutulor varietăților de matematici diverse, apărute până atunci.

I. I.

48. *Asupra numărului special cu probleme nerezolvate.* *a)* In enunțul problemei 2503, s'au strecurat câtevà erori; iată-l acì rectificat:

Fie x și y rădăcinile ecuației:

$$(1+a)z^2+(a-2)z+1=0.$$

Să se arate că expresiunea:

$$\frac{x-1}{y^{n-1}}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{y^n-x^n}{y-x}-\frac{2}{x+1}\cdot\frac{y^n-1}{y-1}\right],$$

nu își schimbă valoarea, dacă înlocuim x cu y și y cu x.

I. Ionescu.

b) Problemele cu numerele 1083, 2669, 2916 au fost rezolvate și publicate anul acesta (Vol. XXXI), la paginile 218, 257, 223.

N. Abramescu.

c) La problema 1162 sistemul de ecuații este:

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n=k,$$

$$a_1^2 x_1^2+a_2^2 x_2^2+\ldots+\alpha_n^2 x_n^2=r^2.$$

I. Ionescu.

49. *Asupra articolului: «O problemă de aritmetică»* din *Gazeta Matematică*, Vol. XXIX, pag. 368.

Acel articol trebuie revizuit de autorul lui, întru cât la punctele (17), (18), (19) în expresiunile lui A, intră d_2 care nu este cunoscut, fiind cel mai mare comun divizor al lui A cu numere date. Apoi a doua relaţiune dela pag. 371, scrisă:

$$p_1+p'_1=p_2+p'_2=\ldots=p_r+p'_r=(n-1),$$

trebueşte înlocuită cu:

$$p_i+p'_i=k_i\,(n-1) \qquad (i=1,\ 2,\ 3\ldots r).$$

Altfel problema nu mai este complet rezolvată, după cum se afirmă la sfârşitul acelui articol.

O. Popea.

50. *Generalizarea problemei 2261* (G. M., vol. XXI, p. 112). Imi propun să demonstrez relaţia

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{(a+b+c)^n}=r^n\left(\frac{1}{h_a^n}+\frac{1}{h_b^n}+\frac{1}{h_c^n}\right),$$

n fiind un întreg pozitiv. Ridicând la puterea n relaţia

$$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S},\qquad \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S},\qquad \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$$

şi apoi adunându-le, avem

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{2^n S^n}=\frac{1}{h_a^n}+\frac{1}{h_b^n}+\frac{1}{h_c^n}.$$

Inmulţind ambele părţi cu r^n şi ţinând seamă că $p^n r^n=S^n$, avem

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{2^n p^n}=r^n\left(\frac{1}{h_a^n}+\frac{1}{h_b^n}+\frac{1}{h_c^n}\right).$$

Dar $(2p)^n=(a+b+c)^n$; deci

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{(a+b+c)^n}=r^n\left(\frac{1}{h_a^n}+\frac{1}{h_b^n}+\frac{1}{h_c^n}\right).$$

Hulubei Telemac.
Cl. VI R., Liceul Internat, Iaşi.

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Anul X. No. 1. Bucureşti 1926. Asupra ecuaţiei diferenţiale lineare de primul ordin, de D. POMPEIU. Asupra unei ecuaţii cu diferenţe finite, de TH. ANGHELUŢĂ.

Idem. Anul X. No. 2.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol XXXI. No. 9-10. Noemvrie-Decemvrie 1925. New-York. Adunarea din Mai dela New-York, de A. DRESDEN. A 46-a Adunare regulată a secţiunii din San-Francisco, de B. A. BERNSTEIN. Numărul elementelor unui grup care are o putere în un şir conjugat, de L. WEISNER. Notă asupra construcţiei tablelor de formă lineară, de D. N. LEHMER. Criteriu ca un număr de puncte reale în spaţiul n să fie pe o suprafaţă din spaţiul $(n-k)$, de H. S. UHLER. Valori parametrice caracteristice pentru o ecuaţie integrală, de W. A. HURWITZ. Despre polinomialul de cea mai bună aproximaţiune al unei funcţiuni continui, de J. SHOHAT. Rezolvantele ecuaţiilor sextice şi quintice, de L. E. DICKSON. O recunoaştere, de J. H. M. WEDDEBURN. Integrale duble improprii, de C. A. SHOOK. Regiunea fundamentală pentru un grup fuxian, de L. R. FORD. Câtevà faze ale geometriei descriptive, de W. H. ROEVER. Prima monografie, CARUS (Calculul variaţiunilor, de G. A. BLISS), de A. DRESDEN. ANERBUH despre fizica matematică, de E. HILLE.

Mathesis. Tomul XL. No. 3. Martie 1926. Bruxelles. † J. NEUBERG, de AD. MINEUR. Asupra isopolului M al unei drepte m în raport cu un triunghiu, de CH. SERVAIS. Teoria ecuaţiilor în „Invenţiune nouă în algebra lui ALBERT GIRARD", de H. BOSMANS. Asupra triunghiurilor lui PYTAGORA, de VAN LIERDE. Un cuplu de vectori, de AD. M.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anu 50. No. 12. Martie şi No. 13 şi No. 14. Aprilie 1926. Paris.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. C. Iulie-Sept. 1925. Buenos-Aires. Misterul distanţelor planetare, de O. SCHMIEDEL. Sborul planat, de L. M. DINELLI. Probe astronomice contra teorii relativităţii, de M. L. ROSA. Interpolare în cazul de una sau mai multe variabile, de B. IG. BAIDAFF.

Revista matematică din Timişoara. Anul VI. No. 2. Aprilie 1926. Timişoara. Patrulatere cu laturile tangente la cerc, de I. CRĂCIUNESCU.

Revista ştiinţifică. „V. ADAMACHI". Anul XII. No. 2. Fevruarie 1926. Iaşi

Buletinul Societăţii studenţilor în matematici (litografiat). No. 5. 1926 Bucureşti. Calculul unor derivate de ordinul n, de N. CIORĂNESCU. Confluenţele funcţiunii lui CLAUSEN şi ale funcţiunii hipergeometrice, de GR. C. MOISIL. Linii trase pe o suprafaţă, de A. NICULESCU. O problemă de geometrie, de E. BALLAN.

Curierul matematic (litografiat). Anul II. No. 1. Aprilie 1926. Bucureşti. Asupra unei configuraţii de triunghiuri omologice, de M. GHERMĂNESCU. Asupra unor cercuri, de C. T. IONESCU-BUJOR.

Ziarul matematic (şapirografiat). No. 3. Martie şi No. 4. Aprilie 1926. Chişinău. Spaţiul cu patru dimensiuni. (Tradus din ruseşte).

SERGE BERNSTEIN. *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.* Paris. Gauthier-Villars et C-ie, Editeurs, 1926.

Această lucrare, publicată în vestita colecţie de monografii privitoare la teoria funcţiunilor de sub direcţia D-lui BOREL, cuprinde lecţiile făcute de autor la Sorbona în anul 1923. Chestiunile tratate în acest volum intră în categoria cercetărilor delicate moderne, analoage cu unele probleme de calculul variaţiilor, dela care cartea îşi trage titlul. Metodele îşi au izvorul în ideile originale ale matematicului rus CEBIŞEF, la care autorul a adăugat multe cercetări şi frumoase rezultate personale.

In cap. I autorul defineşte un sistem de funcţiuni al lui CEBIŞEF sau sistem T şi cu ajutorul lui introduce noţiunea de polinom generalizat. Acesta serveşte ca element de aproximare pentru funcţiunile continue. In special autorul cercetează polinoamele lui CEBIŞEF care, pe un segment dat, se depărtează cât mai puţin de zero, precum şi de proprietăţile extremale ale fracţiilor raţionale.

In cap. II problema e întinsă la axa reală întreagă. Se cercetează anumite fracţiuni care se depărtează, pe toată axa reală, cât mai puţin de zero, şi se fac aplicaţii numeroase ale rezultatelor obţinute, în special la funcţiunile analitice întregi de genul zero şi de genul unu.

In cap. III, autorul trece la aproximarea funcţiunilor analitice cu o singularitate dată, algebrică, logaritmică sau esenţială.

Volumul se termină cu două note ale autorului, una foarte întinsă şi interesantă tratând despre funcţiunile analitice şi quasi-analitice de variabilă reală, cealaltă despre o proprietate a funcţiunilor întregi de genul zero.

G. ŢIŢEICA.

American mathematical Society. Catalogue of the library, edited by RAYMOND CLARE ARCHIBALD. New-York 1925.

FRANCO PASTORE. *Nuestra mineralogia y gedozia.* Vol. VI din *Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina.* Buenos-Aires 1925. (Tipărită cu ocazia semicentenarului Societăţii ştiinţifice argentine).

NICOLAS LOZANO & ANTONIO PAITOVI. *La Higiène publice y los obras sanitarias argentinas.* Vol. XI din *Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina.* Buenos-Aires 1925. (Tipărită cu ocazia semicentenarului Societăţii Ştiinţifice argentine).

Anuarul Şcoalei Politecnice din Timişoara. Anul V. 1924 — 1925. Timişoara 1925.

CERERI.

Răspuns la cererea No. 133. In această cerere s'a întrebat dacă sunt erori de tipar la tabelele de puteri şi rădăcini din „*Formularul de matematici*“ de V. Coman şi N. Malla. La pag. 35, Vol. I, ediţia II „*Puterile lui 2, 3 şi 5*“ am găsit următoarele erori de tipar:

$2^{36} = 68719476734$	în loc de	68719476736.
$2^{49} = 562949953421311$	„ „ „	562949953421312.
$3^{14} = 4782869$	„ „ „	4782969.
$3^{15} = 14348969$	„ „ „	14348907.
$3^{22} = 31318059609$	„ „ „	31381059609.
$5^{13} = 1220704125$	„ „ „	1220703125.
$5^{15} = 30517573125$	„ „ „	30517578125.

V. C. Popescu.

In afară de erorile date de D-l Lew Soltisky am mai găsit că 83^2 este dat 6880 în loc de 6889.

I. D. Zamfir.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2635. *Se consideră parabolele având acelaş focar* F *şi trecând prin acelaş punct* A. 1°. *Să se afle locul vârfurilor acestor parabole.* 2°. *Fie* B *al doilea punct de intersecţie al uneia din aceste parabole cu dreapta* AF. *Perpendiculara în* B *pe* AF *taie directoarea acestei parabole în* M *şi axa în* N. *Să se afle locul geometric al punctului* M. 3°. *Să se afle locul geometric al punctului* N. 4°. *Perpendiculara din* B *pe directoarea parabolei corespunzătoare lui* B, *taie această directoare în* P; *să se afle locul geometric al punctului* P.

N. Abramescu.

Soluţie dată de D-l Radu Bădescu.

Să luăm ca axă Ox dreapta AF, iar ca Oy perpendiculara în F. Ecuaţia parabolelor cu focarul F este

$$x^2 + y^2 = \frac{(y - \lambda x - \mu)^2}{1 + \lambda^2}.$$

Trecând prin punctul A$(a, 0)$, avem

$$a^2 = \frac{(a\lambda + \mu)^2}{1 + \lambda^2}, \qquad \lambda = \frac{a^2 - \mu^2}{2a\mu}.$$

Ecuațiile parabolei și directoarei sunt

$$(1)\qquad \left(x+\frac{a^2-\mu^2}{2a\mu}y\right)^2-\frac{a^2-\mu^2}{a}x+2\mu y-\mu^2=0,$$

$$(2)\qquad y-\frac{a^2-\mu^2}{2a\mu}x-\mu=0.$$

Axa trece prin focar și este perpendiculară pe directoare, deci are ecuația

$$(3)\qquad x+\frac{a^2-\mu^2}{2a\mu}y=0.$$

1°. Locul vârfurilor se obține eliminând pe μ între ecuațiile (1) și (3), ale parabolei și axei. Ecuația (1) poate fi înlocuită cu

$$\frac{a^2-\mu^2}{a}x-2\mu y+\mu^2=0,$$

și eliminând pe μ între această ecuație și (3), se obține

$$4(x^2+y^2-ax)(x^2+y^2)=a^2y^2,$$

și trecând în coordonate polare, $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, avem

$$\rho=\pm\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\omega,$$

care reprezintă un melc al lui PASCAL (cardioidă).

Soluția geometrică este următoarea. Fie Q piciorul perpendicularei din F pe directoare și S vârful parabolei. Directoarea este tangentă la cercul cu centrul în A și raza AF, iar Q este piciorul perpendicularei din F pe directoare. Locul lui Q este deci podara cercului cu centrul A și raza AF, în raport cu punctul F al acestui cerc, adică un melc al lui PASCAL (cardioidă). S fiind mijlocul distanței FQ, locul vârfului S este o cardioidă omotetică cu cea descrisă de Q, în raportul $\frac{1}{2}$, centrul de omotetie fiind F.

2°. Făcând în ecuația (1) pe $y=0$, înlăturând pe $x=a$ ce corespunde punctului A, avem $x=-\mu^2/a$, care este abscisa punctului B. Perpendiculara în B pe AF are ecuația

$$(4)\qquad x+\frac{\mu^2}{a}=0,$$

iar locul punctului M se obţine eliminând pe μ între ecuaţiile (2), (4). Se găseşte cubica

$$x(x-a)^2+4ay^2=0.$$

3°. Locul lui N se obţine eliminând pe μ între ecuaţiile (3) şi (4). Se găseşte

$$y^2(x+a)^2+4ax^3=0.$$

4°. Perpendiculara din B pe directoare are ecuaţia

$$(5)\qquad y=-\frac{2a\mu}{a^2-\mu^2}\left(x+\frac{\mu^2}{a}\right).$$

Locul lui P se obţine eliminând pe μ între această ecuaţie şi (2), care se poate scrie

$$(6)\qquad y-\mu=\frac{a^2-\mu^2}{2a\mu}x.$$

Inmulţind ecuaţiile (5) şi (6), avem

$$\mu^2x-a\mu y+a(x^2+y^2)=0.$$

Eliminând acum pe μ între această ecuaţie şi (6), obţinem

$$[ax^2+(x-2a)(x^2+y^2)]^2=ay^2(3x-2a)[ax-2(x^2+y^2)].$$

Această ecuaţie se poate scrie

$$y^4(x+2a)+y^2(2x^3-3a^2x+2a^3)+(x-a)^2x^3=0,$$

de unde se vede că locul este

$$y^2=-\frac{x^3}{x+2a},$$

adică cisoida lui DIACLES şi

$$(x+2a)[y^2+(x-a)^2]=0.$$

Soluţia geometrică este următoarea. Fie I un punct al cercului de centru A şi raza AF. Tangenta în I la acest cerc este o poziţie a directoarei a parabolei corespunzătoare. Tangenta în F la cercul cu centru A, taie directoarea în L. Se vede că IL=FL. Să luăm pe IL, dela I spre L, o lungime LP=FL. Perpendiculara în P pe IL taie pe AF în B. Se vede că PB=FB şi deci B este al doilea punct de intersecţie al dreptei AF cu parabola considerată. Pentru a găsi locul geometric al punctului P, să luăm pe AF, dela F către

B, FC=AF şi să descriem cercul cu centrul C şi diametru FCD. Tangenta în D la acest cerc taie pe IL în H şi FP în G, iar dreapta FP taie acest cerc în E. Tangenta în E la acest cerc taie pe FL în U şi DG în V. Unghiurile UEF=UFE=LPE, deci UV paralelă cu LH. Patrulaterele ECDV şi IAFL sunt egale. Deci IL = EV. Cum IL=LP, urmează LP=EV. De oarece UV=LH, urmează UE = PH. Triunghiurile FUE şi PHG sunt egale şi deci FE=PG. Deci locul lui P, după însăşi definiţie, este o cisoidă cu punctul de întoarcere în F şi asimptota DH.

Altă soluţie dată de D-l I. Coşereanu.

PROBLEMA 3024. *Să se arate că expresiunea*

$$A_{n+1}^{p+1}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q C_p^q \frac{x^{n-q+1}}{n-q+1}-(-1)_p^p!,$$

este divizibilă cu $(x-1)^{p+1}$ *şi să se calculeze câtul diviziunei.*

Gh. D. Popescu.

1. *Soluţie* dată de D-nul E. Ştefănescu.

Expresiunea se mai poate scrie

$$E=(n+1)n(n-1)...(n-p+1)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-C_p^1\frac{x^n}{n}+C_p^2\frac{x^{n-1}}{n-1}-....\right.$$

$$\left....+(-1)^p C_p^p\frac{x^{n-p+1}}{n-p+1}\right)-(-1)_p^p!$$

Să considerăm suma

$$1+x+x^2+.....+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

şi să derivăm ambii membri. Vom avea

$$\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n-(-1)^1 1!}{(x-1)^2}=1+2x+....+nx^{n-1},$$

sau

$$\frac{n(n+1)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^n}{n}\right]-(-1)^1 1!}{(x-1)^2}=1+2x+...+nx^{n-1};$$

derivând încă odată şi grupând în acelaş mod vom avea :

$$\frac{(n+1)n(n-1)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-2\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n-1}}{n-1}\right]-2}{(x-1)^3}=2.1+3.2x+\ldots$$

$$\ldots+n(n-1)x^{n-2},$$

sau

$$\frac{(n+1)n(n-1)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-C_2^1\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n-1}}{n-1}\right]-(-1)^2 2!}{(x-1)^3}$$

$$=2.1+3.2x+\ldots..+n(n-1)x^{n-2};$$

derivând a treia oară vom aveà, grupând în acelaş mod:

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-C_3^1\frac{x^n}{n}+C_3^2\frac{x^{n-1}}{n-1}-C_3^3\frac{x^{n-2}}{n-2}\right]-(-1)^3 3!}{(x-1)^{3+1}}$$

$$=3.2.1+4.3.2x+\ldots+n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

şi aşă mai departe derivând de p ori, vom aveà tocmai

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)\ldots(n-p+1)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-C_p^1\frac{x^n}{n}+C_p^2\frac{x^{n-1}}{n-1}-\ldots+(-1)^p C_p^p\frac{x-p+1}{n-p+1}\right]-(-1)^p p!}{(x-1)^{p+1}}=$$

$$p(p-1)\ldots1+(p+1)p\ldots2x^1+(p+2)(p+1)\ldots3x^2+\ldots+n(n-1)\ldots(n-p)x^{n-p},$$

membrul al doilea este un număr întreg, deci

$A_{n+1}^{p+1}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q C_p^q\frac{x^{n-q+1}}{n-q+1}-(-1)^p p!$ se divide cu $(p-1)^{p+1}$ şi câtul este

$$p(p-1)\ldots1+(p+1)p\ldots2x+(p+2)(p+1)\ldots3x^2+\ldots$$

$$\ldots+n(n-1)(n-p)x^{n-p}=p!+\frac{(p+1)!}{1!}x+\frac{(p+2)!}{2!}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(p+k)!}{k!}x^k+\ldots+\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(p+k)!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n-p}(p+k)(p+k-1)\ldots(k+1)x^k.$$

2. D-nul Tib. Popoviciu demonstrează divizibilitatea expre-

siunei cu $(x-1)$ și a derivatei cu $(x-1)^p$, conchizând divizibilitatea primei cu $(x-1)^{p-1}$ și determină câtul prin metoda coeficienților nedeterminați.

3. D-nul L. Weiss găsește condiția ca polinomul

$$P(x) = A_1 x^{n+1} + A_2 x^n + \ldots A_{p+1} x^{n-p+1} - (-1)^p p!$$

să fie divizibil cu $(x-1)^{p+1}$ și regăsește expresiunea din enunț.

4. D-nul P. Ionescu deduce soluția acestei probleme din observațiile cuprinse în articolul D-lui Th. Angheluță, din G. M. XXX, pag. 68.

M. G.

PROBLEMA 3078. *Să se arate că expresiunile:*

$$E_1 = \frac{2n\sin t - \cos t \sin 2nt}{2\sin^3 t}$$

$$E_2 = \frac{3n^2\sin^2 t - (3 - 2\sin^2 t)\sin^2 nt}{4\sin^4 t}$$

se pot pune sub forma

$$E_1 = a_0 + a_1\cos 2t + a_2\cos 4t + \ldots\ldots + a_{n-1}\cos 2(n-1)t$$

$$E_2 = b_0 + b_1\cos 2t + b_2\cos 4t + \ldots\ldots + b_{n-1}\cos 2(n-1)t,$$

calculându-se coeficienții a_i *și* b_i *ce sunt independenți de* t. *Din expresiunile găsite, să se deducă suma patratelor și cuburilor primelor* n *numere.*

Th. Angheluță.

Prima soluție. Servindu-se de formula

$$(1)\quad \tfrac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots\ldots + \cos(n-1)t = \frac{\sin 2(n-1)\tfrac{1}{2}t}{2\sin \tfrac{1}{2}t},$$

expresia E_1 poate fi scrisă, succesiv, după cum urmează:

$$E_1 = \frac{2n - \dfrac{\sin(2n+1)t + \sin(2n-1)t}{2\sin t}}{2\sin^2 t}$$

$$E_1 = \frac{2n - \tfrac{1}{2} - \sum_1^n \cos 2pt - \tfrac{1}{2} - \sum_{p=1}^{n-1} \cos 2pt}{2\sin^2 t}$$

Prin urmare, avem

$$E_1 = \frac{2\sin^2 t + 2\sin^2 2t + \ldots + 2\sin^2 (n-1)t + \sin^2 nt}{\sin^2 t}.$$

Folosind formula

$$(2) \qquad \sin t + \sin 3t + \ldots + \sin (2n-1)t = \frac{\sin^2 nt}{\sin t},$$

obținem expresiunea

$$E_1 = \frac{(2n-1)\sin t + (2n-3)\sin 3t + \ldots + 3\sin(2n-3)t + \sin(2n-1)t}{\sin t}.$$

Și după formula (1) putem scrie

$$E_1 = (2n-1) + (2n-3)(\tfrac{1}{2} + \cos 2t).2 + \ldots + 3[\tfrac{1}{2} + \cos 2t + \ldots$$
$$\ldots + \cos 2(n-2)t].2 + [\tfrac{1}{2} + \cos 2t + \ldots + \cos 2(n-1)t]2.$$

Grupând termenii obținem formula cerută

$$(3) \quad E_1 = n^2 + 2(n-1)^2\cos 2t + 2(n-2)^2\cos 4t + \ldots$$
$$\ldots + 2.1^2\cos 2(n-1)t.$$

Pentru expresia E_2 procedăm la fel, căutând s'o punem sub formă de polinom trigonometric.

In acest scop avem:

$$\frac{4E_2}{3} = \frac{n^2}{\sin^2 t} - \frac{\sin^2 nt}{\sin^4 t} + \frac{2}{3}\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}.$$

Conform formulei (2) această expresie devine

$$\frac{4E_2}{3} = \frac{n^2}{\sin^2 t} - \frac{\sin t + \sin 3t + \ldots + \sin (2n-1)t}{\sin^3 t} +$$
$$\frac{2}{3}\frac{\sin t + \sin 3t + \ldots + \sin (2n-1)t}{\sin t}.$$

Pe de altă parte după formula (1) avem

$$\frac{\sin t + \sin 3t + \ldots + \sin(2n-1)t}{\sin t} = n + 2(n-1)\cos 2t + \ldots + 2\cos 2(n-1)t.$$

Pentru expresia E_2 avem deci

$$\frac{4E_2}{3} = \frac{1}{\sin^2 t}[n^2 - n - 2(n-1)\cos 2t - \ldots - 2\cos 2(n-1)t]$$
$$+ \tfrac{2}{3}[n + 2(n-1)\cos 2t + \ldots + 2\cos 2(n-1)t].$$

Numai prima parte

$$E=\frac{n^2-n-2(n-1)\cos 2t-\ldots-2\cos 2(n-1)t}{\sin^2 t},$$

ne mai rămâne să arătăm că este un polinom trigonometric.

Pentru aceasta expresia E se poate scrie

$$E=4\frac{(n-1)\sin^2 t+(n-2)\sin^2 2t+\ldots.+\sin^2(n-1)t}{\sin^2 t}.$$

Servindu-ne de formula (2) obținem

$$E=4\frac{(n-1)\sin t+(n-2)(\sin t+\sin 3t)+\ldots+[\sin t+\sin 3t+\ldots+\sin(2n-3)t]}{\sin t}$$

$$\therefore \qquad E=4\frac{\sum_{p-1}^{n-1} C^2_{n-p+1}\sin(2p-1)t}{\sin t}.$$

Și întrebuințând formula (1) obținem

$$E=4\left[C^3_{n+1}+2\sum_{p=1}^{n-2} C^3_{n-p+1}\cos 2pt\right].$$

Prin urmare, revenind la expresia E_2, avem

$$\frac{4E_2}{3}=4\left[C^3_{n+1}+2\sum_{p=1}^{n-2} C^3_{n-p+1}\cos 2pt\right]+\frac{2}{3}\left[n+2\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)\cos 2pt\right].$$

Avem deci formula căutată

$$(4) \qquad E_2=\frac{n^3}{2}+\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)^3\cos 2pt.$$

Dacă în formula (3) facem

$$t=0,$$

în partea întâi avem o nedeterminare, pe care ridicând'o găsim egalitatea

$$\frac{n(2n+1)}{3}=n^2+2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2.$$

$$\therefore \qquad \frac{n(2n+1)}{3}+n^2=2\sum_{1}^{n} n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Făcând acelaş lucru în formula (4), obţinem egalitatea

$$\frac{(n^2+1)n^2}{4} = \frac{n^3}{2} + \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)^3$$

$$\therefore \quad \frac{(n^2+1)n^2}{4} + \frac{n^3}{3} = \sum_{1}^{n} n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Am dedus astfel din formulele (3) şi (4) respectiv, suma patratelor şi cuburilor primelor n numere.

Adoua soluţie. Utilizând formulele lui EULER:

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$

$$\cos t = \tfrac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

şi punând pentru prescurtare

$$e^{2it} = v,$$

expresia E_1, devine

$$E_1 = \frac{(v^{2n}-1)(v+1) - 4nv^n(v-1)}{v^{n-1}(v-1)^3}.$$

Reducând factorul $(v-1)$, avem

$$E_1 = \frac{(v+1)(v^{2n-1} + v^{2n-2} + \ldots\ldots + v + 1) - 4nv^n}{v^{n-1}(v-1)^2},$$

sau încă sub forma

$$E_1 = \frac{(v^{2n}-1) + 2(v^{2n-1}-1) + \ldots\ldots + 2(v-1) - 4n(v^n-1)}{v^{n-1}(v-1)^2}.$$

Impărţind deci cu $v-1$, obţinem

$$E_1 = \frac{v^{2n-1} + 3v^{2n-2} + \ldots + (4n-3)v + 4n - 1 - 4n(v^{n-1} + v^{n-2} + \ldots + v + 1)}{v^{n-1}(v-1)}.$$

Făcând diviziunea încă odată cu $v-1$, după ce am aşezat termenii convenabil, se obţine

$$E_1 = \frac{v^{2n-2}+1}{v^{n-1}} + 2^2\frac{v^{2n-4}+1}{v^{n-2}} + \ldots\ldots + (n-1)^2\frac{v^2+1}{v} + n^2.$$

Şi aici făcând înlocuirile se obţine formula (3).

Acelaş procedeu şi pentru E_2.

Au rezolvat problema, dând soluţia a doua, D-nii: MIRCEA ADAM, F. NEGREŢU, TIB. POPOVICIU, MARIN ŞTEFAN.

PROBLEMA 3112. *Fiind dat numărul* A=n!, *să se arate că:*

$$N(A) \leqslant 2^{n-1},$$

N(α) *reprezentând numărul divizorilor lui* α.

Să se studieze chestiunile analoage pentru suma divizorilor şi produsul lor.

A. TAUBER.

I. In soluţia Problemei 3103 «*G. M.*», Vol. XXIX, pag. 469, s'a arătat că :

1) $$N(A) \leqslant 2^{n-1}.$$

II. Fie S(A) suma divizorilor lui A.
Admitem că :

$$S(n!) < \lambda_n,$$

atunci vom aveà :

$$S[(n+1)!] < (n+2)\lambda_n.$$

In adevăr, dacă $n+1$ este prim, avem:

$$S[(n+1)!] = S(n!) \cdot S(n+1).$$

Sau :

$$S(n+1) = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1) - 1} = n+2,$$

deci :

$$S[(n+1)!] = S(n!) \cdot (n+2) < \lambda_n \cdot (n+2).$$

Dar în demonstraţie se consideră $(n+1)$ prim, însă se ştie că dacă considerăm $p = ab$ prim (numerele a şi b fiind prime), atunci

$$S(p) < S(a) \cdot S(b),$$

căci în adevăr :

$$S(p) = \frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1 = ab + 1$$

$$S(a) \cdot S(b) = (a+1)(b+1).$$

Deci :

$$S(p) < S(a) \cdot S(b).$$

Așă dar, dacă:

$$S[(n+1)!] < \lambda_n \cdot (n+2),$$

când $n+1$ este prim, cu atât mai mult neegalitatea va există, când $n+1$ nu este prim.

Putem dar conchide că:

$$S[(n+1)!] < \lambda_{n+1},$$

unde:

$$\lambda_{n+1} = (n+2)\,\lambda_n,$$

iar $\lambda_1 = 1$, așă dar recurența odată stabilită, putem spune că:

2) $$S(n!) < \lambda_n,$$

unde $\lambda_n = (n+2)\,\lambda_{n-1}$, iar $\lambda_1 = 1$.

S'ar puteà compară λ_n cu oricari puteri ale lui 2, 3 etc... spre a stabili condițiuni analoage cu 1).

III. Fie P(A) produsul divizorilor lui A, atunci avem:

$$P(n!) = (n!)^{\frac{N(n!)}{2}}.$$

Dar cum:

$$N(n!) \leqslant 2^{n-1},$$

urmează că:

3) $$P(n!) \leqslant (n!)^{2^{n-2}}.$$

S'ar puteà compară $n!$ cu puteri ale lui *2*, *3*, etc... spre a se obține analogii cu 1) și 2) *).

IV. Fie $\varphi(A)$ indicatorul lui A (numărul numerelor prime cu A și inferioare lui), atunci voiu dovedì că:

4) $$\varphi(n!) \leqslant \frac{n!}{3}.$$

---

*) Se poate, spre exemplu, stabili că:

$$P(n!) < 2^{(k-1)\cdot 2^{k+n-2}},$$

unde:

$$k = \frac{\log n}{\log 2}.$$

In adevăr, verificând pentru $n = 1, 2, 3,...$ observăm că relația 4) este adevărată, ori în acest caz va fi adevărată și:

$$\varphi[(n+1)!] \leqslant \frac{(n+1)!}{3},$$

unde considerând $n+1$ prim (cazul cel mai defavorabil), vedem că:

$$\varphi[(n+1)!] = \varphi(n+1) \cdot \varphi(n!).$$

Deci:

$$\varphi(n+1) \cdot \varphi(n!) \leqslant \frac{n!}{3} \cdot (n+1),$$

însă:

$$\varphi(n+1) < n+1$$

$$\varphi(n!) \leqslant \frac{n!}{3},$$

deci relația 4) este adevărată.

Observație. S'ar puteà foarte ușor observà că:

5) $$\varphi(n!) > (n-1)!$$

căci dacă a_i ($i=1, 2, 3,....$) sunt factorii lui $n!$ (numărul lor fiind $\varphi(n!)$), atunci cum:

$$\varphi(n!) = n! \frac{\pi(a-1)}{\pi a},$$

avem:

$$n \frac{\pi(a-1)}{\pi a} > 1.$$

Dar:

$$\frac{\pi(a-1)}{\pi a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{p} > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p},$$

unde p este cel mai mare factor prim al lui $n!$ In acest caz însă:

cum: $$\frac{\pi(a-1)}{\pi a} > \frac{1}{p},$$

iar $$\frac{1}{p} > \frac{1}{n},$$ a *fortiori*, vom aveà:

$$\frac{\pi(a-1)}{\pi a} > \frac{1}{n}.$$

Deci neegalitatea 5) este demonstrată.

Observare. In baza celor arătate mai sus, s'ar puteà chiar afirmà că:

$$6) \qquad \varphi(n!) > \frac{n!}{p},$$

unde p este cel mai mare factor prim al lui $n!$

V. Fie $\sigma(A)$ suma numerelor prime cu A şi inferioare lui. Se ştie că:

$$\sigma(A) = A \cdot \frac{\varphi(A)}{2}.$$

Deci:

$$7) \qquad \sigma(n!) < n! \frac{n!}{2-3} < \frac{(n!)^2}{p},$$

de asemenea:

$$8) \qquad \sigma(n!) > [(n-1)]^2 \cdot \frac{n}{2}.$$

Sau chiar:

$$9) \qquad \sigma(n!) > \frac{(n!)^2}{p}.$$

VI. Fie $\pi(A)$ produsul numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui. Se ştie în acest caz că:

$$\pi(A) < \frac{A!}{p(A)}.$$

Ori:

$$p(n!) = (n!)^{\frac{N(n!)}{2}},$$

prin urmare:

$$10) \qquad \pi(n!) < \frac{n!!}{(n!)^{\frac{N(n!)}{2}}}.$$

Deasemenea, ţinând seamă de relaţiunile de egalitate şi neegalitate respectiv între: N(A), S(A), $p(A)$ şi $\varphi(A)$, $\sigma(A)$, $\pi(A)$, se mai pot deduce şi alte limite. (A se vedeà „*G. M.*", Vol. XXVIII).

Notă. D-l Solomon Weiss, a rezolvat numai punctele I şi III ale problemei, dând numai sumare indicaţiuni asupra punctelor IV, V şi VI.

Căp. I. Lintes.

PROBLEMA 3187. *Se împart cevienele* AA_1, BB_1, CC_1 *ale unui triunghiu* ABC, *prin punctele* M_1, N_1, P_1 *în rapoartele*

$$\frac{AM_1}{AA_1}=y_1+z_1\ ;\ \frac{BN_1}{BB_1}=z_1+x_1\ ;\ \frac{CP_1}{CC_1}=x_1+y_1,$$

x_1, y_1, z_1 *fiind coordonatele baricentrice ale punctului lor de întâlnire* T_1.

Se fac aceleaşi operaţiuni asupra unui alt sistem de ceviene AA_2, BB_2, CC_2 *obţinându-se punctele* M_2, N_2, P_2.

1. *Să se demonstreze că paralelele duse respectiv prin* M_1, N_1, P_1 *la cevienele* AA_2, BB_2, CC_2 *sunt concurente şi reciproc.*

2. *Să se determine poziţiile celor două puncte de întâlnire* T_{12}, T_{21}.

M. GHERMĂNESCU.

Din $AM_1/AA_1=y_1+z_1$, se deduce $M_1A_1\,/\,M_1A=\dfrac{1-y_1-z_1}{y_1+z_1}$,

deci coordonatele baricentrice ale punctului M_1 sunt $(1-y_1-z_1,\ y_1,\ z_1)$. Ecuaţia cevienei AA_2 fiind $\beta z_2-\gamma y_2=0$, ecuaţia paralelei dusă prin M_1 va fi

$$\alpha(y_2z_1-y_1z_2)+\beta(y_2z_1-z_2y_1+z_2)+\gamma(y_2z_1-y_2-y_1z_2)=0.$$

Se arată uşor că această dreaptă împreună cu analoagele, concură în punctul T_{12}

$$\frac{\alpha}{x_1(y_2+z_2)-x_2(y_1+z_1-1)}=\frac{\beta}{y_1(z_2+x_2)-y_2(z_1+x_1-1)}=\frac{\gamma}{z_1(x_2+y_2)-z_2(x_1+y_1-1)},$$

sau

$$\frac{\alpha}{x_1\Sigma x_2-x_2(\Sigma x_1-1)}=\frac{\beta}{y_1\Sigma x_2-y_2(\Sigma x_1-1)}=\frac{\gamma}{z_1\Sigma x_2-z_2(\Sigma x_1-1)},$$

sub această formă se recunoaşte poziţia punctului T_{12} pe dreapta T_1T_2.

Din cauza reciprocităţii, al doilea sistem de paralele va concură în punctul T_{21} de coordonate baricentrice

$$\frac{\alpha}{x_2\Sigma x_1-x_1(\Sigma x_2-1)}=\frac{\beta}{y_2\Sigma x_1-y_1(\Sigma x_1-1)}=\frac{\gamma}{z_2\Sigma x_1-z_1(\Sigma x_2-1)},$$

punct care se află de asemenea pe dreapta T_1T_2. Coordonatele punctelor T_{12}, T_{21} arată că avem şi

$$T_{12}T_1/T_{12}T_2 = T_{21}T_2/T_{21}T_1,$$

ceeace arată că punctele T_{12} şi T_{21} sunt echidistante de T_1 şi T_2.

Dacă am fi considerat şi un al treilea sistem de ceviene AA_3, BB_3, CC_3, concurente în T_3, am fi obţinut 6 puncte T_{12}, T_{21}, T_{13}, T_{31}, T_{23}, T_{32} situate două câte două pe laturile triunghiului $T_1T_2T_3$ şi echidistante de vârfuri şi toate situate pe o conică Γ, pe care am putea-o numi *conica celor trei sisteme*. Dreptele $(T_{12}T_{13}, T_2T_3)$ şi analoagele, sunt paralele.

Au rezolvat problema, D-nii: N. Botea, O. Bolgiu, C. Cioränescu, P. Ionescu, M. Pătroianu, I. Vasiliu.

M. G.

PROBLEMA 3216. *Să se găsiască limita expresiunei*

$$E = \prod_{i=2}^{i=p} \log \frac{\log n}{\dfrac{i.2i....ni}{(i-1)\,(2i-1)....(ni-1)}},$$

când n *creşte nemărginit*, p *rămânând fix.*

C. E. Georgescu.

Soluţie dată de D-nul I. St. Teodorescu.

Vom aveà:

$$\lim E = \lim \log \frac{\log n}{\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{i}\right)\left(1-\dfrac{1}{2i}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{ni}\right)}}. \tag{1}$$

Dacă considerăm pe $u_n = (1 - 1/i)\,(1 - 1/2i)....(1 - 1/ni)$ ca fiind termenul general al unei serii, atunci avem

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log 1/u_n}{\log n} = \lim_{n=\infty} n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = \lim\, n\,\frac{1}{(n+1)\,i - 1} = \frac{1}{i}.$$

Aşà dar limita expresiei (1) va fi i. Facem $i = 2, 3, \ldots p$ şi limita produsului E va fi egală cu produsul limitelor, adică

$$\lim E = 2.3.4 \ldots . p = p!$$

Au dat soluţii analoage, D-nii: M. ADAM, N. BOTEA, C. CIORĂNESCU, V. COŞNIŢĂ, P. IONESCU, S. KATZ, H. MARCOVICI, M. ŞTEFAN, E. ŞTEFĂNESCU, I. VASILIU, S. WEISS.

Problema e un caz particular al problemei 2937 G. M. XXIX.

PROBLEMA 3233. *Care patrate de trei cifre sunt alături de numere prime, în şirul natural al numerelor?*

G. TAILER.

Problema a mai fost propusă şi de D-nul I. LINTEŞ sub No. 2533 în G. M. XXII şi rezolvată în G. M. XXIII pag. 189 — 190. Se găsesc acolo soluţiile

100, 196, 256, 400, 576, 676,

cu numerele prime corespunzătoare

101, 197, 257, 401, 577, 677.

Notă. Au dat soluţie, arătând că problema e cunoscută, D-nii: B. GĂTĂIANŢU, A. ROŞU şi N. TEODORESCU.

Au dat cele 6 soluţii, D-nii: N. BEŞCHEA, E. BOTEA, I. BREZUICA, GH. CĂLIN, C. FLOREA, T. HULUBEI, A. şi C. IONESCU-BUJOR, V. MANAFU, N. MIHĂILESCU, I. MIU, D. NESTOR, S. POPESCU, C. şi I. POPOVICI, E. RUSU, R. SPATY, L. SEGALL, T. STOICESCU, I. VASILIU şi V. VÂRLAN.

Au găsit 5 soluţii, D-nii: N. BOTEA, I. CRISTESCU, M. DIACONU, S. KATZ, N. MANOLESCU, O. SCHÄCHTER, S. WEISS, iar câte 4, D-nii: C. DRÂMBĂ, I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ, C. POPESCU, I. C. VASILIU, V. NOVACU şi I. ZAMFIR.

In fine, s'au găsit corespondenţi cari au afirmat că 901 e număr prim, ca D-nii: HAIM COHN, I. DĂBULENI, I. FOCA şi H. MARCOVICI.

M. G.

PROBLEMA 3345. *Fie* O_a, O_b, O_c *centrele cercurilor lui* CARNOT *ale unui triunghiu oarecare* ABC. *Se cere să se demonstreze că triunghiurile* ABC *şi* $O_a O_b O_c$ *sunt egale; că ele au aceeaşi dreaptă a lui* EULER *şi că dreptele* AO_a, BO_b, CO_c *se întretaie în centrul cercului lui* EULER, *comun acestor două triunghiuri.*

MARIN ŞTEFAN.

Soluţie dată de D-nii: Ion C. Vasiliu, Const. Th. Ionescu-Bujor, Valeriu Manafu, Ion Th. Popovici, C. C. Popovici, Virgil Râpeanu, Telemac Hulubei, Toma Puşcă, Th. Stoicescu, Avram Lupu, N. Teodorescu, Leon Segal, Istinie I. C. Brezuica, Gh. M. Călin, Andrei Th. Ionescu-Bujor, N. I. Manolescu, Corneliu N. Popescu, Solomon Weiss, Alexe V. Roşculeţ, Ion O. Zaharia, George Tailer, David Haim, Radu I. Adam, Th. Gh. Cocea, Adrian C. Gheorghiu, N. Şt. Mihăilescu, Grigore Mareş, Em. Gh. Gaiu, René I. Spathy, I. Nicolau Dobridor şi Gh. Munteanu.

Fie H ortocentrul triunghiului ABC, A_1 mijlocul laturei BC, A' piciorul înălţimei AH şi A_2 punctul unde înălţimea AH taie a doua oară cercul O circumscris triunghiului ABC.

Se ştie că cercurile lui Carnot sunt cercurile circumscrise triunghiurilor HBC, HCA, HAB. Se mai ştie că aceste cercuri sunt egale. In adevăr, punctele H şi A_2 sunt simetrice faţă de BC; deci triunghiurile BCH şi BCA_2 sunt egale şi prin urmare şi cercurile circumscrise lor sunt egale. Ori cercul circumscris triunghiului BCA_2 este chiar cercul O; deci cercul O_a este egal cu cercul O şi analog cercurile O_b, O_c sunt egale şi ele cu cercul O.

Rezultă că centrele O_a, O_b, O_c sunt simetricele centrului O in raport cu laturile BC, CA, AB.

Se mai ştie că $OA_1 = \frac{1}{2}AH$; deci segmentele OO_a şi AH sunt egale şi paralele; analog OO_b este egal şi paralel cu BH, iar OO_c egal şi paralel CH.

Urmează că triunghiurile $OO_a O_b$ şi HAB sunt egale şi homotetice şi deci dreptele HO, AO_a, BO_b se taie reciproc în părţi egale în centrul de homotetie al triunghiurilor. Acest centru fiind mijlocul lui OH, este centrul ω al cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC.

Deducem de aici că triunghiurile ABC şi $O_a O_b O_c$ sunt şi ele egale şi homotetice, având pe ω ca centrul de homotetie. Această proprietate demonstrează complet problema popusă, căci conţine toate proprietăţile din enunţul ei.

Notă. Soluţiile trimese de corespondenţi, prezintă unele variante, care toate se reduc la proprietatea caracteristică demonstrată în soluţia de mai sus, că *triunghiurile* ABC *şi* $O_a O_b O_c$ *sunt egale şi homotetice.*

D-nul Em. Gh. Gaiu (Bârlad) observă că proprietatea că ortocentrul H

este centrul cercului circumscris triunghiului O_a O_b O_c , face obiectul problemei 520 din *Gazeta Matematică*, Vol. VI, p. 69.

D-nii Grigore Mareş (Liceul Bacău) şi A. Stoica observă că problema propusă se poate deduce din teorema 311. — I (chestiunea 1093) din *Exercices de Géométrie* par *F. G.-M.*, sixième éd. p. 448).

D-nul Valeriu Manafu (Elev cl. VI, Liceul Mânăstirea Dealului) ne comunică că problema de care ne ocupăm face obiectul Problemei 37 din *F. M.*, No. 10, octomvrie 1925.

E regretabil că corespondenţii noştri îşi trimet, în acelaş timp, lucrările lor la mai multe reviste.

V. C.

PROBLEMA 3374. *Fie* A', B', C' *punctele unde înălţimile triunghiului* ABC *intersectează a doua oară cercul* O *circumscris triunghiului şi* A_1, B_1, C_1 *punctele diametral opuse lui* A', B', C'. *Notăm cu* A_2, B_2, C_2 *respectiv intersecţiile perechilor de drepte* (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), $(AA_1\ BB_1)$. *Să se demonstreze că:*

1. O *este centrul cercului lui* Euler *al triunghiului* $A_2B_2C_2$.
2. *Triunghiurile* A'B'C', $A_2B_2C_2$ *sunt ortologice.*

C. Ciorănescu.

Soluţie dată de D-nii: Ion C. Vasiliu, Const. C. Popovici, Gh. D. Simionescu, David Haim, Rădu Adam, Istinie I. C. Brezuica, Otto I. Braeşter, Gh. M. Călin, T. Gh. Cocea, A. M. Cernes, V. Dorneanu, Em. Gh. Gaiu, Răducanu Georgescu, C. Adrian Gheorghiu, C. Ionescu-Bujor, N. I. Manolescu, N. St Mihăilescu, D. G. Nestor, Corneliu N. Popescu, Leon Segal, George Tailer, N. Teodorescu, R. I. Spathy, Solomon Weiss, Ion Zaharia, Aureliu Stoica, Alexe V. Roşculeţ, Marin B. Marinaş, Gh. Munteanu.

Triunghiul $A'AA_1$ fiind dreptunghic în A, latura AA_1 este perpendiculară pe AA' şi deci paralelă cu BC. Rezultă că triunghiul $A_2B_2C_2$ este *anticomplimentarul* lui ABC, de oarece el s'a obţinut ducând prin vârfurile A, B, C paralele cu laturile opuse. Deci A, B, C sunt mijloacele laturilor triunghiului $A_2B_2C_2$, iar cercul O este cercul lui Euler al acestui triunghiu.

Mai rezultă că triunghiurile A'B'C' şi $A_2B_2C_2$ sunt ortologice, de oarece perpendicularele scoborîte din vârfurile A', B', C' ale triunghiului A'B'C' respectiv pe laturile B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 ale triun-

ghiului $A_2B_2C_2$ sunt înălțimile triunghiului ABC și deci concură în ortocentrul H al acestui triunghiu.

Notă. D-nul I. C. Vasiliu demonstrează că și perpendicularele scoborite din vârfurile A_2, B_2, C_2 respectiv pe laturile B'C', C'A', A'B' ale triunghiului A'B'C' concură de asemenea în H, adică cele două centre de ortologie se confundă în ortocentrul triunghiului ABC.

In adevăr, se știe că laturile triunghiului A'B'C' sunt paralele cu laturile triunghiului ortic din triunghiul ABC, sau antiparalele în unghiurile A, B, C față de laturile opuse. Rezultă atunci că B'C' e antiparalelă și față de B_2C_2 în unghiul A_2. Ori se știe că în orice triunghiu, perpendicularele duse din vârfuri pe o antiparalelă din unghiul respectiv, concură în centrul cercului circumscris triunghiului. Deci, perpendicularele duse din A_2, B_2, C_2 respectiv pe B'C', C'A', A'B' concură în H, centrul cercului circumscris triunghiului $A_2B_2C_2$.

PROBLEMA 3391. *Care este poligonul cu cel mai mic număr de laturi, la care numărul liniilor care unesc toate vârfurile câte două, este un patrat perfect?*

I. Ionescu.

Soluție dată de D-l René S. Spathy (Elev Lc. Matei Basarab, București).

Poligonul având x vârfuri, are C_x^2 linii, care unesc vârfurile câte două, două. Chestiunea revine dar la a rezolvà în numere întregi ecuația:

$$C_x^2 = \frac{x(x-1)}{1.2} = y^2,$$

$$x^2 - x - 2y^2 = 0,$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{1+8y^2}}{2}.$$

Soluția cu — dă $x < 0$ și nu convine. Deci

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1+8y^2} + 1).$$

Se vede că trebue ca $(1 + 8y^2)$ să fie un patrat perfect. Rădăcina lui fiind nepereche, găsim pentru x o valoare întreagă. Insă condițiunea ca $(1 + 8y^2)$ să fie patrat perfect, a fost examinată complet la problema 2395, pag. 467, Anul XXX al *Gazetei Matematice*, de D-l W. Solomon. Referindu-ne la acel studiu, găsim

$$y = 0\ ;\ 1\ ;\ 6\ ;\ 35\ ;\ 204\ ;\ 1189\ ;\ 6930\ ;\ 40391\ ;\ \ldots$$

$$x = 1\ ;\ 2\ ;\ 9\ ;\ 50\ ;\ 289\ ;\ 1682\ ;\ 9801\ ;\ 57122\ ;\ \ldots$$

Cea mai mică soluție admisibilă este $x = 9$, care corespunde unui *exagon*.

Au rezolvat problema prin încercări, D-nii: M. Vasiliu, A. M. Weissbuch, David Haim, A. G. Borneanu, L. Sternfeld, E. Mortun.

D-nii: E. N. Albeață, A. M. Cernes, N. I. Manolescu, M. C. Drâmbă, A. Caracostea, D. I. Popescu, G. Ioachim, N. I. Manolescu, P. N. Drogeanu, G. D. Nestor, A. Ionescu Bujor, M. Gr. Vellea, G. Munteanu, G. Tailer, P. G. Carabețeanu, au pus condiția ca numărul diagonalelor să fie patrat și au găsit exagonul.

EXERCIȚII

51. Se cere numărul de cinci cifre în care primele patru formează un cub, iar suma cifrelor este 37.

V. C. Popescu.

R. Prima cifră nu poate fi 1, decât la numărul 19999, care nu convine căci 1999 nu e cub. Dacă prima este 2, celelalte trebuie să fie 8, 9, 9, 9. Însă cuburile de patru cifre începând cu 2 sunt 2197, 2744; etc. Se găsește singura soluție *68599*.

52. Când fracția:

$$\frac{4x^2 + 9y^2}{3x + 9y},$$

se reduce la un întreg?

David Haim.

R. Se vede că $x = 3u$, și ne rămâne $(4u^2 + y^2)/(u + y)$. Scoatem y întregi și ne rămâne $u(4u - y)/(u + y)$. Fie d cel mai mare comun divizor al lui u și y și $u = d\alpha$, $y = d\beta$. Rămâne $d\alpha(4\alpha - \beta)/(\alpha + \beta)$. Dar α este prim cu $(\alpha + \beta)$. Deci trebuie întreg $d(4\alpha - \beta)/(\alpha + \beta)$, sau $d[5\alpha - (\alpha - \beta)]/(\alpha + \beta)$ Rămâne a face întreg pe $5d\alpha/(\alpha + \beta)$, sau pe $5d/(\alpha + \beta)$. Trebuie $(\alpha + \beta) = 5u$ și $d = ku$, de unde $x = ku\alpha$, $y = ku\,(5u - \alpha)$.

53. Să se găsiască un patrat perfect de patru cifre *abcd*, astfel ca *bcd* să fie un patrat perfect; de asemenea *cd* să fie tot un patrat perfect, iar cifrele *a* și *b* sunt consecutive.

S.

R. *cd* e un patrat perfect de două cifre, adică ar puteà fi 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Din aceste numere, formăm toate patratele posibile de trei cifre *bcd*; adică 000, 001, 004, 009, 225, 400, 625, 900. De aci se deduc soluțiile exercițiului: $1000, 1225 = 35^2, 5625 = 75^2$.

54. Să se găsiască patratele perfecte de patru cifre *abcd*, astfel ca numerele *abc* și *cd* să fie patrate perfecte, iar *a* și *b* să fie numere consecutive.

Th. Gh. Cocea.

R. *cd* e unul din numerele 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Dar *abc* fiind un patrat perfect, *c* e diferit de 2, 3, 7, 8. Rămân deci de incercat 00, 01, 04, 09, 16, 49, 64. Condiţiile problemei ne conduc să încercăm mai întâi 1000, 1001, 1004, 1009. Din acestea numai 1000 satisface problemei. Pentru celelalte trei terminaţiuni, ne rămân de încercat dacă sunt patrate perfecte următoarele numere: 1216, 3249, 7849, 6764 (căci numărul format de primele trei cifre trebuie să fie patrat şi să aibă primele două cifre consecutive). Se găseşte astfel soluţia: $3249 = 57^2$.

55. Să se rezolve, in numere intregi, ecuaţia:

$$(x+y)^{x-y} = y^x .$$

I. C. VASILIU,

R. Deducem $[(x+y)/y]^x = (x+y)^y$. Se vede că $x = ay$, şi ne rămâne $(a+1)^{ay} = (a+1)^y \cdot y^y$, deci $y = (a+1)^{a-1}$, $x = a(a+1)^{a-1}$.

56. Să se demonstreze următoarele relaţii:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta(b-a)} + \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma(c-b)} + \frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha(c-a)} = \frac{1}{Rr}$$

$$\frac{m_a}{\alpha a} + \frac{m_b}{b\beta} + \frac{m_c}{c\gamma} = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc},$$

α, β, γ fiind simedianele exterioare, iar celelalte elemente având semnificarea cunoscută.

V. RÂPEANU.

R. Avem $\alpha = \frac{abc}{b^2-c^2}$, etc., aşă că prima sumă devine $\sum \frac{b+a}{abc}$ sau $\frac{4p}{4RS}$, de unde se deduce relaţia cerută (căci $pr = S$). Pentru relaţia a doua întrebuinţăm teorema lui THIRY. (F. J. Ex. de Géom. 3e éd. pag. 1034) şi anume:

$$\frac{\alpha}{m_a} = \frac{2bc}{b^2+c^2} .$$

57. Să se găsiască limita expresiei

$$E = \frac{\left(1-\cos\frac{a}{x}\right)^\beta}{\sin^\alpha \frac{b}{x}},$$

când x tinde către infinit.

H. MARCOVICI.

R. $\lim E = \lim 2^\beta \frac{\sin^{2\beta}\frac{a}{2x}}{\sin^\alpha \frac{b}{x}} = \lim \frac{a^{2\beta}}{2^\beta b^\alpha} x^{\alpha-2\beta}$ şi e infinită, zero, sau $\left(\frac{a}{b\sqrt{2}}\right)^\beta$, după cum 2β e mai mic, mai mare, sau egal cu α.

58. Să se afle maximul expresiei

$$E = \text{cotA cotB cotC cosecA cosecB cosecC.}$$

TELEMAC HULUBEI.

R. $E = \frac{\text{cosA}}{\text{sinB sinC}} \times \ldots$. Dar $\sum \frac{\text{cosA}}{\text{sinB sinC}} = 2$. (Culegere de prob. trig. cap. XVII. 21). Deci avem maximum când

$$\frac{\text{cosA}}{\text{sinB sinC}} = \frac{\text{cosB}}{\text{sinC sinA}} = \frac{\text{cosC}}{\text{sinA sinB}},$$

ceeace atrage răspunsul că triunghiul e echilateral. Valoarea lui E se calculează apoi fără nici o dificultate.

PROBLEME PROPUSE*).

3411. Care este cel mai mic număr care se scrie *aoa* într'un sistem de numerațiune și *bob* în alt sistem de numerațiune?

I. IONESCU.

3412. Care este forma generală a fracțiilor cuprinse între 5/3 și 13/7, care au patratele lor coprinse între 197/65 și 65/21?

E. ȘTEFĂNESCU.

3413. Să se arate că pentru $n > 3$ avem:

$$\varphi(n!) > [\varphi(n)]!,$$

$\varphi(1)$ fiind indicatorul lui I.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Errata. La problema 3399 inegalitatea ce se cere a se demonstră este:

$$a\text{cotg}\tfrac{1}{2}A + b\text{cotg}\tfrac{1}{2}B + c\text{cotg}\tfrac{1}{2}C \leqslant 3(a\text{tg}\tfrac{1}{2}A + b\text{tg}\tfrac{1}{2}B + c\text{tg}\tfrac{1}{2}C),$$

cum ereă în manuscrisul autorului.

(N. R.)

3414. Se dă un patrat ABCD. Pe laturile BC şi CD se iau respectiv punctele M şi N aşà ca unghiul MAN să fie de 45^0. Pe BC, în sensul BC, se mai ia un punct P aşà ca BM să fie egal cu CP. Să se demonstreze că

$$BP \cdot DN = AB \cdot CM.$$

COLONEL GH. BUICLIU.

3415. Fie I centrul cercului înscris într'un triunghiu ABC. Două drepte D_1 şi D_2, care trec prin I taie cercurile BIC, CIA, AIB respectiv în A_1, B_1, C_1 şi A_2, B_2, C_2. Să se arate că:

1. Proiecţiile punctelor A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA, AB, sunt colineare.

2. Tangentele duse în A_1, B_1, C_1 respectiv la cercurile BIC, CIA, AIB taie laturile BC, CA, AB, în puntele colineare.

3. Triunghiul format de dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 este homologic cu triunghiul ABC.

M. GRÜNBAUM.

3416. Se consideră un punct M mobil pe latura Ox a unghiului fix xOy şi un alt punct fix N în acelaş plan. Fie P proiecţia punctului M pe Oy şi Q proiecţia punctului O pe dreapta MN. Să se arate că dreapta PQ trece printr'un punct fix.

N. G. BOTEA.

3417. Fie i_a, i_b, i_c porţiunile din înălţimile unui triunghiu cuprinse între vârfuri şi ortocentru; S aria triunghiului. Să se demonstreze relaţiile

$$\frac{i_b - i_c}{p - a} + \frac{i_c - i_a}{p - b} + \frac{i_a - i_b}{p - c} = 0,$$

$$S = \frac{bc(b^2 - c^2)}{2(bi_c - ci_b)}.$$

ATH. RADEV.

3418. Să se determine coeficienții a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 pentru ca produsul determinanților

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ a_2 & x & b_2 \\ a_3 & b_3 & x \end{vmatrix}$$

să fie determinantul

$$\begin{vmatrix} x^2+4 & 5x+2 & 4x+2 \\ 3x+6 & x^2+12 & 4x+6 \\ 3x+3 & 5x+2 & x^2+6 \end{vmatrix}.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

3419. Fiind dată ecuația :

$$x(\alpha\sqrt{x^2-\alpha^2}+\beta\sqrt{x^2-\beta^2}) = \alpha\beta\gamma+\gamma\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)},$$

unde α, β, γ sunt numere reale și pozitive, astfel că suma a două dintre ele să fie mai mare totdeauna decât al treilea, se cere să se găsiască o rădăcină reală și pozitivă a ei.

CONST. C. POPOVICI.

3420. Fie N punctul de intersecție al unei drepte D cu normala în punctul M al unei curbe (C). Se duce perpendiculara Δ în N pe NM.

Să se arate, prin considerațiuni geometrice :

1°. Că punctul de contact P al dreptei Δ cu înfășurătoarea sa, se găsește la intersecția dreptei Δ cu cercul tangent dreptei D în N și trecând prin centrul de curbură în M la curba (C);

2°. Că tangenta la curba descrisă de intersecția Q a dreptei Δ cu perpendiculara pe Δ dusă dintr'un punct fix O al dreptei D, se obține ducând tangenta în Q la cercul de diametru OP;

3°. Se duce pe Δ, NM' = NM; să se construiască tangenta la curba descrisă de M'. Să se studieze transformarea (M, M').

N. ABRAMESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam R. (3342, 95, 99); *Albață E.* (3392); *Argeșanu R.* (3392); *Baciu T.* (3392); *Baidac-Gradino D.* (3392); *Bălășescu C.* (3392); *Borneanu A.* (3392); *Botea E.* (3392); *Braester O.* (3407, 10); *Brezuica I.* (3366, 92, 401, P, R); *Căldăraru L.* (3401); *Călin G.* (3382); *Carabețeanu P.* (3392); *Cernes M.* (3392); *David H.* (3382, 401); *Diaconescu T.* (3382, 92, 401, R); *Dorneanu V.* (3339, 80, 88, R); *Drâmbă C.* (3369, 92, 401, N); *Drogeanu P.* (3401); *Gaiu Em.* (3395, 99, P); *Gataianțu B.* (3392, 410); *Georgescu-Racoviță I. I.* (3369, 95, 99, P); *Georgescu-Răducan* (3407, 10); *Gheorghiu Gh.* (3289, 339, 69, 401); *Grünstein E.* (3347, 66, 401, 07, 10); *Haim L.* (3392, 407, P); *Ioachim Gr.* (3366, 82, 99, 407); *Ionescu-Brezuica I. C.* (3399, 410); *Ionescu-Bujor A.* (3392, 99, P); *Ionescu-Bujor C.* (3327, 39, 82); *Krauker I.* (3392); *Manolescu N.* (3366, 80, 88, 95, 401); *Marinaș M.* (3392); *Mihăilescu N.* (3392); *Miu I.* (3382, 401, 10, R); *Munteanu Gh.* (3380, 95, 99, 401, 10); *Nestor D.* (3369, 82); *Nicolau Gh.* (3259, 89, 378, 409); *Nicolau-Dobridor I.* (3392, 95); *Novacu V.* (3339, 80, 82, 92); *Orănescu O.* (2484); *Pântea A.* (3392); *Pârvu A.* (C); *Popescu C. V.* (3392); *Roșculeț Al.* (3347, 80, 99); *Roșu Al.* (3369); *Spacu P.* (3399); *Spathy R.* (3382, 92, 401, 07, 10, N, P); *Ștefănescu Emil* (3330); *Sternhell L.* (3395, R); *Stoica A.* (3347, 69); *Stoicescu T.* (3380, 401); *Tailer G.* (3399, 401, 10); *Tănase T.* (3392); *Vasilescu B.* (3392); *Vasiliu C. I.* (3349); *Velea M.* (3347, 69, 99, 410, N, P, R); *Weisbuch A.* (3380, 92, P); *Zamfirescu I.* (3366, 92).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 944, 2440, 43, 602, 43, 3109, 74, 228, 48, 52, 82, 99, 303, 17, 32, 33, 43, 52, 53, 56, 59, 62, 63, 65, 71, 72, 77, 78, 83, 87, 89, 93, 94, 98, 402, 03, 06 și 09 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmètică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu**, *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită*, 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu**, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* . . Lei 180,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu**, (adresa: Str. Basarabia, 45, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.

Gnor Asoc. pentru cultura și literatura poporului român din Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1926.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

BUCUREȘTI 16.VI.926 EXPEDIȚIARE

SUMARUL

1. Sur les triangles de M. N. Blaha . . *N. Agronomof.*
2. Asupra unei inegalităţi . . . . . *Şerban A. Gheorghiu.*
3. Cuburi terminate cu rădăcina lor . . *E. Ştefănescu.*
4. Note Matematice: 51—59.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografii.
7. Cereri: 138.
8. Probleme rezolvate: 2484, 3194, 3195, 3256, 3284, 3363.
9. Exerciţii: 59—61.
10. Probleme propuse: 3421—3430.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1926

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer Inspector General, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 766, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 43, 55, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 353, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 85, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 64, 75, 76, 78, 79, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 25, 33, 35, 41, 43, 44, 50, 54, 60, 61, 64, 71, 72, 79, 85, 87, 90, 96, 97, 98, 400, 02, 03, 04, 05, 06, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „Gazeta Matematică“ (Fabrica de Chibrituri din Bucureşti), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1926.

SUMARUL

1. Sur les triangles de M. N. Blaha . . . *N. Agronomof.*
2. Asupra unei inegalităţi . . . . . *Şerban A. Gheorghiu.*
3. Cuburi terminate cu rădăcina lor . . *E. Ştefănescu.*
4. Note Matematice: 51—59.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografii.
7. Cereri: 138.
8. Probleme rezolvate: 2484, 3194, 3195, 3256, 3284, 3363.
9. Exerciţii: 59—61.
10. Probleme propuse: 3421—3430.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1926

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer Inspector General, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 766, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 43, 55, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 353, 92, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 85, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 64, 75, 76, 78, 79, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 25, 33, 35, 41, 43, 44, 50, 54, 60, 61, 64, 71, 72, 79, 85, 87, 90, 96, 97, 98, 400, 02, 03, 04, 05, 06, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „Gazeta Matematică“ (Fabrica de Chibrituri din Bucureşti), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXI *SUPLIMENT* No. 10

RECREAŢIUNI

1. **Cum se fac problemele acasă.** Răspunsul îl găsim în cartea de limba franceză de clasa II-a a D-lui CANDREA, pe care îl reproducem aci:

„Un écolier entre chez un épicier. Dites mais, monsieur, je voudrais une livre de café à 4 fr. le kilo, une livre de sucre à 1 fr. 30 le kilo, 2 paquets de bougies à 1 fr. 45 le paquet, 2 livres de riz à 9 fr. 80 le kilo et 125 grammes de raisin de Corinthe à 3 fr. 20 le kilo. Je vous donnerai une pièce de vingt francs pour payer tout cela. Combien me rendez vous ?

L'épicier prend un crayon, fait le calcul et repond:

— Il vous reviendra 14 fr. 15.

— Je vous remercie, monsieur, dit le gamain, en faisant demi-tour.

— Eh bien! Attendez que je vous serve.

— Oh! c'est inutile! ...Je vais en classe et je n'avais pas eu le temps de faire mon problème".

ISTINIE I. C. BREZUICA

Elevul nu a făcut nici o ispravă, căci băcanul a greşit socoteala! O livră având 0,4895 kg., costul ereà 15,50 şi restul 4,50! Dacă cumpără, păcăleà pe băcan, pe când aşà s'a păcălit singur, ducându-se cu un rezultat falş la şcoală! Nu e mai bine să înveţe şi să munciască elevii, ca să-şi facă singuri problemele ?!

I. I.

* * *

2. **O rectificare.** In *„Adevărul literar"* de Paşte, găsim la rubrica *„Curiosităţi"* următoarea problemă:

„Să se găsiască cel mai mare număr ce se poate scrie cu trei cifre". Se dă ca rezultat $(9^9)^9$, adică 9^{81}. In realitate cel mai mare număr de trei cifre este 9^{99}.

L. STERNHELL.

Rectificarea rectificării. E altul mai mare şi anume:

$$9^{\binom{9}{9}}$$

I. I.

* * *

3. **Mania propunerii de probleme.** Unii începători în studiul matematicilor, nici nu apucă să rezolve bine problemele propuse şi caută să fie propunători de probleme. Iată ce ne trimite un corespondent nou:

Să se arate că expresiunea

$$17^n \cdot 8^{3n} + 16^n \cdot 7^{2n} - 8,$$

se divide cu 79.

Se observă că:

$$17^n \cdot 8^{3n} = 17^n \cdot 512^n = 8704^n = \mathcal{M}79 + 14$$

şi

$$16^n \cdot 7^{2n} = 16^n \cdot 49^n = 789^n = \mathcal{M}79 + 73.$$

Atâta şi nimic mai mult. Eroarea este mare şi vizibilă!

I. I.

* * *

4. **O nouă aritmetică.** In *„Noi Studii critice"* de H. Sanielevici la pag. 250 citim:

Iluziile tinereţii!

Cea dintâiu şi cea mai însemnată, e că viaţa îţi pare veşnică.

...Teoreticeşte ştii bine că n'ai să trăieşti decât vre-o 70 ani, dar în *Aritmetica specială a vârstei*, acest număr este egal cu infinitul.

V. Dorneanu.

* * *

5. **Pe onoarea mea.** In răspunsul dat de D-l Marcel Prevost la recepţiunea la Academia Franceză a D-lui Emile Picard, a povestit următoarea întâmplare a lui Cauchy.

Pe la 1833 Cauchy ereà la Praga şi dădeà lecţii de matematică ducelui de Bordeaux. Ajunseseră la teorema că o secţiune plană într'un con este o elipsă. Discipolul regal nu pricepeà; lui i se păreà că secţiunea e mai umflată în în partea de sus decât în cea de jos. Cauchy îi dă fel de fel de argumente geometrice; toate de prisos. La urma urmei, incetează orice raţionament, se uită fix în ochii elevului său şi îi zice:

— „Ştii că sunt om onest şi incapabil să vă înşel".

— „Cum de nu" răspunse ducele restit.

— Ei bine, în condiţiunile pe care vi le-am arătat, secţiunea plană în con este o elipsă; vă dau cuvântul meu de onoare".

— Nici un cuvânt mai mult, Domnule. Nici o vorbă mai mult; vă cred pe cuvânt: secţiunea este o elipsă. Chestiunea este terminată. Puteţi merge mai departe".

I. I.

* * *

6. **Patrat simbolic!** Citim în „*La Bataille*“ de Claude *Farrèze*:

„Un vrai jardin japonais: un *carré* minuscule, *long de dix mètres, large de quinze*, que trois murs très hauts, pressaient contre la maison; mais *un carré véritablement symbolique*, où l'on apercevait des montagnes et des plaines, des forêts, une cascade, un torrent, des cavernes et un lac; — tout cela, bien entendu, en miniature“.

M. Ghelber.

* * *

7. **Teorema lui** Menelaus. Prof. — In ce constă teorema lui Menelaus?

Elev. — Dacă laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC sunt întâlnite în C', B', A' de către o transversală.

Prof. — Ce este de demonstrat?

Elev. — Că A', B', C' sunt în linie dreaptă.

A. M. Cernes.

* * *

8. **O epigramă.** In „*Flacăra*“ (Anul I, No. 22) găsim următoarea epigramă adresată: „*Unui profesor de matematici*“.

Când vreă să *demonstreze* vre-o *problemă*
Cu *radicale* lungi, *patrate, raţii,*
Se 'ncurcă aşă de rău, încât elevii
Ii fac la rândul lor vii *demonstraţii.*

(Miozino)
C. C. Popovici.

* * *

9. **Cubist.** Să nu se creadă că este vorba de cei ce fac cuburi; de cei ce extrag din cap rădăcini cubice; de cei ce studiază proprietăţile cuburilor sau ale cubicelor, sau de vre-o altă specie de matematiciani veritabili. Explicaţia acestui cuvânt o găsim într'un roman, pe care o reproducem textual:

„Voici maintenant un *cubiste*. Les cubistes sont le produit d'un croisement. De même qu'on obtient un mulet en unissant le cheval à l'anesse, de même le cubiste est le resultat des amours fugitives d'un mathématicien et d'une femme peintre. Sa vision est géométrique. Pour lui le baisser est la tangente de deux segments; la femme dans la rue un romboide étranglé; le cheval devant la voiture, un parallèlipipède incliné;...“.

I. I.

* * *

10. **Dadaismul în tecnică.** Mai bine a-şi zice *gagaismul.* Dimensiunile dadaice citate de D-l Căp. Gr. Zapan în Recreaţia 6, No. 5 anul XXX, nu sunt nimic pe lângă cele ce urmează.

Explicam o lecţie de organe de maşini. La finele orei, scot la tablă pe un ascultător. (Nici eu nu îndrăsnesc să-i spun vârsta şi gradul) şi vreau să fac cu el o aplicaţie asupra determinării unei biele. Simţind că nu merge, i-am cerut să desemneze o bielă, apoi o manivelă. loc. — Atunci vreau să trec la o altă chestie. — „Fă-mi un arbore de maşină". — Stă. Se gândeşte, pune mâna la frunte şi plin de inspiraţie desemnează un copac pe tablă.

Am râs cu clasa întreagă şi ora s'a terminat într'o veselie neobişnuită!

GH. B.

* * *

11. **Melcul matematic.** La o lecţie de zoologie:
— Prof. Câte feluri de melci cunoşti?
— Elevul spune două specii.
— Prof. Numai cunoşti alte specii?
— Elevul tace.
— Prof. D-ta de colo, răspunde.
— Elevul. *Melcul lui Pascal!*

I. POPA.

* * *

12. **Constelaţii geometrice.** In *Astronomia* lui QUETELET, tradusă de SPIRU HARET în 1873 şi tipărită la Iaşi se pot citi următoarele constelaţiuni:
Săgeata, Triunghiul, Micul triunghiu, Triunghiul austral, Compasul şi echerul, Echerul şi rigla, Quartul cercului.

I. I.

* * *

13. **Formula sufletului.** In „Dela misticism la raţionalism" de M. DRAGOMIRESCU, pag. 319 se pot citi următoarele:
„Notând prin S sensibilitatea, I inteligenţa şi prin V voinţa; formula sufletului lui GOETHE este $S^5 \times I_6 \times V^2$: iar formula sufletului lui DANTE este $S^6 \times I_2 \times V_3$".
Cine poate demonstrà aceste formule?!

C. N. POPESCU.

* * *

14. **Suflete în ecuaţii.** In numărul de Paşte 1924 al ziarului *Dimineaţa* stă scris:
„In special, să te păziască Dumnezeu de spiritele *ştiinţifice* în călătorie... Trenul lor trece prin regiuni nesfârşite de *geografie geometrică* şi de suflete în *ecuaţie de gradul I*".

M. G. LIVADA.

SUR LES TRIANGLES DE M. N. BLAHA.

1. Considérons les triangles $\alpha\beta\gamma$ étudié par M. N. BLAHA dans cette revue Vol. XXXI, pag. 16 — 19, et soit M le point d'intersection des droites AA', BB', CC', et p, q, r ses coordonnées barycentriques. Les équations des droites $A'A_1$, $B'B_1$ sont:

$$(A'A_1) \qquad qx - ry + qz = 0,$$

$$(B'B_1) \qquad rx + ry - qz = 0.$$

Par conséquent les coordonnées des points A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 sont les suivantes:

$$A_1[pr, q(p+r), r^2]; \quad B_1[p^2, pq, r(p+q)]; \quad C_1[p(q+r), q^2, qr];$$

$$A_2[pq, q^2, r(p+q)]; \quad C_2[p(q+r), qr, r^2]; \quad C_2[p^2, q(p+r), pr].$$

Les équations des droites B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 sont:

$$(B_1C_2) \qquad -Px + p^2(y+z) = 0,$$

$$(C_1A_2) \qquad -Py + q^2(x+z) = 0,$$

$$(A_1B_2) \qquad -Pz + r^2(x+y) = 0,$$

où:

$$P = qr + pr + pq.$$

En résolvant ces équations, nous avons les coordonnées du triangle $\alpha\beta\gamma$ du M. N. BLAHA:

$$\alpha[pP, q^2(p+r), r^2(p+q)]; \qquad \beta[p^2(q+r), qP, r^2(p+q)];$$

$$\gamma[p^2(q+r), q^2(p+r), rP].$$

On en déduit que *le centre d'homologie* N des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ a les coordonnées: $N[p^2(q+r), q^2(p+r), r^2(p+q)]$.

2. Soient les points $N_2(p^2, q^2, r^2)$ et $N_3(p^3, q^3, r^3)$.

Les points N, N_1, N_2 sont en ligne droite.

En effet, on a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2(q+r) & q^2(p+r) & r^2(p+q) \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{vmatrix} = p^2q^2r^2 \begin{vmatrix} q+r & p+r & p+q \\ 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \end{vmatrix},$$

$$\Delta = p^2q^2r^2 \begin{vmatrix} p+q+r & p+q+r & p+q+r \\ 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

3. Soient α_0, β_0, γ_0 les intersections des droites (βC, γB); (γA, αC); (αB, βA). Les coordonnées de ces points sont:

α_0 $\quad [p^2(q+r),\ q(\mathrm{P}+pr),\ r(\mathrm{P}+pq)]$,

β_0 $\quad [p(\mathrm{P}+qr),\ q^2(p+r),\ r(\mathrm{P}+pq)]$,

γ_0 $\quad [p(\mathrm{P}+qr),\ q(\mathrm{P}+pr),\ r^2(p+q)]$.

On en déduit:

Les triangles ABC *et* $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ *sont homologiques ayant le point* N_0 *pour centre d'homologie:* $N_0[p(\mathrm{P}+qr),\ q(\mathrm{P}+pr),\ r(\mathrm{P}+pq)]$.

4. De là on peut conclure que:

a) *La droite* NN_0 *contient le point* M *et le barycentre du triangle* ABC.

b) *Les triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ *sont homologiques ayant le centre d'homologie en* M.

c) *Les côtés des triangles* ABC, $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ *sont parallèles.*

5. *Soient* G *et* G_0 *les centres de gravités des triangles* $\alpha\beta\gamma$ *et* $\alpha_0\beta_0\gamma_0$. Des calculs assez simples donnent les coordonnées de ces deux points:

G $\quad [p(3\mathrm{P}-qt),\ q(3\mathrm{P}-pr),\ r(3\mathrm{P}-pq)]$,

G_0 $\quad [p(3\mathrm{P}+qt),\ q(3\mathrm{P}+pr),\ r(3\mathrm{P}+pq)]$.

La droite GG_0 *passe par le point* M *et par le barycentre du triangle* ABC.

N. Agronomof.
(Universsité de Wladiwostok, Russie).

ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI.

In cele ce urmează, îmi propun a reluà inegalitatea ce formează obiectul articolului cu acelaş titlu*) al D-lui Victor Vâlcovici şi a regăsi pe o cale mai simplă şi mai intuitivă rezultatul stabilit de D-sa.

*) G. M. Vol. XXX. No. 8.

Voesc să demonstrez, că se pot determină cinci constante positive şi diferite de zero a, b, α, β şi m astfel ca să avem:

$$I = \int_0^{\infty} x^m e^{-ae^{bx}} sh\beta x \sin\alpha x dx < 0.$$

Observ mai întâi, că pentru aceasta este suficient a arătă că se pot determină patru constante positive şi diferite de zero a, b, α, β astfel ca să avem:

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ae^{bx}} sh\beta x \sin\alpha x dx < 0.$$

Intr'adevăr, integrala I este pentru $m = 0$, o funcţiune continuă de m, care se poate uşor vedeà comparând, pentru valori destul de mari ale lui x, funcţiunea de sub semnul sumă cu e^{-x}. Prin urmare, dacă integrala I_0, obţinută făcând în I, $m = 0$, este negativă şi integrala I va fi negativă pentru valori positive şi suficient de mici ale lui m.

Pentru mai multă uşurinţă, presupunem acum $\alpha = \pi$. Integrala I_0 poate fi scrisă

$$I_0 = I_1 - I_2,$$

unde am pus:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-ae^{bx}+\beta x} \sin\pi x dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-ae^{bx}-\beta x} \sin\pi x dx.$$

Integrala I_2 este positivă, oricare ar fi constantele positive a, b şi β. Intr'adevăr, când x creşte dela zero la plus infinit, funcţiunea:

$$e^{-ae^{bx}-\beta x}$$

este mereu descrescătoare, iar, pe de altă parte, valoarea integralei I_2 este dată de o serie convergentă, cu termeni alternativi positivi şi negativi

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \cdots + \int_n^{n+1} + \cdots\right],$$

fiecare termen fiind în valoare absolută, inferior celui precedent.

Pentru a obține rezultatul ce urmărim, va fi deci suficient să determinăm pe a, b și β astfel ca să avem:

$$I_1 = \int_0^\infty f(x) \sin \pi x dx < 0,$$

unde am pus:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-ae^{bx} + \beta x}.$$

Din motive ce se vor înțelege mai departe, determin pe β astfel ca să avem:

$$f(1) = f(2),$$

sau:

$$\beta = ae^b (e^b - 1).$$

β fiind astfel determinat, când x variază dela zero la plus infinit, funcțiunea $f(x)$ începe prin a crește, devine maximă în intervalul $1 < x < 2$, adică în interiorul unui interval în care $\sin \pi x$ este negativ, și apoi descrește.

Observ, că și I, poate fi pus sub forma unei serii alternate.

$$I_1 = \int_0^1 f(x) \sin \pi x dx + \int_1^2 + \cdots + \int_n^{n+1} + \cdots$$

în felul celei corespunzătoare lui I_2. Deasemenea, funcțiunea $f(x)$ descrescând, când x crește dela 2 la plus infinit, avem:

$$\int_2^\infty f(x) \sin \pi x dx = \int_2^3 + \int_3^4 + \cdots + \int_n^{n+1} + \cdots < \int_2^3 f(x) \sin \pi x dx.$$

Sau, prin urmare:

$$I_1 < \int_0^3 f(x) \sin \pi x dx,$$

de unde punând:

$$A=\int_0^1 f(x)\sin\pi x dx, \quad B=-\int_1^2, \quad C=\int_2^3$$

obținem, în definitiv:

$$I_1<A-B+C.$$

De oarece, în intervalul $1<x<2$ funcțiunea positivă, $f(x)$ este mai mare ca $f(1)=f(2)$, urmează că avem:

$$B>-f(1)\int_1^2 \sin\pi x dx=\frac{2}{\pi}f(1)=\frac{2}{\pi}f(2).$$

Să determinăm acum o limită superioară pentru cantitățile A și B. Pentru aceasta să găsim maximul produsului:

$$y=f(x)\sin\pi x$$

în fiecare din intervalele $0<x<1$ și $2<x<3$. Anulând derivata, vedem că y este maximum pentru $x=x_1$ și $x=x_2$, astfel ca:

$$\operatorname{tg}\pi x_1=\frac{\pi}{abe^{bx_1}-ae^b(e^b-1)}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\pi x_2=\frac{\pi}{abe^{bx_2}-ae^b(e^b-1)}.$$

Avem deasemenea:

$$\tfrac{1}{2}<x_1<1, \qquad 2<x_2<\tfrac{5}{2}.$$

Aceste inegalități se pot deduce din ecuațiunile (1), ele se citesc însă direct pe produsul: $y=f(x)\sin\pi x$. In adevăr, $f(x)$ crește, când x crește dela zero la 1, iar $\sin\pi x$ crește în intervalul $0<x<\frac{1}{2}$ și descrește în intervalul $\frac{1}{2}<x<1$, prin urmare y crește pentru $0<x<\frac{1}{2}$ și devine maximum, începe să descrească, pentru o valoare $x=x_1$ cuprinsă în intervalul $\frac{1}{2}<x_1<1$. In mod analog se arată și inegalitatea de a doua.

Remarc apoi, că produsul $y=f(x)\sin\pi x$ nu admite în intervalele $0<x<1$ și $2<x<3$ decât câte un singur maximum.

Acest lucru este evident, observând că funcțiunea de x

$$\operatorname{tg}\pi x_1-\frac{\pi}{abe^{bx_1}-e^b(e^b-1)}$$

creşte când x_1 variază dela $\frac{1}{2} < x_1 < 1$ şi prin urmare nu se poate anulà decât o singură dată în acest interval. Deasemenea şi pentru funcţiunea de x_2

$$\operatorname{tg}\pi x_2 - \frac{\pi}{abe^{bx_2} - e^b(e^b - 1)}$$

care creşte, când x_2 variază în intervalul $2 < x_2 < \frac{5}{2}$.

Din faptul că $f(x)$ creşte în intervalul $0 < x < 1$, urmează că maximul lui y corespunzător valorei $x = x_1$ este inferior lui $f(1)\sin\pi x_1$, avem deci:

$$A < f(1)\sin\pi x_1 \int_0^1 dx = f(1)\sin\pi x_1.$$

Deasemenea, de oarece $f(x)$ descreşte, în intervalul $2 < x < 3$ deducem

$$C < f(2)\sin\pi x_2.$$

Prin urmare, pentru ca I să fie negativ este suficient să avem:

$$A - B + C < 0,$$

sau:

$$f(1)\sin\pi x_1 + f(2)\sin\pi x_2 - \frac{2}{\pi} f(1) < 0$$

$$\therefore \quad \sin\pi x_1 + \sin\pi x_2 < \frac{2}{\pi}, \qquad (2)$$

unde reamintesc că avem: $f(1) = f(2) > 0$.

* * *

Voiu arătà acum, în ce chip se pot determinà constantele positive a şi b, astfel ca această din urmă inegalitate să fie îndeplinită. Pentru aceasta, voiu lua pentru x_1 şi x_2 valori arbitrare, însă convenabil alese şi voiu determinà, cu ajutorul sistemului (1), pe a şi b. Chestiunea revine la a demonstrà că valorile astfel obţinute pentru a şi b sunt positive.

Consider un număr arbitrar x_1, cuprins în intervalul $\frac{1}{2} < x_1 < 1$ şi destul de apropiat de 1, încât să avem:

$$\sin\pi x_1 < \frac{2}{\pi}.$$

Dintre toate cantităţile x_2, cuprinse în intervalul $2 < x_2 < \frac{5}{2}$ şi care sunt suficient de apropiate de 2, încât să avem:

$$\sin\pi x_1 + \sin\pi x_2 < \frac{2}{\pi},$$

pot alege un număr x_2, astfel ca din sistemul (1), în care x_1 şi x_2, sunt numerele considerate, să obţinem pentru a şi b valori pozitive. Pentru a arătă aceasta, din (1) deducem:

$$\frac{\operatorname{tg}\pi x_2}{\operatorname{tg}\pi x_1} = \frac{be^{bx_1} - e^b(e^b - 1)}{be^{bx_2} - e^b(e^b - 1)} = F(b). \tag{3}$$

Se găseşte uşor:

$$F(0) = \lim_{b=0} \frac{be^{bx_1} - e^b(e^b - 1)}{be^{bx_2} - e^b(e^b - 1)} = \frac{x_1 - \frac{3}{2}}{x_2 - \frac{3}{2}} < 0.$$

$$F(+\infty) = 0.$$

De oarece numitorul

$$be^{bx_2} - e^b(e^b - 1) = e^b\left[be^{b(x_2-1)} + 1 - e^b\right],$$

nu se anulează pentru nici o valoare positivă şi diferită de zero a lui b, cum se observă imediat considerând derivata:

$$b(x_2 - 1)\, e^{b(x_2-1)} + e^{b(x_2-1)} - e^b > 0$$

a celui de al doilea factor, urmează că $F(b)$ este o funcţiune continuă pentru b positiv. Se deduce, de aci, că există cel puţin o valoare positivă a lui b, pentru care avem $F(b) = q$, q fiind cuprins între limitele

$$F(0) = \frac{x_1 - \frac{3}{2}}{x_2 - \frac{3}{2}} < q < F(+\infty) = 0.$$

Prin urmare, pentru ca ecuaţiunea (3) în b, să admită o soluţiune positivă, este suficient să avem:

$$\frac{x_1 - \frac{3}{2}}{x_2 - \frac{3}{2}} < \frac{\operatorname{tg}\pi x_2}{\operatorname{tg}\pi x_1}, \tag{4}$$

inegalitate ce este în chip manifest îndeplinită dacă x_2 este suficient de apropiat de 2. Reamintesc, că prin modul însăşi cum au fost aleşi x_1 şi x_2, avem: $\operatorname{tg}\pi x_1 < 0$ şi $\operatorname{tg}\pi x_2 > 0$.

In rezumat, vedem că putem da lui x_1 şi x_2 valori arbitrare,

însă convenabil alese, astfel ca inegalitățile (2) și (4) să fie verificate simultane. Pentru un astfel de sistem de valori ale lui x_1 și x_2, deducem din ecuațiunea (3), o valoare positivă pentru b, care introdusă în una din ecuațiunlle sistemului (1) ne determină o valoare positivă pentru a. Integrala I corespunzătoare este negativă.

Este ușor de văzut că procedeul întrebuințat reușește, fiindcă admitem «a priori» inegalitatea:

$$\beta = ae^b (e^b - 1) > ab.$$

Ar fi poate interesant de studiat ce se întâmplă în cazul $\beta < ab$, căci atunci ambele integrale I_1 și I_2 sunt positive, oricare ar fi cantitățile positive a, b și β.

ȘERBAN A. GHEORGHIU.

CUBURI TERMINATE CU RĂDĂCINA LOR.

Ca generalizare a mai multor probleme propuse în *Gazeta Matematică*, îmi propun să studiez în general metodele de a găsi toate cuburile care se termină cu rădăcina lor, adică a rezolvà ecuația

$$n^3 - n = \mathscr{M}10^p, \qquad (1)$$

în care n este un număr întreg de p cifre. Sau cu alte cuvinte să se găsiască patratele, cu care înmulțind rădăcina lor să iasă la finele produsului acea rădăcină ($n^2.n$ să se termină cu n). De aci se vede că dacă n^3 se termină cu n și n^5, n^7,... adică toate puterile impare ale lui n se vor terminà cu n.

Mai întâi n nu se poate terminà cu 0, căci n^3 are la sfârșit de trei ori mai multe nule decât n, și deci nu se poate terminà cu n. Vom exclude dar de aci înainte, numerele terminate cu 0.

Zicem apoi că dacă am găsit o soluție n satisfăcând ecuația (1) și $(10^p - n)$ este o soluție. In adevăr:

$$(10^p - n)^3 - (10^p - n) = 1000^p - 3 \times 100^p . n + 3 \times 10^p . n^2 - 10^p$$
$$- (n^3 - n) = \mathscr{M}10^p - (n^3 - n),$$

și după (1) reese că partea ultimă este $\mathscr{M}10^p$. De aci rezultă că dacă avem o soluție, numărul complimentar va fi și el o soluție. Astfel 1 fiind o soluție evidentă, și 9 va fi o soluție. Cum 0000....1

este o soluție, și 999...9 va fi o soluție. Până la 1000000 avem astfel soluțiile : 1 ; 9 ; 99 ; 999 ; 9999 ; 99999 ; 999999, în număr de șeapte.

In fine, mai observăm că n este supus la condiția de a avea p cifre, adică:

$$10^{p-1} < n < 10^p . \qquad (2)$$

Din relația (1) scoatem:

$$(n-1)n(n+1) = \mathcal{M}10^p . \qquad (3)$$

Avem de făcut două ipoteze, după cum n este pereche sau nepereche.

I. *n pereche.* $n = a.2^p$.

In acest caz (3) devine:

$$a(a.2^p - 1)(a.2^p + 1) = \mathcal{M}5^p .$$

Cei trei factori din prima parte sunt primi între ei fiind neperechi. Deci unul singur din ei se va divide cu 5^p. Insă a nu poate conține pe 5^p, căci atunci $n = a.2^p$ trece peste 10^p, n numai are p cifre. Trebuie dar ca unul din ceilalți doi factori să se dividă cu 5^p.

a) Fie:

$$a.2^p + 1 = b.5^p , \qquad \text{sau} \qquad 5^p.b - 2^p.a = 1.$$

Se știe că ecuația:

$$\alpha x - \beta y = 1,$$

are soluțiile:

$$\begin{cases} x = \alpha^{\varphi(\beta)-1} + \beta t \\ \beta y = \alpha^{\varphi(\beta)} + \alpha\beta t - 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \alpha x = \alpha\beta t - \beta^{\varphi(\alpha)} + 1 \\ y = \alpha t - \beta^{\varphi(\alpha)} - 1 \end{cases} \qquad (4)$$

în care φ arată indicatorul numărului din paranteză (A se vedeà și *Gazeta Matematică* pag. 368 – 369, Anul XXIX). Aplicând aceste formule găsim:

$$n = 2^p.a = 5^{p.2^{p-1}} + 10^p t - 1, \quad \text{sau} \quad n = 2^p.a = 10^p t - 2^{4p.5^{p-1}} \qquad (5)$$

b) Fie:

$$a.2^p - 1 = b.5^p , \qquad \text{sau} \qquad 2^p.a - 5^p.b = 1.$$

Rezolvând ca în cazul precedent cu formulele (4), găsim:

$$n = 2^{4p.5^{p-1}} + 10^p t, \quad \text{sau} \quad n = 10^p . t - 5^{p.2^{p-1}} + 1. \qquad (5').$$

Adunând în cruciş valorile lui n din (5) şi (5'), se găseşte că sumele sunt $\mathcal{M}10^p$. Deci (5') dă soluţiile complimentare ale lui (5) şi le putem deci lăsà la o parte. Vom reţine numai prima din formulele (5) scrisă sub forma:

$$n = (5^{p.2^{p-1}} - 1) - 10^p.t, \qquad (6)$$

presupunând t negativ. De aci se scoate regula următoare, ţinând seamă de relaţiile (2):

Numerele perechi ale căror cuburi (sau toate puterile impare) *se termină cu ele însuşi, sunt ultimele* p *cifre ale numerelor* $(5^{p.2^{p-1}} - 1)$ *şi complimentarele lor.*

Calculele puterilor lui 5 se simplifică, dacă se observă că ultimele cifre se reproduc periodic. Procedând astfel, am găsit următoarele soluţii pânăla 1000000:

$p = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6.$

$n = 4;\ 24;\ 624;\ 0624;\ 90624;\ 890624.$

Complimentarul $6;\ 76;\ 376;\ 9376;\ 09376;\ 109376.$

Numerele cu 0 înainte nu sunt admisibile; ele au fost scrise spre a nu se pierde complimentarele lor. Avem deci numai zece numere perechi pânăla 1000000, ale căror cuburi se termină cu ele însăşi.

(Va urmà). E. ŞTEFĂNESCU.

NOTE MATEMATICE

51. *Alte zece matematici diverse.* (Vezi Nota No. 9, pag. 91).

41. **Atelierului.** *H. M. Keal & C. J. Leonard.* Mathematics for shop and drawing. New-York. 1921.

42. **Biologică.** *W. N. Feldmann.* Biomathematics. Londra. 1923.

43. **Curată.** Vezi «Gazeta Matematică». Anul XXVIII, pag. 173.

44. **Desemnului.** Vezi No. 41.

45. **Indiană.** Vezi *H. G. Zeuthen.* Histoire des sciences mathématiques. Pag. 217.

46. **Memorabilă.** *R. E. Moritz.* Memorabilia mathematica. New-York. 1914.

47. **Numerică.** *E. T. Whittaker & G. Robinson.* A treatise on numerical mathematics. Londra 1924.

48. **Pitagorică.** Ca la No. 45. Pag. 25.

49. **Speculativă.** *T. Simpson.* Miscelaneous trads in some curious and very interesting subjects in mechanics, physical, astronomy and speculative mathematics.

50. **Tecnicianilor.** *J. E. Mayer.* Mathematik für Teckniker.

(Va urmà). I. IONESCU.

52. *Asupra problemei 3381.* Soluțiunea dată în observațiune nu este patrat; ea trebuie înlocuită cu 69169, care este patrat și care se reproduce prin rotație.

A. M. CERNES.

53. *Asupra problemei 2723.* Se cereà patratul de patru cifre *msdu*, așà că *ms* să întreacă cu 1 pe *du* și știind că $(d+u)=(s+u)^2$. Enunțul acesta este supraabundent; una din cele două condiții este suficientă. In adevăr, dacă considerăm numai prima condiție, luăm pentru *du* grupul de două numere care termină un patrat și pentru *ms* aceeași grupă sporită cu 1. Eliminăm numerele de patru cifre, care sunt $\mathcal{M}3$, fără a fi $\mathcal{M}9$ și pe cele ce sunt $\mathcal{M}3+2$, precum și numere prime. Ne rămân 2524; 3736; 5049; 7776; 8281; 8584; 9796. Extrăgând rădăcina, găsim numai $8281=91^2$.

Să considerăm numai a doua condițiune. Grupele *du*, care satisfac condiția, sunt numai 01; 04; 09; 36 și 81, ale căror sumă a cifrelor au ca rădăcini pe 1; 2; 3; 3 și 3, care dau pe $(s+u)$. Cum cunoaștem pe 1, reese că numerele căutate pot fi $m001$ și $m281$ numai. Dăm lui *m* valorile 1; 2; ... 9; aplicăm criteriile arătate la primul caz și ne rămân de cercetat numerele 6001; 8001; 1281; 8281, dintre care numai ultimul este patrat.

B. V. GATAIANȚU.

54. *Asupra Numărului special cu probleme nerezolvate.* Următoarele probleme având primite soluțiuni incomplete, se vor trece ca nerezolvate:

I. I.

No. 766. Pe un biliard circular se află o bilă, care se lansează în toate modurile posibile, astfel ca să revină la punctul de plecare, după ce a atins de un număr dat de ori, marginea biliardului. In fiecare din drumurile ce parcurge bila, există puncte prin care ea trece de două ori. Să se calculeze numărul acelor puncte și să se fixeze poziținea lor.

A. M. TĂNĂSESCU.

No. 1310. Se dă un triunghiu și centrul cercului înscris. Să se construiască numai cu rigla centrul cercului celor nouă puncte.

I. TEODORESCU.

No. 1333. Pe o bară într'un plan vertical, este fixată o nivelă curbată după un cerc. Dacă bara se mișcă în jurul unui punct, să se găsiască: 1) Locul geometric al bulei reduse la un punct; 2) Forma nivelei pentru ca locul să fie o verticală.

LT. G. POPESCU.

No. 1343. Să se găsiască maximum sau minimum expresiunii

$$y = \sin(\alpha + x)\cos(\beta + 2x).$$

I. IONESCU.

No. 1711. n luând valori întregi diferite de puterile perfecte care îl preced în ordinea numerelor crescătoare și g fiind numărul acestor puteri perfecte, să să studieze natura seriilor

$$\sum_{n=2}^{n=\infty}\left(\frac{n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}-1}-p+1\right) \quad ; \quad \sum_{n=2}^{n=\infty}\left(\frac{n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}-1}-p+1\right),$$

știind că avem $p = n - q$.

N. I. NICULESCU.

55. *Asupra problemei 3193.* (*G. M.* Vol. XXX, p. 75). Imi propun să dau o demonstrație geometrică generalizărei acestei probleme dată de D-nul LEON WEISS. In adevăr, la soluția problemei,

s'a menționat că problema subsistă înlocuind bisectoarele unghiului A prin conjugatele armonice ale acestui unghiu, ceeace se poate demonstrà ușor geometricește.

Cu ajutorul proiecției conice, transformăm cercul circumscris triunghiului într'o conică circumscrisă, conjugatele armonice păstrându-și evident proprietatea. Am obținut astfel generalizarea D-lui WEISS și anume:

Se consideră o conică Γ circumscrisă unui triunghiu ABC și două drepte Δ_1 și Δ_2, conjugate armonic în raport cu unghiul A. Ele taie latura BC în punctele M_1 și M_2, iar conica în punctele N_1 și N_2. Locul intersecției dreptelor M_1N_2 și M_2N_1 este conica Γ.

VALERIU MANAFU.

56. *Asupra problemei 3406.* Determinantul din partea a doua a problemei 3406, a mai fost tratat în *Gazeta Matematică*. El face obiectul problemei 2756 propusă de subsemnatul, a cărei soluție a fost dată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, p. 461 și u.

La pag. 465, în nota dela finele soluției problemei 2756, se dă, cu o indicație a soluției, rezultatul, astfel cum e cerut de enunțul problemei 3406.

Problema 2756 a fost reprodusă și în revista *Mathesis*, anul 1923, unde la pag. 397 și 398 se dă o prescurtare a soluției și rezultatul.

V. CRISTESCU.

57. *Asupra unor inegalități.*

I. In «Culegere de Probleme de Algebră», cap. IX, probl. 17, se demonstrează următoarea inegalitate:

$$(1) \qquad a^3 + b^3 + c^3 > 3a.b.c,$$

unde a, b, c sunt niște cantități pozitive.

Ne propunem să generalizăm inegalitatea (1).

Dacă a_1, a_2, a_3, ... a_n sunt n cantități pozitive, se știe că avem:

$$(2) \qquad \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3\ldots a_n}.$$

Facem înlocuirile: $a_1 = a_1^n$, $a_2 = a_2^n$, $a_3 = a_3^n, \ldots a_n = a_n^n$ în inegalitatea (2), care devine:

(3) $a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_n^n > n.a_1.a_2 \ldots a_n$.

Pentru cazul particular: $n = 3$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ şi $a_3 = c$, găsim inegalitatea (1).

II. Generalizarea probl. 19, cap. IX, din «Culegere de Probleme de Algebră».

Inegalitatea care face obiectul problemei 19, este următoarea:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) > 6abc.$$

Ne propunem să stabilim inegalitatea mai generală:

$$(4)\quad a_1.a_2 \ldots a_{n-1}(\Sigma a_1 - a_n) + a_1.a_2 \ldots a_{n-2}a_n(\Sigma a_1 - a_{n-1}) + a_1.a_2 \ldots a_{n-3}a_{n-1}a_n(\Sigma a_1 - a_{n-2}) + \ldots + a_2.a_3 \ldots a_n(\Sigma a_1 - a_1) > n(n-1)a_1.a_2 \ldots a_n.$$

Desfăcând parantezele în membrul I, numărul termenilor va fi egal cu:

$$(n-1)C_n^{n-1} = (n-1)C_n^1 = n(n-1).$$

Făcând produsul acestor termeni, exponentul unei câtimi este egal cu:

$$(n-1)C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-2} = nC_{n-1}^{n-2} = nC_{n-1}^1 = n(n-1).$$

Deci, aplicând inegalitatea (2), avem:

$$\frac{a_1.a_2 \ldots a_{n-1}(\Sigma a_1 - a_n) + a_1.a_2 \ldots a_{n-2}a_n(\Sigma a_1 - a_{n-1}) + \ldots a_2a_3 \ldots a_n(\Sigma a_1 - a_2)}{n(n-1)} > \sqrt[n(n-1)]{(a_1.a_2.a_3 \ldots a_n)^{n(n-1)}},$$

sau:

$$a_1.a_2 \ldots a_{n-1}(\Sigma a_1 - a_n) + a_1.a_2 \ldots a_{n-2}.a_n(\Sigma a_1 - a_{n-1}) + a_1.a_2 \ldots a_{n-3}.a_{n-1}.a_n(\Sigma a_1 - a_{n-2}) + \ldots + a_2.a_3 \ldots a_n(\Sigma a_1 - a_1) > n(n-1).a_1.a_2 \ldots a_n,$$

tocmai inegalitatea ce ne propusesem să demonstrăm.

Pentru cazul particular: $n = 3$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, inegalitatea (4), devine:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) > 6abc,$$

inegalitate ce face obiectul probl. 19, cap. IX, din «Culegere de Probleme de Algebră».

III. In inegalitatea (2), facem substituțiile:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \ldots a_n = n \qquad \text{și obținem:}$$

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} > \sqrt[n]{1.2.3\ldots n}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{1.2.3\ldots n}$$

$$\therefore \quad (5) \qquad n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

inegalitate ce face obiectul probl. 23, cap. IX, «Culegere de Probleme de Algebră».

IV. In inegalitatea (2), facem substituțiile următoare:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5 \ldots a_n = 2n-1 \qquad \text{și avem:}$$

$$\frac{1+3+5+\ldots+2n-1}{n} > \sqrt[n]{1.3.5\ldots(2n-1)}$$

$$\therefore \quad \frac{n^2}{n} = n > \sqrt[n]{1.3.5\ldots(2n-1)}$$

$$\therefore \quad n^n > \frac{1.2.3.4\ldots(2n-1)2n}{(2.1)(2.2)\ldots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}$$

$$\therefore \quad (6) \qquad (2n)^n > (n+1)(n+2)\ldots 2n.$$

Deci a priori, avem inegalitatea:

$$(2n)^n > 1.2.3\ldots n,$$

unde făcând $n = n/2$, avem:

$$(7) \qquad \sqrt{n^n} > 1.2.3\ldots n/2.$$

MARIN ȘTEFAN.
Liceul din Constanța.

58. *Asupra exercițiului 20 din «G. M.», Vol. XXX.* Ca generalizare a acelui exercițiu, ne putem propune să găsim numerele x, y, z așa ca

$$x^n = y^2 - z^2.$$

Urmând calea indicată în nota 34 din «G. M.», Vol. XXX, pagina 211, grupând factorii primi în mod convenabil şi notând cu $a, b, \ldots l, r, s$ diferitele grupe, se găseşte

$$y + z = r^n a^{n-1} b^{n-2} \ldots l$$

$$y - z = s^n a b^{\prime} \ldots l^{n-1}$$

de unde

$$y = \tfrac{1}{2} ab \ldots l(r^n a^{n-2} b^{n-3} \ldots k + s^n bc^2 \ldots l^{n-2})$$

$$z = \tfrac{1}{2} ab \ldots l(r^n a^{n-2} b^{n-3} \ldots k - s^n bc^2 \ldots l^{n-2})$$

$a, b, \ldots l$ sunt primi între ei.

Dacă se face $n = 2$, găsim soluţiile

$$x = rsa, \quad y = \tfrac{1}{2} a(r^2 + s^2), \quad z = \tfrac{1}{2} a(r^2 - s^2),$$

ale ecuaţiei pitagorice date de nota 58 din «G. M.», Vol. XXIX, pag. 293.

Cu această ocazie observăm că neegalitatea dela pag. 212, Vol. XXX, trebue înlocuită prin

$$3m_i - 3p_i \geqslant 0,$$

iar factorilor α_i trebue să li se impuie condiţia să fie toţi nepereche, sau ca unul din ei să fie pereche.

O. Popea.

59. *Asupra Notei No. 22, Anul XXX.* In numărul 4 al «Gazetei Matematice», din Decembrie 1924, Domnul Colonel Gh. Buicliu, arată cum se poate trece direct dela un sistem de două axe perpendiculare la un alt sistem tot perpendicular, fără a mai fi nevoie de un alt sistem intermediar, cum se obişnueşte în toate tratatele de Geometrie Analitică. In cele ce urmează, îmi propun să completez nota D-lui Colonel Gh. Buicliu, în cazul când axele sunt oblice, atât în plan cât şi în spaţiu. In scopul acesta mă voiu servi de următoarea teoremă:

Proecţiunea unui vector pe o axă oarecare, este egală cu măsura algebrică a vectorului multiplicată prin proecţia vectorului unitate şi paralel cu vectorul nostru.

(Geom. Analit. par Tresse et Thybaut pag. 9).

Fie Ox, Oy un sistem de axe oblice care fac între ele un unghiu θ. Fie x şi y cordonatele unui punct M faţă de Ox, Oy.

Fie O_1X, O_1Y un nou sistem de axe oblice. Dacă X şi Y sunt cordonatele lui M faţă de noul sistem, iar (a_1b_1) şi (a_2b_2) cordonatele punctelor unitate ale axelor O_1X şi O_1Y, faţă de vechiul sistem, să exprimăm pe x şi y în funcţie de elementele date, precum şi de x_1, y_1 cordonatele noii origini O_1.

Proectând conturul închis $\overline{OO_1AMO}$ pe vechile axe, obţinem:

$$\therefore \quad \text{pr. } \overline{OM} = \text{pr. } \overline{OO_1} + \text{pr. } \overline{O_1A} + \text{pr. } \overline{AM}.$$

Ţinând seama de elementele date şi de teorema de mai sus, relaţia (1), aplicată celor două axe, devine:

$$x = x_1 + a_1X + a_2Y$$
$$y = y_1 + b_1X + b_2Y,$$

care sunt tocmai formulele de transformare căutate.

In mod analog se găseşte că formulele de transformare în spaţiu sunt:

$$x = x_1 + a_1x + a_2y + a_3Z$$
$$y = y_1 + b_1X + b_2Y + b_3Z$$
$$z = z_1 + c_1X + c_2Y + c_3Z.$$

Ionescu I. Brezuica.
Student, Matematici.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECNICĂ DIN BUCUREŞTI.

Examen parţial de Matematici Generale.

Anul I. Secţia Silvică.
(24 Ianuarie 1926).

I. Se dă funcţiunea: $u = F(x, y, z)$ şi funcţiunile H_1, H_2, H_3 definite prin relaţiunile:

$$H_1 = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}\ ; \quad H_2 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\ ; \quad H_3 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}$$

şi se cere să se calculeze expresiunea:

$$E(x, y, z) = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}.$$

II. Se dă expresiunea:

$$E(x, y, z) \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2,$$

în care x, y, z, t sunt variabile *independente*, iar c o constantă, se cere să se găsiască ce devine această expresiune când variabilele x, y, z, t sunt înlocuite prin variabilele X, Y, Z, T, de care sunt legate prin relaţiunile următoare:

$$x = \frac{X - vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = Y, \quad z = Z, \quad t = \frac{T - \frac{v}{c_2} X}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

v fiind o constantă.

III. Se dă ecuaţia:

$$6x + 3y + 2z = 6$$

şi se cere:

a) Să se scrie ecuaţiile dreptelor de intersecţie între planul dat şi planele de coordonate.

b) Se consideră în planul dat un punct P, de coordonate $x=1$, $y=-2$; se cere să se scrie ecuaţia perpendicularei pe plan în punctul P.

c) Pe această perpendiculară se ia o distanţă $\overline{PQ} = 6$; să se afle coordonatele punctului Q; să se scrie ecuaţia planului ce trece prin Q şi este paralel cu planul dat.

d) Să se scrie ecuaţiile dreptelor de intersecţie ale planului Q cu planele de coordonate.

(Timpul acordat: 3 ore).

Examen parţial de Matematici generale.

Anul I. Secţia Silvică.

(3 Martie 1926).

1. Să se calculeze integralele nedefinite:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^3(1-x)^2 - (1+x)}, \qquad I_2 = \int \frac{x^3 dx}{x^6 - 1}.$$

2. Se dă ecuaţiunea

$$2x^2 - 4\sqrt{3}.xy - 2y^2 + 4(3 - 2\sqrt{3})x + 4(3\sqrt{3} + 2)y - 6 = 0$$

şi se cere să se reprezinte geometriceşte.

(Timpul acordat: 3 ore).

Lucrare scrisă de Matematici generale.

Anul I. Secţia Silvică.
(17 Martie 1926).

1. Să se calculeze integrala

$$I = \int \operatorname{cotg} x \sqrt{\sin^6 x - \sin^3 x + 1}\, dx.$$

2. Se dau punctele A (1, 0), B (6, 0), C (0, 2), D (0, 3) şi se cere:

a) Să se scrie ecuaţiunea generală a familiei de conice circumscrise patrulaterului ABCD.

b) Să se discute natura conicelor acestei familii, după diferitele valori ale parametrului.

Să se arate că din această familie face parte şi un cerc şi să se explice acest rezultat geometriceşte. Să se determine centrul şi raza acestui cerc.

3. Să se determine natura suprafeţei

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 2x + 4y - 4z + 3 = 0.$$

Lucrare scrisă de Matematici generale.

Anul I. Secţia Silvică.
(21 Aprilie 1926).

Se dă ecuaţia:

$$y = \pm (x - 1)\sqrt{x + 3}$$

şi se cere:

1°. Să se reprezinte geometriceşte funcţiunea y.

2°. Să se calculeze aria închisă de porţiunea din curba reprezentativă, care formează o buclă.

Lucrare scrisă de Matematici generale.

Anul I. Secţia Silvică.

(5 Maiu 1926).

1. Se dă curba a cărei ecuaţiune este:

$$2x^4 - 3x^2y^2 + y^4 + xy(x^2 + y^2) + y^2 - 5xy + 6x^2 = 0 \tag{1}$$

şi se cere:

a) Să se găsiască asimptotele oblice ale curbei (1), scriindu-se şi ecuaţiile acestor asimptote.

b) Să se deseneze curba (1) în vecinătatea originii O.

2. Să se dovedească că ecuaţia în coordonate polare:

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

în care r şi φ sunt respectiv raza polară şi mijlocul polar, iar α un unghiu dat, — reprezintă o linie dreaptă.

(Timpul acordat: $1^1/_2$ ore).

Examen general de Matematici generale.

Anul I. Secţia Silvică.
17 Maiu 1926).

1. Se consideră suprafaţa definită prin ecuaţia

(1) $$x^2 - 2xy + y^2 - 6yz + 2z^2 - 2x - 6y + 8z = 0$$

şi se cere să se reprezinte curbele de intersecţie ale acestei suprafeţe cu planurile de coordonate $x0y$, $y0z$, $z0x$.

2. Se dă funcţiunea:

(2) $$y = \frac{x + \frac{1}{2}}{x^4 - x^3 - x + 1}$$

şi se cere:

a) Să se reprezinte geometriceşte această funcţiune.

b) Să se calculeze aria cuprinsă între curba reprezentativă a funcţiunii (2), axele $0x$, $0y$ şi dreapta $x + 1 = 0$.

3. Să se integreze ecuaţiunea diferenţială

$$y^{IV} + 3y''' + 6y'' + 12y' + 8y = x^2 + 4\cos 2x + \frac{1}{e^{2x}}.$$

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXII. No. 1. Ianuarie-Fevruarie 1926. New-York. A 31-a adunare de vară a Asociaţiunii matematice americane, de A. DRESDEN şi R. G. D. RICHARDSON. Al doilea colloquim în Itaca, de T. H. HILDEBRANDT. Adunarea din Octomvrie la New-York, de R. G. D. RICHARDSON. Premiul Chauvenet pentru expuneri matematice. Conferinţa internaţională pentru uzul limbei esperanto în ştiinţă, de M. FRÉCHET. Calculul operaţional al lui HEAVISIDE, de J. R. CARSON. Notă asupra unei leme fundamentale referitoare la limita unei sume, de H. J. ETTLINGER. Notă asupra cubicelor plane raţionale, de C. A. NELSON. O teoremă

simplă TAUBERIANĂ, de W. A. HURWITZ. COOLIDGE asupra probabilităţilor, de H. L. RIETZ.

Journal de mathématiques élémentaires. Publicat de H. VUIBERT. Anul 50. No. 15 şi 16, Mai 1926. Paris.

Revista matematică din Timişoara. Anul VI. No. 3. Mai 1926. Timişoara. Generalizarea teoremei lui AUBERT, de N. G. BOTEA.

Curierul matematic. Vol. II. No. 3. Mai 1926. Bucureşti (litografiat). Asupra ortopolului, de St. Locot. M. I. FOCŞENEANU. Chestiuni de examinat, de M. GRÜNBAUM.

MAURICE LECAT. *Coup d'oeil sur la théorie des détérminants supérieurs dans son état actuel.* Louvain 1926.

Cu ocaziunea studierii timp de 25 ani ce autorul a făcut determinanţilor de ordin superior, autorul a publicat o broşură de 60 pagini cu titlul de mai sus şi promite lumii matematice un tratat în 3 volume asupra acelor determinanţi.

Determinanţii superiori sunt generalizarea în spaţiul cu 3, 4,... n dimensiuni a determinanţilor obişnuiţi zişi şi *plani*. Ei apar pela jumătatea secolului trecut şi s'au ocupat de dânşii CAYLÉY, SYLVESTER, GEGENBAUER, etc. Studiul D-lui LECAT cuprinde următoarele capitole: *topologia matricelor, activitatea, permanenţii şi determinanţii, merogeneitatea* şi *descompunerea determinanţilor.*

Broşura rezumează starea actuală a determinanţilor superiori şi este interesantă pentrucă se ocupă de progresul algebrei. Ea poate fi procurată la autor, Louvain, Boulevard de Tirlemont, 17.

I. I.

MAURICE LECAT. *Coup d'oeil sur la théorie de la multiplication des determinants supérieurs dans son état actuel.*

Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.* Louvain 1926.

O broşură de 39 pagini în care se studiază elementar şi fără a fi nevoie de cunoştinţe speciale ale determinanţilor superiori, problema înmulţirii acestor determinanţi, graţie unei introduceri care pune pe cititor în curent cu definiţiunile şi noţiunile elementare necesare. Capitolele următoare se ocupă cu *înmulţirea cayleiană*, cu extensiunea acesteia, cu *înmulţirea scoţiană*, cu *înmulţirea reiterată* şi cu *produsul a trei codeterminanţi cubici.*

I. I.

GENERAL SCARLAT PANAITESCU. *Curs elementar de cartografie.* Apărut în Biblioteca „Foii Matematice" No. 3. Chişinău 1926.

Intr'o broşură de 64 pagini sunt tipărite unele prelegeri făcute la Facultatea de Ştiinţe din Iaşi în anii 1921—1925. In partea I-a este o ochire storică asupra cartografiei din timpurile cele mai vechi până azi. In partea

II-a se dă o indicaţie asupra lucrărilor ce trebuesc făcute pe teren pentru confecţionarea hărţilor geografice. Partea III-a se ocupă cu lucrările de birou pentru confecţionarea hărţilor, cu alegerea suprafeţei cartografice, desemnul cartografic şi cu imprimarea hărţilor. Explicaţiunile sunt însoţite de figuri de proecţiuni, semne convenţionale, etc.

Expunerea este făcută elementar, astfel încât toțul se poate citi şi avea cu uşurinţă, de oricine se interesează de modul de construcţiune al hărţilor şi de modul de a şti să citiască o hartă.

I. I.

L'école spéciale des Travaux publics. Programme des conditions d'admission et de l'enseignement. Paris 1926.

L'école d'ingénieurs de Marseille. Programme des conditions d'admission et de l'enseignement. Paris 1926.

N. Abramescu. *Introducerea elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene.* Litografiat de *Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj.* Cluj 1926.

R. Gavrilescu. Zborul fără motor. Bucureşti 1926.

CERERI.

138. In *„Ciocoii vechi şi noi"*, de N. Filimon se vorbeşte de jocul *„la o para cinci"*. In ce constă acel joc?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2484. *O tablă triunghiulară* ABC *de 12 mm grosime şi 7800 kg/m³ densitate, are laturile* AB, AC, BC *respectiv de 3; 4; 5 m. Ea se atârnă în* A *într'un plan vertical, iar de* B *şi* C *se atârnă prin fire greutăţile* 2P *şi* P. *Se cere:*

1. *Intensitatea lui* P, *când* AB *şi* AC *fac unghiuri egale cu orizontala;*

2. *Poziţia ce ia placa dacă lăsăm în* B *numai o greutate* P *ca şi în* C;

3. *Lucrul mecanic ce corespunde mişcării plăcii din prima poziţie în cealaltă.*

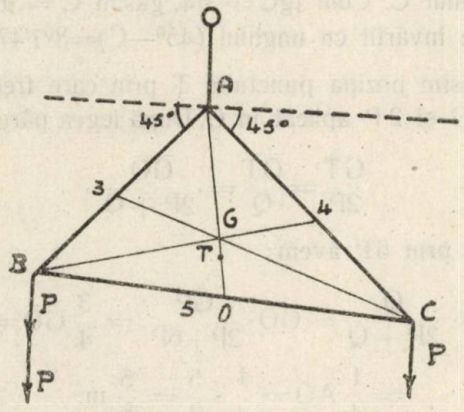
I. Ionescu.

1. Din cauză că $3^2 + 4^2 = 5^2$, reese că triunghiul ABC este dreptunghic în A. Deci unghiurile lui AB şi AC sunt totdeauna complimentare. Dacă ele sunt egale, fiecare valorează 45^0.

Fie Q greutatea plăcii. Vom aveà:

$$Q = \tfrac{1}{2} . 3 . 4 . 0{,}12 . 7800 = 561{,}6 \text{ kg.}$$

Această greutate se aplică în centrul de greutate G al plăcii, care este în planul median al ei, arătat pe figură, la 2/3 a medianei



AO a triunghiului ABC. Cum la un triunghiu dreptunghic BO=CO=AO, reese că $\overline{AO} = 5/2 = 2{,}5$ m. Deci $\overline{AG} = 2\,\overline{AO}/3 = 5/3$ m.

Pentru echilibrul plăcii, suma momentelor forţelor Q, P, 2P, în raport cu axa de rotaţie ce se proectează în A, trebuie să fie nulă. Va trebui să avem deci:

$$2P . 3 \cos 45^0 = P . 4 \cos 45^0 + Q . (5/3) \cos (45^0 + C),$$

căci AO face cu AC unghiul C, de oarece triunghiul AOC este isoscel. De aci scoatem:

$$6P \cos 45^0 = 5Q . (\cos 45^0 \cos C - \sin 45^0 \sin C),$$

şi cum $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \sqrt{2}/2$ ne rămâne:

$$6P = 5Q (\cos C - \sin C).$$

Dar din triunghiul dreptunghic ABC scoatem imediat:

$$\cos C = 4/5; \quad \sin C = 3/5; \quad \operatorname{tg} C = 3/4.$$

Inlocuind ne rămâne:

$$6P = Q, \qquad P = Q/6 = 561{,}6/6 = 93{,}6 \text{ kg.}$$

Se va aplică în C o greutate de 93,6 kg. şi în B una de 187,2 kg.

2. Forţele P şi P aplicate în B şi C dau o rezultantă 2P aplicată în O. Aceasta compusă cu Q, ne va da o rezultantă aplicată într'un punct T al lui GO. Echilibrul se va stabili când această rezultantă va trece prin punctul de suspensiune A, adică când AO va fi verticală. Bara AB va face atunci cu orizontala unghiul complimentar lui OAB, care este egal cu OBA. Deci AB va face cu orizontala unghiul C. Cum $tgC = 3/4$, găsim $C = 36^0 52' 12'',45$.

Placa s'a învârtit cu unghiul $(45^0 - C) = 8^0 7' 47'',55$.

3. Să găsim poziţia punctului T prin care trece rezultanta lui Q, aplicat în G şi 2P aplicat în O. După legea pârghiilor avem:

$$\frac{\overline{GT}}{2P} = \frac{\overline{OT}}{Q} = \frac{\overline{GO}}{2P+Q},$$

şi înlocuind Q prin 6P avem:

$$\overline{OT} = \overline{GO} \cdot \frac{Q}{2P+Q} = \overline{GO} \cdot \frac{GP}{2P+6P} = \frac{3}{4}\overline{GO} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}\overline{AO}$$

$$= \frac{1}{4}\overline{AO} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8} \text{ m.}$$

Deci:

$$\overline{AT} = \overline{AO} - \overline{OT} = \frac{5}{2} - \frac{5}{8} = \frac{15}{8} \text{ m.}$$

In a doua poziţiune T se găsià la 15/8 m. sub orizontala lui A; în primul caz la 15/8 $\sin(45^0 + C)$. Insă avem:

$$\sin(45^0 + C) = \sin 45^0 \cos C + \sin C \cos 45^0 = (\sin C + \cos C)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin(45^0 + C) = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

Deplasarea verticală d a punctului T, este dar:

$$d = \overline{AT} - AT \sin(45^0 + C) = \frac{15}{8}\left(1 - \frac{7\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{3(10 - 7\sqrt{2})}{16}.$$

Rezultanta aplicată în T are intensitatea:

$$2P + Q = 2 \cdot \frac{Q}{6} + Q = \frac{4}{3} Q.$$

Lucrul mecanic L produs va fi:

$$L = \frac{4}{3} Q \cdot \frac{3(10-7\sqrt{2})}{16} = \frac{1}{4}(10-7\sqrt{2})\,Q.$$

$$L = \frac{1}{4}(10-7\sqrt{2}) \cdot 561{,}6 = \frac{1}{4}(10-7.1{,}41421).561{,}6 = 14{,}114\,\text{kgm}.$$

O. Orănescu.
(Inginer mecanic la Navigaţiunea fluvială română, Galaţi).

PROBLEMA 3194. *Fie* A_1, B_1, C_1 *mijloacele laturilor unui triunghiu* ABC, R *şi* r *raza cercului circumscris şi a cercului înscris triunghiului,* h_a, h_b, h_c *înălţimile sale,* φ *punctul lui* Feuerbach, X, Y, Z *proiecţiile lui* φ *pe laturile* BC, CA, AB. *Să se demonstreze relaţiunea*

$$\frac{\overline{XA_1}}{R+r-h_a} = \frac{\overline{YB_1}}{R+r-h_b} + \frac{\overline{ZC_1}}{R+r-h_c},$$

BC *fiind latura cea mai mare a triunghiului* *).

V. Cristescu.

Soluţie dată de D-nul Gh. D. Simionescu. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, I centrul cercului înscris, A′ piciorul înălţimei h_a, D punctul de contact al cercului înscris cu latura BC, M şi N proiecţiile lui I pe AO şi AA′.

Se ştie că AO şi AA′ sunt isogonale în raport cu unghiul A, iar $\sphericalangle OAI = \frac{1}{2}(B-B)$; (Figura presupune $a>b>c$). Triunghiurile AMI şi ANI fiind egale, avem AM = AN, iar NA′ = ID = r. Avem atunci după figură

$$OM = OA - AM = OA - AN = OA - (AA' - NA') = R - (h_a - r)$$

$$\therefore \qquad OM = R + r - h_a. \qquad (1)$$

Din triunghiul $\varphi A'A_1$ înscris în cercul lui Euler, avem

$$\overline{\varphi A_1} : \sin \varphi A'A_1 = R, \qquad \therefore \quad \sin \varphi A'A_1 = \overline{\varphi A_1} : R.$$

Din triunghiul dreptunghic $\varphi XA'$, avem

*) A se vedea: *Gazeta Matematică*, Vol. XXIX, p. 439 şi Vol. XXX, p. 198.

$$\overline{\varphi X} = \overline{\varphi A'} \sin \varphi A' A_1 = \overline{\varphi A'} \cdot \overline{\varphi A_1}/R, \qquad (2)$$

iar din triunghiul dreptunghic $\varphi X A_1$, scoatem

$$\overline{XA_1} = \sqrt{\overline{\varphi A_1^2} - \overline{\varphi X^2}},$$

sau, ţinând seamă de relaţia (2)

$$\overline{XA_1} = \overline{\varphi A_1} \cdot \sqrt{R^2 - \overline{\varphi A'^2}}/R. \qquad (3)$$

Din triunghiul dreptunghic OMI, avem

$$OM = \sqrt{\overline{OI^2} - \overline{IM^2}}.$$

Dar $IM = AI \sin \frac{1}{2}(B-C)$, iar $AI = 4R \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$

şi introducând aceste valori în relaţia precedentă, ea ne dă:

$$R + r - h_a = \sqrt{OI^2 - 16R^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}B \sin^2 \tfrac{1}{2}C \sin^2 \tfrac{1}{2}(B-C)}. \qquad (4)$$

Pe de altă parte, se ştie (*Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, p. 224 şi 225, problema 2760), că avem

$$\overline{\varphi A'} = \frac{4R^2}{OI} \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C \sin \tfrac{1}{2}(B-C)$$

şi prin urmare relaţia (4), devine

$$R + r - h_a = \overline{OI} \cdot \sqrt{R^2 - \overline{\varphi A'^2}}/R. \qquad (5)$$

Impărţind relaţia (3) prin relaţia (5), parte cu parte, obţinem:

$$\overline{XA_1} : (R + r - h_a) = \overline{\varphi A_1} : \overline{OI}. \qquad (6)$$

In mod analog obţinem

$$\overline{YB_1} : (R + r - h_b) = \overline{\varphi B_1} : \overline{OI} \quad \text{şi} \quad \overline{ZC_1} : (h_c - R - r) = \overline{\varphi C_1} : \overline{OI}. \qquad (7)$$

Se cunoaşte însă următoarea proprietate, datorită lui W. Godt: *Cel mai mare dintre segmentele rectilinii* $\overline{\varphi A_1}$, $\overline{\varphi B_1}$, $\overline{\varphi C_1}$ *este egal cu suma celorlalte două* *). In cazul figurei ($a > b > c$), avem:

$$\overline{\varphi B_1} = \overline{\varphi C_1} + \overline{\varphi A_1},$$

în care, înlocuind pe $\overline{\varphi A_1}$, $\overline{\varphi B_1}$, $\overline{\varphi C_1}$ prin valorile scoase din (6) şi (7), obţinem relaţia propusă.

*) A se vedeà: J. Neuberg, *Sur le théoréme de* Feuerbach, *Mathesis* année 1908, p. 203;

V. Cristescu, *Sur le point de* Feuerbach *et la parabole* (φ, OI), *Mathesis*, année 1925, p. 263.

Au rezolvat problema, prin calcule laborioase, cu ajutorul coordonatelor baricentrice, D-nii: I. C. VASILIU şi PAUL I. IONESCU.

Notă. 1. In relaţia demonstrată, raportul $\overline{ZC_1} : (R+r-h_c)$ este negativ, de oarece c fiind presupusă că e cea mai mică latură a triunghiului ($a>b>c$), avem $h_c > R+r$. Relaţia obţinută se poate scrie însă

$$\frac{\overline{YB_1}}{R+r-h_b} = \frac{\overline{ZC_1}}{h_c-(R+r)} + \frac{\overline{XA_1}}{R+r-h_a}$$

şi atunci ea are aceeaşi formă ca relaţia lui GODT.

2. Dacă excepţăm cazul triunghiului isoscel sau echilateral, relaţia (6), pusă sub forma

$$XA_1 = \frac{\varphi A_1}{OI}(R+r-h_a),$$

ne arată că segmentul XA_1 este nul când avem

$$h_a = R+r. \tag{8}$$

In acest caz, punctele X şi A_1 se confundă, φ se află pe mediatoarea laturei BC, iar

$$\overline{\varphi B} = \overline{\varphi C}.$$

Relaţia (8) caracterizează deci triunghiurile ABC *pseudo-isoscele*, in care avem $\varphi B = \varphi C$, fără ca triunghiul să fie isoscel*).

PROBLEMA 3195. *Fie* H *ortocentrul unuia din triunghiurile* ABC *înscrise într'un cerc* O; $(A_a), (B_b), (C_c)$ *cercurile descrise din* A, B, C *ca centre şi cu* ka, kb, kc *ca raze. Să se demonstreze că ori care ar fi numărul* k, *dreapta care uneşte pe* H *cu centrul radical* D *al cercurilor* $(A_a), (B_b), (C_c)$ *trece printr'un punct fix* F. *Să se găsiască valoarea lui* k *pentru care* D *şi* F *se confundă.*

COLONEL GH. BUICLIU.

I. *Soluţie* dată de D-nii: N. G. BOTEA (Lc. Cantemir, Bucureşti); I. C. VASILIU, M. PĂTROIANU, C. CIORĂNESCU, G. SIMIONESCU (Lc. Militar, Mânăstirea Dealului) şi L. WEISS (Lc. Alexandri, Galaţi).

Ecuaţiile baricentrice ale cercurilor $(A_a), (B_b), (C_c)$ sunt:

---

*) A se vedea: V. CRISTESCU, *Triangles pseudo-isoscèles par rapport à un point de* FEUERBACH, *Mathesis*, année 1923, p. 373—378.

V. C.

$$(1) \qquad F/\vartheta = -k^2a^2\alpha + (c^2 - k^2a^2)\beta + (b^2 - k^2a^2)\gamma$$

$$(2) \qquad F/\vartheta = (c^2 - k^2b^2)\alpha - k^2b^2\beta + (a^2 - k^2b^2)\gamma$$

$$(3) \qquad F/\vartheta = (b^2 - k^2c^2)\alpha + (a^2 - k^2c^2)\beta - k^2c^2\gamma.$$

Scăzând (2) din (1) și apoi (3) din (2), se obțin 2 din axele radicale ale celor 3 cercuri și anume:

$$(1) - (2) = (k^2b^2 - k^2a^2 - c^2)\alpha + (c^2 - k^2a^2 + k^2b^2)\beta + (b^2 - k^2a^2 - a^2 + k^2b^2)\gamma = 0$$

$$(2) - (3) = (c^2 - k^2b^2 - b^2 + k^2c^2)\alpha - (k^2b^2 + a^2 - k^2c^2)\beta + (a^2 - k^2b^2 + k^2c^2)\gamma = 0.$$

De aici se deduce că coordonatele baricentrice ale lui D sunt:

$$\alpha_1 = a^2(b^2 + c^2 - a^2) + k^2(a^2b^2 + a^2c^2 - 2a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2)$$

$$\beta_1 = b^2(c^2 + a^2 - b^2) + k^2(b^2c^2 + b^2a^2 - 2b^4 + c^4 + a^4 - 2c^2a^2)$$

$$\gamma_1 = c^2(a^2 + b^2 - c^2) + k^2(c^2a^2 + c^2b^2 - 2c^4 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2).$$

Știind că coordonatele baricentrice ale lui H sunt:

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \quad \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}, \quad \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2},$$

se găsește că ecuația dreptei DH este

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \dfrac{1}{b^2 + c^2 - a^2} & \dfrac{1}{c^2 + a^2 - b^2} & \dfrac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \end{vmatrix} = 0,$$

sau ceeace este tot una

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) & (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) & (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Adunând la linia a doua, elementele liniei a treia înmulțite cu k^2, ecuația (4) devine

$$(5) \quad (k^2 + 1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a^2(b^2 + c^2 - a^2) & b^2(c^2 + a^2 - b^2) & c^2(a^2 + b^2 - c^2) \\ (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) & (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) & (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) \end{vmatrix} = 0,$$

care este independentă de k. Prin urmare, pentru un triunghiu ABC

dat, D se află pe o dreaptă fixă (5), oricare ar fi k. Se observă mediat că dreapta (5) trece prin punctul fix

$$F[a^2(b^2+c^2-a^2),\ b^2(c^2+a^2-b^2),\ c^2(a^2+b^2-c^2)],$$

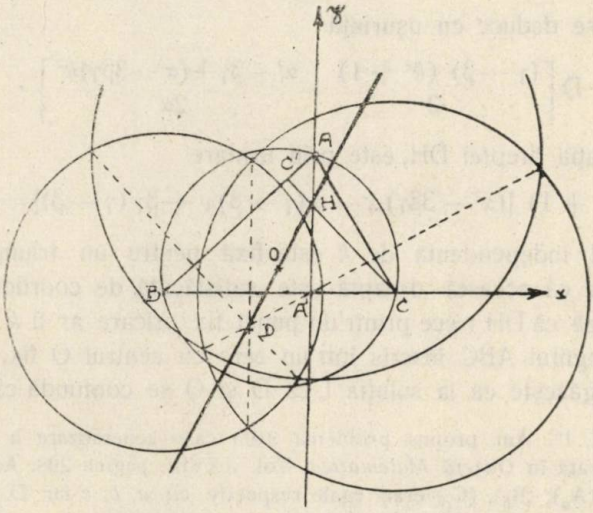
care este tocmai centrul O al cercului ABC. Deci DH trece printr'un punct fix oricare ar fi k şi oricare ar fi triunghiul ABC înscris în O.

Pentru ca F să se confunde cu D, trebuie ca α_1, β_1, γ_1 să fie egale cu coordonatele baricentrice ale lui F (adică a lui O). Trebuie ca de exemplu

$$a^2(b^2+c^2-a^2)+k^2(a^2b^2+a^2c^2-2a^4+b^4+c^4-2b^2c^2)=a^2(b^2+c^2-a^2),$$

de unde $k=0$.

II. *Soluţie* analitică dată de d-l N. Arcadian (Absolvent, Lc. Caracal).



Luăm ca axe de coordonate latura BC şi înălţimea AA'. Fie A(0, α), B(—β, 0), C(γ, 0). Din ecuaţiile dreptelor AB, CC', AA':

$$(AB)\qquad \alpha x-\beta y+\alpha\beta=0$$

$$(CC')\qquad \beta x+\alpha y-\beta\gamma=0$$

$$(AA')\qquad x=0$$

şi coordonatele punctelor B, C, se găseşte $H\left(0,\ \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$ şi $O\left(\frac{\gamma-\beta}{2},\ \frac{\alpha^2-\beta\gamma}{2}\right)$.

Insemnând cu R_a, R_b, R_c razele celor 3 cercuri, avem

$$a = \beta + \gamma \quad ; \quad b = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \quad ; \quad c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$R_a = k(\alpha + \beta) \quad ; \quad R_b = k\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \quad ; \quad R_c = k\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

aşà că ecuaţiile cercurilor (A_a), (B_b), (C_c) vor fi

$$(A_a) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - k^2(\beta + \gamma)^2 = 0$$

$$(B_b) \qquad x^2 + y^2 + 2\beta x + \beta^2 - k^2(\gamma^2 + \alpha^2) = 0$$

$$(C_c) \qquad x^2 + y^2 - 2\gamma x + \gamma^2 - k^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Ecuaţiile a două din axele radicale a acestor cercuri vor fi:

$$(B_b) - (A_a) = 2\beta x + 2\alpha y + \beta^2 - \alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2 + 2\beta\gamma)k^2 = 0$$

$$(B_b) - (C_c) = 2x + (\beta - \gamma)(k^2 + 1) = 0,$$

de unde se deduce cu uşurinţă

$$D\left[\frac{(\gamma - \beta)(k^2 + 1)}{2}, \frac{\alpha^2 - \beta\gamma + (\alpha^2 - 3\beta\gamma)k^2}{2\alpha}\right].$$

Ecuaţia dreptei DH, este prin urmare

$$(k^2 + 1)[(\alpha^2 - 3\beta\gamma)x - \alpha(\gamma - \beta)y + \beta\gamma(\gamma - \beta)] = 0,$$

care fiind independentă de k este fixă pentru un triunghiu dat. Observând că această dreaptă este satisfăcută de coordonatele lui O, urmează că DH trece printr'un punct fix oricare ar fi k şi oricare ar fi triunghiul ABC înscris într'un cerc cu centrul O fix.

Se găseşte ca la soluţia I, că D şi O se confundă când $k=0$.

Notă. 1°. Am propus problema 3195 ca o generalizare a problemei 2411 rezolvată în *Gazetă Matematică*, Vol. XXVIII, pagina 298. Acolo razele cercurilor (A_a), (B_b), (C_c) erau egale respectiv cu a, b, c iar D erà simetricul lui H faţă de O. Cu alte cuvinte în cazul particular al problemei 2411 aveam

$$OD/OH = -1.$$

Pentru cazul general al problemei 3195 s'a demonstrat în cele 2 soluţii că DH trece prin O oricare ar fi k. Se poate demonstrà çă şi în acest caz general raportul OD/OH este constant pentru o valoare dată lui k, oricare ar fi triunghiul ABC înscris într'un cerc cu centrul în O. In adevăr, referindu-mă la soluţia analitică şi însemnând cu x_1, x, x_2 abscisele respective ale punctelor D, O, H, se ştie după o formulă bine cunoscută că

$$OD/OH = (x_1 - x)/(x_2 - x).$$

Inlocuind aici pe x_1, x, x_2 prin valorile găsite la soluţia a doua, se obţine

(1) $$OD/OH = -k^2.$$

2°. Făcând în (1), $k = 1$, se găseşte

$$OD + OH = 0,$$

adică problema 2411.

3°. Păstrând k constant şi impunând triunghiului ABC să varieze aşa fel în cât H să descrie ca loc geometric o curbă Γ, punctul D va descrie omotetica lui Γ, faţă de centrul de omotetie O, raportul de omotetie fiind $-k^2$. De exemplu, când B şi C sunt fixe şi unghiul A este constant, se ştie că unghiul BHC este constant, punctul H descrie un cerc, deci şi punctul D va descrie un cerc, etc.

COLONEL GH. BUICLIU.

PROBLEMA 3256. *Intr'un triunghiu dreptunghic* $A_1B_1C_1$, *fie* O_1 *mijlocul hipotenuzei* B_1C_1 *şi* A, B, C, *simetricele vârfurilor* A_1, B_1, C_1 *în raport cu laturile opuse; iar în triunghiul* ABC, *fie* H *ortocentrul*, O *centrul cercului circumscris*, A' *piciorul înălţimei* AH, A'' *punctul unde* AH *întâlneşte a doua oară cercul circumscris*, H_1 *mijlocul segmentului* AH. *Se cere să se demonstreze că:*

1. Figura OAO_1H *este un paralelogram;*

2. Avem relaţiunile:

$$tgB = 3tgB_1 \quad , \quad tgC = 3tgC_1 \quad , \quad tgA \geqslant 3:4,$$

$$HA' = \frac{1}{2}A_1H = \frac{1}{4}HH_1 = \frac{1}{6}AA_1 = \frac{1}{9}AA' = \frac{1}{10}AA''.$$

V. CRISTESCU.

3. Să se afle cea mai mai mare valoare pe care o poate lua raportul $R:R_1$, *dintre razele cercurilor circumscrise triunghiurilor* ABC *şi* $A_1B_1C_1$.

EMIL ŞTEFĂNESCU.

Soluţie. Fie D proiecţia lui A_1 pe B_1C_1, M mijlocul laturei BC, A_2 punctul unde HA_1 taie a doua oară cercul BCA_1, C' piciorul înălţimei CH şi să însemnăm cu h înălţimea DA_1. Prin construcţie, avem $AD = DA_1 = A_1A'$, deci $AA' = 3h$.

1. Vom demonstră mai întâi că $HA' = DH_1$.

Dacă luăm puterea punctului H faţă de cercurile BCA_1C' şi $A'CA'C'$, avem

$$HC \cdot HC' = HA_1 \cdot HA_2 = HA \cdot HA'. \qquad (1)$$

Să însemnăm cu x segmentul HA'. Avem

$HA_1 = A'A_1 - HA' = h - x$; $HA_2 = A'A_2 + HA' = h + x$; $HA = 3h - x$

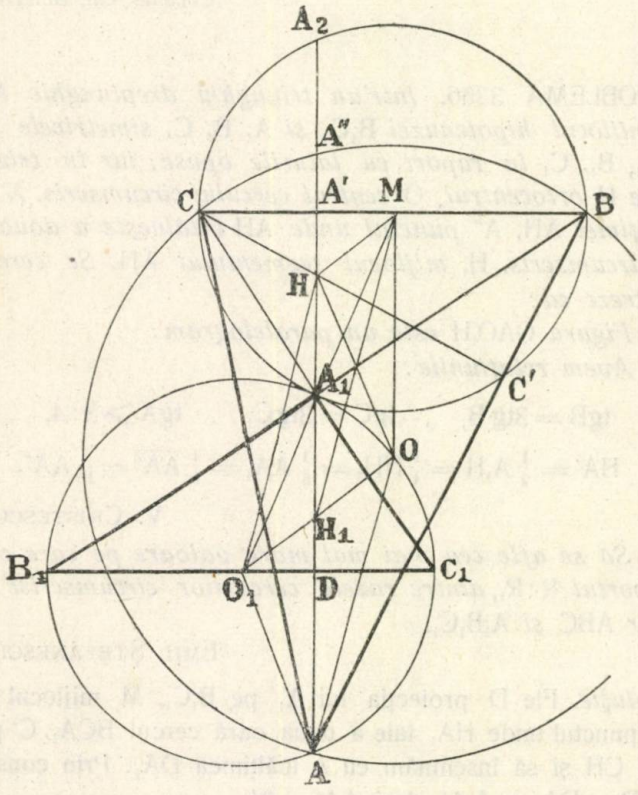
şi introducând în (1), obţinem

$$(h - x)(h + x) = (3h - x)x \qquad \therefore \qquad x = HA' = \tfrac{1}{3}h.$$

Găsim atunci: $HA = 3h - \frac{1}{3}h = \frac{8}{3}h$, $AH_1 = \frac{1}{2}HA = \frac{4}{3}h$,

$$H_1D = AH_1 - AD = \tfrac{4}{3}h - h = \tfrac{1}{3}h.$$

Avem deci: $HA' = H_1D = \frac{1}{3}DA_1$. (2)



Dar prin construcţie, din cauza simetriei, avem $MA' = DO_1$. Triunghiurile MHA' şi O_1H_1D au deci catetele egale şi paralele; rezultă că şi hipotenuzele lor MH şi O_1H_1 vor fi egale şi paralele, de unde conchidem că figura MHO_1H_1 este un paralelogram. Dar

H_1 fiind punctul eulerian de pe înălțimea AH, se știe că dreapta OM este egală și paralelă cu AH_1; deci figura $MOAH_1$ este de asemenea un paralelogram. Rezultă atunci, din cele demonstrate, că și figura OAO_1H este un paralelogram.

CONST. C. POPOVICI, V. DORNEANU, AL. C. FLOREA, C. GIURUMESCU (Elevi Liceul Internat, Iași).

2. *a)* Din triunghiurile dreptunghice ACA', A_1C_1D avem:

$$tgB = AA' : BA' \quad , \quad tgB_1 = A_1D : DB_1.$$

Dar prin construcție $BA' = DB_1$, iar $AA' = 3DA_1$, deci

$$tgB = 3tgB_1 \text{ și analog } tgC = 3tgC_1. \tag{3}$$

Din triunghiul dreptunghic ACC' avem

$$tgA = CC' : AC'.$$

Dar $CC' = BC \sin B$, $AC' = AH \sin B$

$$\therefore \quad tgA = \frac{BC}{AH} = \frac{3BC}{8h} = \frac{3}{4} \cdot \frac{B_1C_1}{2DA_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{A_1O_1}{DA_1}$$

și de oarece DA_1 nu poate fi mai mare ca A_1O_1, rezultă că

$$tgA \geqslant 3 : 4. \tag{4}$$

Pentru că $HA' = \frac{1}{3} h$ și $A_1A' = h$, avem $HA' = \frac{1}{2} HA_1$.

Dar, din cele demonstrate, rezultă că A_1 este mijlocul segmentului HH_1; deci $HA' = \frac{1}{2} HA_1 = \frac{1}{4} HH_1$.

Apoi $HA' = \frac{1}{3} A_1D = \frac{1}{6} AA_1 = \frac{1}{9} AA'$.

Se știe că $A'A'' = HA'$; deci $AA'' = AA' + A'A'' = 9HA' + HA'$

$$\therefore \quad HA' = \frac{1}{10} AA''.$$

CONST. C. POPOVICI, V. DORNEANU, AUREL POPOVICI, AL. C. FLOREA, C. GIURUMESCU, N. I. MANOLESCU.

b) Avem $tgA = -tg(B + C) = (tgB + tgC) : (tgB tgC - 1)$, de unde, ținând seamă de (3) și observând că $B_1 + C_1 = 90^0$:

$$tgA = \frac{3}{8} (tgB_1 + tgC_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sin 2B_1}.$$

Cea mai mare valoare a lui $\sin 2B_1$ fiind 1, pentru $B_1 = 45^0$, conchidem că $tgA \geqslant 3 : 4$.

RADU ADAM, FILIP S. GOLDSTEIN.
Constanța Elev Liceul Gh. Șincai.

3. *a)* Avem $R_1 = \frac{1}{2} B_1C_1 = \frac{1}{2} BC$ şi $BC : \sin A = 2R$

$$\therefore \quad \frac{R}{R_1} = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A} = \sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 A}}.$$

Maximul raportului $R : R_1$ are deci loc pentru minimul lui $\operatorname{tg} A = 3 : 4$. Găsim

$$\max.(R : R_1) = 5 : 3.$$

AUREL POPOVICI.
(Elev Liceul Focşani).

b) Din triunghiul dreptunghic ACA', avem

$$b^2 = \overline{AC}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{CA'}^2 = 9\overline{A_1D}^2 + \overline{DC_1}^2 = 9b_1^2 \sin^2 C_1 + b_1^2 \cos^2 C_1$$

$$\therefore \quad b^2 = b_1^2(1 + 8\sin^2 C_1) \text{ şi analog } c^2 = c_1^2(1 + 8\sin^2 B_1).$$

Fie S şi S_1 ariile triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$. Avem:

$$S = 3S_1 = \tfrac{3}{2} b_1c_1 \quad , \quad 2R_1 = a_1 = a \quad , \quad R = abc : 4S$$

$$\therefore \quad \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 = \frac{(1 + 8\sin^2 B_1)(1 + 8\sin^2 C_1)}{9} = \frac{9 + 16\sin^2 2B_1}{9}.$$

Maximul căutat are deci loc pentru $\sin 2B_1 = 1$, ceeace ne dă $\max.(R : R_1)^2 = 25 : 9 \quad \therefore \quad \max.(R : R_1) = 5 : 3.$

ION C. VASILIU.

Au rezolvat bine şi complet problema, D-nii: CONST. C. POPOVICI, V. DORNEANU, C. GIURUMESCU, AL. C. FLOREA, ION C. VASILIU N. G. BOTEA, şi RADU ADAM. Din soluţiile trimise, am reprodus pe cele mai simple şi mai caracteristice.

Au dat soluţii parţiale, D-nii: AUREL POPOVICI, N. I. MANOLESCU, DUMITRU SEVASTRE, FILIP S. GOLDSTEIN, EM. GH. GAIU, D. G. MILCULESCU.

Notă. 1. Problema 3265 este un caz particular al interesantei chestiuni cunoscută sub numele *The Problem of Three Images*, în care se cere să se construiască un triunghiu ABC, cunoscându-se simetricele A', B', C' ale vârfurilor A, B, C în raport cu laturile opuse BC, CA, AB.

Mai multe proprietăţi ale acestei figuri sunt menţionate în *Mathesis*, année 1922, p 287, 328, 401 şi 466. Dintre ele reproducem pe următoarea:

Dacă $\alpha\beta\gamma$ este triunghiul podar al centrului ω al cercului celor nouă puncte din triunghiul ABC şi A'B'C' triunghiul ale cărui vârfuri sunt simetricele vârfurilor A, B, C în raport cu BC, CA, AB, triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ şi A'B'C' sunt homotetice, având ca centru de homotetie centrul de greutate G al triunghiului ABC şi ca raport de homotetie 4. (*Mathesis* 1922, p. 401, nota 48 a D-lui V. THÉBAULT).

Relaţiuni între laturile şi ariile triunghiurilor ABC şi A'B'C' se găsesc şi în *Culegere de Probleme*, Trigonometria, Cap. XVIII. 35.

D-nul G. ESPANET a demonstrat, în *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1900, p. 356, că soluţia chestiunei *The Problem of three Images* depinde de o ecuaţie de gradul 7, ireductibilă în cazul general, şi nu poate fi rezolvată deci cu rigla şi cu compasul,

Problema 3045 din „*Gazeta Matematică*", Vol. XXVIII, p. 319 este şi ea în legătură cu această chestiune.

2) Relaţiunile (3) ne dau $tgB \cdot tgC = 9\, tgB_1 \cdot tgC_1$

$$\therefore \qquad tgB \cdot tgC = 9.$$

Triunghiul ABC considerat în problema 3256 este deci triunghiul special ($tgB \cdot tgC = 9$), studiat de D-nul V. THÉBAULT în Nota 20 din *Mathesis*, Mai 1926.

Toate proprietăţile stabilite în această notă, sunt cuprinse în problema 3256 şi în homotetia menţionată mai sus.

Problema 3256 dă o construcţie geometrică foarte simplă a triunghiului special $tgB \cdot tgC = 9$ şi arată totodată că există o infinitate de asemenea triunghiuri.

V. CRISTESCU.

PROBLEMA 3284. *Fie* D, E, F *punctele de contact ale cercului înscris într'un triunghiu* ABC *cu laturile* BC, CA, AB, I *centrul cercului*, P *un punct oarecare de pe bisectoara* AI. *Dreptele* PB, PC *întâlnesc laturile* DF *şi* DE *în punctele* M *şi* N. *Să se demonstreze că:*

1. Dreapta MN *are o direcţie fixă;*

2. Există pe AI *o poziţie a lui* P, *iar pe* BI *şi* CI *câte un punct analog* P' *şi* P", *astfel ca punctele* M, N *şi analoagele lor, să fie şease puncte conciclice.*

N. BLAHA.

Soluţie dată de D-nul VALERIU MANAFU (Elev Cl. VI, Liceul Mănăstirea Dealului).

1. Să însemnăm cu B_1 şi C_1 punctele unde BI şi CI taie respectiv pe DF şi DE; B_1 şi C_1 sunt mijloacele laturilor DF şi DE.

Rapoartele anarmonice ale fascicolelor ($C.DC_1NE$) şi ($B.DB_1MF$) sunt egale, căci fascicolele au o rază comună şi o transversală comună. Avem deci:

$$\frac{DC_1}{DN} : \frac{EC_1}{EN} = \frac{DB_1}{DM} : \frac{FB_1}{FM}. \qquad (1)$$

Insă $DC_1 = EC_1$ şi $DB_1 = FB_1$. Deci (1) ne dă

$$DN : EN = DM : FM,$$

ceeace ne arată că dreapta MN este paralelă cu EF. Prima parte a problemei este deci demonstrată.

Reciproc, dacă ducem o paralelă MN la latura EF a triunghiului DEF (punctul M fiind pe DF şi N pe DE), atunci dreptele BM şi CN se taie într'un punct P situat pe AI. In adevăr, dreptele B_1C_1, MN şi EF fiind paralele, rapoartele anarmonice (DC_1NE) şi (DB_1MF) sunt egale, iar fascicolele de patru drepte

$$(C.DC_1NE) \text{ şi } (B.DB_1MF),$$

având un raport anarmonic egal şi o rază omoloagă comună BC, cele trei puncte A, P, I de intersecţie ale celorlalte raze omoloage, luate două câte două, sunt în linie dreaptă.

2. Analoagele punctelor M şi N vor determină alte două drepte paralele respectiv cu laturile FD şi DE ale triunghiului DEF. Dacă cele şease puncte vor fi conciclice, ele se vor găsi pe primul cerc al lui LEMOINE al triunghiului DEF. In acest caz MN (şi analoagele ei) trebuie să treacă prin K, punctul lui LEMOINE al triunghiului DEF, care se ştie că e intersecţia dreptelor AD, BE, CF.

Să ducem atunci prin K o paralelă la EF şi fie M_1 şi N_1 punctele de intersecţie ale acestei paralele, respectiv cu laturile DF şi DE. După reciproca primei părţi, demonstrată mai sus, dreptele BM_1 şi CN_1 se întretaie într'un punct P_1 situat pe AI.

Insă, cele şease puncte N_1, D, M_1, B, K, C formează un hexagon înscris în unghiul format de dreptele M_1N_1 şi BC; deci, după *teorema lui* PASCAL, intersecţia P_1 a laturilor BM_1 şi CN_1 se va află pe EF. Punctele P căutate sunt deci mijloacele laturilor triunghiului DEF, iar cele şease puncte M_1, N_1,.... se găsesc pe *primul cerc al lui* LEMOINE al triunghiului DEF.

Putem spune că mai e o poziţie a lui P şi anume când P este în I. In acest caz cele şease puncte se reduc la trei şi anume la vârfurile A_1, B_1, C_1 ale complimentarului lui DEF.

Pentru partea a doua a problemei a se vedeà:

N. BLAHA, *Proprietăţi ale cercului înscris într'un triunghiu. G. M.* Vol. XXII, pag. 272 şi 273 şi N. BLAHA, *Inginer, Proprietăţi din Geometria triunghiului*, pag. 35.

PROBLEMA 3363. *Se cere un cub de cinci cifre aşà ca suma primelor trei cifre să fie egală cu suma ultimelor două, iar cifra zecilor aceeaşi cu a miilor.*

G. TAILER.

Soluţie dată de D-nii: A. ANGELESCU (Lic. Cantemir, Bucureşti); T. BACIU (Lic. R.-Sărat); ISTINIE BREZUICA, MARIN MARINAŞ, C. RAICIU, I. ŞCHIOPULESCU, I. ZAMFIR (Lic. Caracal); P. CARABEŢEANU, A. PÂRVU (Lic. Lazăr, Bucureşti); A. IONESCU (Lic. Piteşti); I. CRISTESCU (Lic. Şincai, Bucureşti); A. DIMITRIEVICI, I. GEORGESCU (Lic. Militar, Tg.-Mureş); L. HAIM (Lic. Piatra-N.); MARIUS MARIŞ (Lic. Arad); I. NICOLAU-DOBRIDOR (Lic. Militar, Craiova); G. NICOLAU (Lic. Bârlad); P. ŞERBAN (Lic. Internat, Iaşi) şi B. VASILESCU (Lic. Sf. Sava, Bucureşti).

Cubul căutat este de forma *abcbd*, în care cifrele *a*, *c* şi *d* satisfac condiţiunea:

$$d = a + c. \qquad (1)$$

Cifra *d* nu poate fi zero, căci atunci ar urmà ca şi *a* să fie zero şi deci cubul nu ar mai aveà cinci cifre.

Pe de altă parte, numai cuburile numerelor cuprinse între *22* şi *46* inclusiv, au cinci cifre. Eliminând pe 30 şi 40 şi examinând cuburile celorlalte 23 numere rămase, se constată că numai cuburile:

$$26^3 = 17576 \quad \text{şi} \quad 31^3 = 29791,$$

sunt de forma propusă. Condiţiunea (1) e însă îndeplinită numai de cubul 17576, care e singura soluţie a problemei.

Au rezolvat chestiunea pe o cale mai lungă, considerând grupurile formate de ultimele două cifre ale unui cub perfect, D-nii: A. BASARAB (Lic. R.-Sărat); A. CERNES (Lic. Cogâlniceanu, Iaşi); I. FOCA (Lic. Roşiorii de Vede) şi V. POPESCU (Lic. Militar, Tg.-Mureş).

EXERCIŢII

59. Să se găsiască patratele de patru cifre, având cifrele extreme identice, iar cifra a doua egală cu suma ultimelor două cifre.

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

R. Ultima cifră poate fi 1, 4, 5, 6, 9; iar suma ultimelor două cifre e mai mică decât 9. Suntem astfel conduşi să încercăm, dacă sunt patrate, nu-

merele: 1101, 1321, 1541, 1761, 1981, 4404, 4624, 4844, 5725, 6716, 6936 şi 9909. Dintre acestea 1101, 1761, 4404, 6936, 9909 conţin factorul 3 la o putere nepară, deci nu pot fi patrate. Dintre numerele rămase, $4624 = 68^2$ răspunde problemei.

60. Să se găsiască patratele de patru cifre, având cifrele extreme identice şi egale cu semi suma cifrelor mijlocii, iar cifra zecilor e egală cu diferenţa între cifra sutelor şi a miilor.

I. I. C. Brezuica.

R. $4624 = 68^2$. Numărul căutat fiind *abca*, avem $2a=b+c$; $c=b-a$, sau $3a=2b$. De unde (a, b) e, întregi (0, 0), (2, 3), (4, 6), (6, 9). Deci avem de considerat numerele 0000, 2312, 4624 şi 6936, de unde se deduce soluţia.

61. Să se stabiliască relaţia

$$\frac{h_a^n (r_b + r_c)^n + h_b^n (r_a + r_c)^n + h_c^n (r_a + r_b)^n}{r_b^n r_c^n + r_a^n r_c^n + r_a^n r_b^n} = 2^n .$$

Eug. Şt. Iacob.

R. Considerând relaţia

$$\frac{h_a (r_c + r_b)}{r_b r_c} = \frac{\frac{2s}{a}\left(\frac{s}{p-c} + \frac{s}{p-b}\right)}{\frac{S^2}{(p-b)(p-c)}} = 2$$

şi deci

$$\frac{h_a (r_c + r_b)}{r_b r_c} = \frac{h_b (r_a + r_c)}{r_a r_c} = \frac{h_c (r_a + r_b)}{r_a r_b} = 2,$$

prin ridicarea la puterea n^a şi aplicarea unei proprietăţi cunoscute a şirului de rapoarte egale, se ajunge la relaţia ce trebuia demonstrată.

PROBLEME PROPUSE.

3421. Patru fracţii ordinare sunt în progresie aritmetică, iar produsul lor este 243/2. Se cer acele fracţii.

E. Şt. Iacob.

3422. Se cere un număr de zece cifre diferite, care să aibă următoarea proprietate. Se trece, prima cifră dela stânga la dreapta, iar prima cifră a numărului format se dă la o parte. Din numărul rămas se trece prima cifră dela stânga la dreapta, iar din numărul

format se îndepărtează prima cifră. Se repetă operațiunea până ce rămâne un număr de o singură cifră, care se îndepărtează și dânsa. Se constată că cifrele îndepărtate sunt în ordinea naturală 0; 1; 2; 3;...9. Problema analoagă când numerele îndepărtate apar în ordinea 9; 8; 7; 6;...0.

E. GRÜNSTEIN.

3423. Fie AB un diametru în cercul O și D o dreaptă perpendiculară pe AB. Să se ducă coarda AM, care taie pe D în N, așă că MN să aibă o lungime dată.

I. IONESCU.

3424. Se dau două cercuri cu centrele în A și B. Unul din cercuri este interior celuilalt. Printr'un punct I de pe AB, se duc două corzi perpendiculare, din care una MM' în cercul A și alta NN' în cercul B. Tangentele în M și M' la cercul A și cele în N și N' la cercul B, formează un patrulater EFGH.

Se cere să se demonstreze că:

1°. Patrulaterul EFGH este inscriptibil;

2°. MM' și NN' sunt bisectoarele unghiurilor ce se obțin unind pe I cu două vârfuri consecutive ale patrulaterului;

3°. Diagonalele patrulaterului trec prin I;

4°. Centrul O al cercului EFGH se află pe AB;

5°. O împarte segmentul AB într'un raport constant, când MM' și NN' se rotesc în jurul lui I;

6°. AB este perpendiculară pe linia care unește polurile dreptelor MM', NN' respectiv față de cercurile A și B;

7°. Să se studieze cazul când cercurile A și B sunt așezate oarecum unul față de altul.

COL. GH. BUICLIU.

3425. Se consideră două cercuri cu centrele O și O_1, care se intersectează în C și D și sunt tangente la o dreaptă Δ respectiv în A și B. Dreapta AD taie cercul O_1 în E, iar BD taie cercul O în F. Dintr'un punct oarecare P situat pe dreapta Δ, se duce o paralelă la EF, pe care se ia $AG = OA$ și $AH = BO_1$. Să se demonstreze că dreptele EH și FG se întretaie pe dreapta Δ.

OCTAV ORĂNESCU.

3426. Fie ABC un triunghiu oarecare, I centrul cercului înscris, D_a, E_b, F_c picioarele transversalelor unghiulare ale punctului lui NAGEL, A_1, B_1, C_1 simetricele lui I în raport cu mijloacele laturilor triunghiului ABC. Fie A_b, A_c proiecţiile lui D_a pe A_1B, A_1C, iar B_c, B_a şi C_a, C_b punctele analoage. Să se demonstreze că dreptele $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ taie respectiv pe BC, CA, AB în trei puncte colineare.

VIRGIL COŞNIŢĂ.

3427. Să se demonstreze că dacă rădăcinile ecuaţiei

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

sunt pe dreapta D, rădăcinile derivatei $f'(x) = 0$ sunt pe aceiaşi dreaptă D.

N. AGRONOMOF.
(Wladiwostok).

3428. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare, avem relaţia

$$\frac{\sin A \cos^3 A + \sin B \cos^3 B + \sin C \cos^3 C}{\cos A \sin^3 A + \cos B \sin^3 B + \cos C \sin^3 C} = \frac{1 - 4 \cos A \cos B \cos C}{1 + 4 \cos A \cos B \cos C}.$$

EMIL ŞTEFĂNESCU.

3429. Să se găsiască curbele pentru care avem:

$$\cos\sigma = \operatorname{tg}\theta,$$

σ fiind unghiul tangentei cu axa Ox, iar θ unghiul razei vectoare cu cu aceeaşi axă.

Să se calculeze lungimea normalei şi raza de curbură.

D-RA S. HÂNCU.

3430. Se consideră o *asteroidă* (curba descrisă de un punct al unui cerc ce se rostogoleşte, interior, pe un cerc de rază de patru ori mai mare).

Să se demonstreze că toate dreptunghiurile înscrise în asteroidă sunt pătrate.

N. KAUFMANN.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (P); *Adam Radu* (3395, 410); *Agronomof N.* (Wladiwostok) (A, P); *Avram L.* (3252); *Botea G. N.* (P); *Călin M. G.* (3384, 410, 17); *Carabeţeanu P.* (3393); *Carajani A.* (3417); *Cernes A. M.* (R); *Chiru-Nanov Ovidiu* (3389, 407); *Cocea Gh. Th.* (3395, 407, C, P); *Dângă V.* (3347, 69, 99); *David H.* (3312, 410, 16); *Diaconescu T.* (3173, 271, 352, 69, 88, 99, 417); *Drâmbă N. C.* (E); *Drogeanu P. N.* (3393); *Feldstein M. S.* (P); *Gataianţu Barbu* (3399, 417); *Georgescu D.* (3407); *Georgescu I. Const.* (2347); *Georgescu-Racoviţă I.* (3347, 407, N); *Gheorghiu Adrian Const.* (3407); *Grabovschi Eug.* (3218, 48, 347, 69); *Grünstein Ernest* (3380, 95, 416, 17); *Haim David* (3417); *Hulubei Telemac* (3389, 99, 407, 10, 17); *Ioachim Gr.* (3410, 17); *Ionescu-Bujor Andrei* (3347, 69, 410); *Ionescu Paul* (3239); *Istinie I. C. Brezuica* (3327, 99, 417); *Manafu Valeriu* (3394, 95, P); *Manolescu I. N.* (3393, 408, P); *Mareş Gr.* (3369, 99, 410); *Mariş Marius* (E); *Morţun Emil* (3349, 99, 417); *Nestor G. D.* (3252); *Nicolau V. G.* (3289, 393, 99); *Nicolau-Dobridor I.* (3248, 77, 319, 47, 80, 99, 410, 16, 17, P); *Novacu Valeriu* (3352, 99, 417); *Pârvu A.* (C); *Pilat C.* (3252, 353, 89, 407, P); *Popescu V. C.* (C, P); *Roşculeţ Alexe* (3347, 410); *Segall L.* (3252, 99, 380); *Segârceanu C. D.* (3393); *Simionescu D. G.* (3349); *Spacu P.* (3347, 410); *Spathy Réné* (3388, 99, 417, R); *Sternhell L.* (3393, 407); *Stoicescu T.* (3252, 327, 407, 10, 17); *Tailer G.* (3173); *Teodorescu N.* (3303, P); *Trofimov P.* (3236); *Zamfirescu Gh. Ion* (3395).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2510, 602, 745, 3109, 13, 74, 242, 59, 62, 311, 22, 33, 42, 44, 49, 58, 66, 71, 72, 78, 79, 82, 87, 92, 401, 06, 09, 14 și 18 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* . . Lei 180,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Basarabia, 45, Bucureşti).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (P); *Adam Radu* (3395, 410); *Agronomof N.* (Wladiwostok) (A, P); *Avram L.* (3252); *Botea G. N.* (P); *Călin M. G.* (3384, 410, 17); *Carabeţeanu P.* (3393); *Carajani A.* (3417); *Cernes A. M.* (R); *Chiru-Nanov Ovidiu* (3389, 407); *Cocea Gh. Th.* (3395, 407, C, P); *Dângă V.* (3347, 69, 99); *David H.* (3312, 410, 16); *Diaconescu T.* (3173, 271, 352, 69, 88, 99, 417); *Drâmbă N. C.* (E); *Drogeanu P. N.* (3393); *Feldstein M. S.* (P); *Gataianţu Barbu* (3399, 417); *Georgescu D.* (3407); *Georgescu I. Const.* (2347); *Georgescu-Racoviţă I.* (3347, 407, N); *Gheorghiu Adrian Const.* (3407); *Grabovschi Eug.* (3218, 48, 347, 69); *Grünstein Ernest* (3380, 95, 416, 17); *Haim David* (3417); *Hulubei Telemac* (3389, 99, 407, 10, 17); *Ioachim Gr.* (3410, 17); *Ionescu-Bujor Andrei* (3347, 69, 410); *Ionescu Paul* (3239); *Istinie I. C. Brezuica* (3327, 99, 417); *Manafu Valeriu* (3394, 95, P); *Manolescu I. N.* (3393, 408, P); *Mareş Gr.* (3369, 99, 410); *Mariş Marius* (E); *Morţun Emil* (3349, 99, 417); *Nestor G. D.* (3252); *Nicolau V. G.* (3289, 393, 99); *Nicolau-Dobridor I.* (3248, 77, 319, 47, 80, 99, 410, 16, 17, P); *Novacu Valeriu* (3352, 99, 417); *Pârvu A.* (C); *Pilat C.* (3252, 353, 89, 407, P); *Popescu V. C.* (C, P); *Roşculeţ Alexe* (3347, 410); *Segall L.* (3252, 99, 380); *Segârceanu C. D.* (3393); *Simionescu D. G.* (3349); *Spacu P.* (3347, 410); *Spathy Réné* (3388, 99, 417, R); *Sternhell L.* (3393, 407); *Stoicescu T.* (3252, 327, 407, 10, 17); *Tailer G.* (3173); *Teodorescu N.* (3303, P); *Trofimov P.* (3236); *Zamfirescu Gh. Ion* (3395).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Soluţiunile primite în ultimul timp la problemele: 2510, 602, 745, 3109, 13, 74, 242, 59, 62, 311, 22, 33, 42, 44, 49, 58, 66, 71, 72, 78, 79, 82, 87, 92, 401, 06, 09, 14 şi 18 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* . . Lei 180,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Basarabia, 45, Bucureşti).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Soc. Asociațiunea Pentru Cultura și Literatura Poporului Român
Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 11. — IULIE 1926.

SUMARUL

1. Patrate pseudogemene . . . . . *Colonel Gh. Buicliu.*
2. Les isocentres du triangle . . . . . *N. Agronomof.*
3. Cuburi terminate cu rădăcina lor (urmare) . . . . . *E. Ştefănescu.*
4. Proprietăţi ale triunghiului . . . . . *Const. C. Popovici.*
5. Note Matematematice: 60—65.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografii.
8. Cereri: 139.
9. Probleme rezolvate: 2641, 3324, 3342, 3377.
10. Exerciţii: 62—65.
11. Probleme propuse: 3431—3440.

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1926

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer Inspector General, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 766, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 43, 55, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 807, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 16, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 03, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 71, 84, 86, 92, 95, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 85, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 64, 75, 76, 78, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 13, 16, 18, 20, 25, 33, 35, 41, 43, 50, 54, 60, 61, 71, 72, 79, 85, 87, 90, 95, 97, 98, 400, 02, 04, 05, 11, 12, 13, 15, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „Gazeta Matematică“ (Fabrica de Chibrituri din Bucureşti), cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţà că dela 28 iunie a. c. mai fac parte din Societatea noastră şi D-nii: Ing. **A. Brener,** Ing. **D. V. Cambureanu,** Ing. **G. A. Ioachimescu** şi Ing. **M. Manoilescu.**

PATRATE PSEUDOGEMENE.

Numesc *patrate pseudogemene,* două patrate care au toate cifrele identice şi scrise în aceeaşi ordine afară de una, cea de rangul n dela stânga. De exemplu

$251^2 = 63001$; $4375^2 = 19140625$; $125012^2 = 15628000144$;

$249^2 = 62001$; $3625^2 = 13140625$; $124988^2 = 15622000144$.

Dacă convenim a scrie şi numere întregi, care încep cu un număr oarecare de zerori, atunci vom aveà şi patrate *pseudogemene* de forma

$45^2 = 2025$; $245^2 = 60025$.

$5^2 = 0025$; $5^2 = 00025$.

Patratele de o cifră pot formà, prin asociere două câte două, şi grupe de patrate *pseudogemene.* Este lesne de găsit că nu avem astfel de patrate, între cele 6 patrate de câte 2 cifre.

Cazul când cele două patrate diferă între ele numai prin prima cifră dela stânga, a fost studiat complet şi amănunţit de d-l I. Ionescu în articolele intitulate *Patrate gemene* şi publicate în *Gazeta Matematică*, Vol. XX, pag. 203, 241, 401, 441 şi 447. Iată câtevà exemple de patrate *gemene:*

$25^2 = 625$; $925^2 = 855625$; $2875^2 = 8265625$;...

$15^2 = 225$; $675^2 = 455625$; $1125^2 = 1265625$;...

Un caz particular al patratelor *pseudogemene,* îl formează problema 3131, rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXX, pag. 393, unde se cere ca cele 2 patrate să fie prime cu 10 şi mai mici decât o putere dată a lui 10.

In fine, un alt caz al patratelor *pseudogemene,* îl formează patratele *decapitate,* studiate de D-l E. Ştefănescu în articolele publicate în *Gazeta Matematică*, Vol. XXX, pag. 205, 245 şi 365. Iată şi câtevà exemple de patrate decapitate:

$1825^2 = 3330625$; $125^2 = 15625$; $3125^2 = 9765625$;...

$575^2 = 330625$; $75^2 = 5625$; $875^2 = 765625$;...

In cele ce urmează, voiu indică modul de a stabili patrate *pseudogemene* şi voiu stabili formulele necesare pentru diferitele valori ale diferenţei cifrelor neidentice.

Din cauza apropierei dintre patratele *gemene* şi *pseudogemene*, voiu împrumută pânăla un punct metoda d-lui I. IONESCU din articolele sale asupra patratelor *gemene*.

Fie a^2, b^2 cele două patrate *pseudogemene*, c diferenţa cifrelor neidentice şi n un întreg dat. Conform însăşi definiţiei patratelor pseudogemene, trebuie să avem egalitatea:

$$(1) \qquad a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b) = c.10^{n-1}.$$

Această egalitate nu arată numai că patratele a^2 şi b^2 sunt pseudogemene, ci dă în general patratele a^2, b^2 care diferă prin $c.10^{n-1}$. Cum nu am găsit o formulă care să deà exclusiv patratele *pseudogemene*, vom căutà pentru un c şi un n dat, numerele a^2, b^2, care verifică egalitatea (1) şi apoi din acestea vom alege pe acelea care sunt pseudogemene.

Din (1) se deduce

$$(2) \qquad a - b = 2p,$$

care dus în (1) dă:

$$(3) \qquad a + b = 5.10^{n-2}.\frac{c}{p}.$$

Rezolvând sistemul (2), (3) în raport cu a şi b, se găseşte

$$(4) \qquad a,\ b = 5^2.10^{n-3}.\frac{c}{p} \pm p.$$

Pentru ca a şi b să fie întregi, trebuie ca numărul întreg p să nu aibă alţi factori primi decât pe 2, 5 şi pe aceia ai lui c diferiţi şi de 2 şi de 5 şi pe care-i însemn în ansamblul lor cu r. Avem deci

$$(5) \qquad p = 2^u.5^v.r,$$

în care r poate luà şi valoarea 1. Ducând pe (5) în (4) găsim

$$(6) \qquad a, b = 2^{n-3-u}.5^{n-1-v}.\frac{c}{r} \pm 2^u.5^v.r.$$

Aceasta este formula cea mai generală a numerelor întregi care satisfac egalitatea (1), oricare ar fi c. Patratele *pseudogemene* se vor găsi între soluțiunile acestei probleme generale pentru cazul $c < 10$. Pentru acest caz, toate valorile posibile ale lui c și r sunt cuprinse în următorul tabel:

c	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7	8	9	9	9
r	1	1	1	3	1	1	5	1	3	1	7	1	1	3	9

Pentru ca numerele a, b date de (6) să fie întregi, trebuie ca

$$(7) \qquad u \leqslant n-3 \quad \text{și} \quad r < n-1.$$

Parametrul r nu poate avea valoarea limită, căci dacă înlocuim în (6) pe v prin $n-1$ se obține

$$b = 2^{n-3-u} \cdot \frac{c}{r} - 2^u \cdot 5^{n-1} \cdot r = 2^{n-1-(3+u)} \cdot \frac{c}{r} - 2^u \cdot 5^{n-1} \cdot r,$$

evident negativ chiar pentru $c = 9$, $r = 1$, căci singur 5^{n-1} este mai mare decât 2^{n-3-u}, ori numerele negative nu intră în cadrul numerelor aritmetice pe care le căutăm. Rezultă că u și v sunt supuse la restricțiile (7).

Pe de altă parte, pentru ca b dat de (6) să fie pozitiv trebuie să avem

$$2^{n-3-u} \cdot 5^{n-1-v} \cdot \frac{c}{r} - 2^u \cdot 5^v \cdot r > 0$$

$$\therefore \quad (n-3-2u)\log 2 + \log\frac{c}{r} > (2v-n+1)\log 5 + \log r$$

$$\therefore \quad (8) \quad n-3-2u+\frac{\log c}{\log 2} > (2v-n+1)\frac{\log 5}{\log 2} + \frac{2\log r}{\log 2}.$$

Această neegalitate ne dă noi restricțiuni pentru u și v. De aici în colo procedăm în felul următor pentru găsirea patratelor

pseudogemene, corespunzătoare unei valori date lui n. Dăm lui c şi r toate sistemele de valori din tabloul precedent, căutăm valorile lui u şi v care verifică neegalităţile (7) şi (8), iar rezultatele le introducem în (6). Din numerele (6) astfel obţinute vom alege numai pe acelea care sunt patrate *pseudogemene*.

Să considerăm deci cazul $c = r = 1$. Din (6) deducem

$$(9) \qquad a,\ b = 2^{n-3-u} \cdot 5^{n-1-v} \pm 2^n \cdot 5^v,$$

iar (8) dă

$$(10) \qquad n - 3 - 2u > (2v - n + 1)\frac{\log 5}{\log 2}.$$

Dar se observă că

$$\frac{7}{3} < \frac{\log 5}{\log 2} < \frac{8}{3},$$

aşă că înlocuind în (10) pe $\frac{\log 5}{\log 2}$ prin $\frac{7}{3}$, neegalitatea subzistă cu atât mai mult şi dă

$$(11) \qquad 3u + 7v + 8 < 5n.$$

Neegalităţile (7) şi (11) dau limitele lui u şi v pentru $c = r = 1$ şi un n dat.

Fie de exemplu $n = 5$. Neegalităţile (7) şi (11) devin

$$u \leqslant 2; \qquad v < 4; \qquad 3u + 7v < 17.$$

Ele dau următoarele sisteme de valori pentru u şi v:

u	0	0	0	1	1	2	2
v	0	1	2	0	1	0	1

care introduse în (9) ne dau următoarele 7 sisteme de numere, care satisfac egalitatea

$$a^2 - b^2 = 10^4.$$

$(2^2.5^4 \pm 1)^2$; $(2^2.5^3 \pm 5)^2$; $(2^2.5^2 \pm 5^2)^2$; $(2.5^4 \pm 2)^2$;

$(2.5^3 \pm 2.5)^2$; $(5^4 \pm 2^2)^2$; $(5^3 \pm 2^2.5)^2$.

Toate aceste grupe sunt perechi de patrate *pseudogemene* şi anume:

$2501^2 = 6255001$; $505^2 = 255025$; $125^2 = 15625$;

$2499^2 = 6245001$; $495^2 = 245025$; $75^2 = 05625$;

$1252^2 = 1567504$; $260^2 = 67600$; $629^2 = 395641$; $145^2 = 21025$;

$1248^2 = 1557504$; $240^2 = 57600$; $621^2 = 385641$: $105^2 = 11025$;

antepenultimul şi ultimul sunt grupe de patrate *gemene.*

Pentru $c = r = 2$ se găseşte, ca mai înainte, din neegalitatea (8)

$$6u + 14v + 19 < 10n,$$

care împreună cu (7) dă limitele lui u şi v pentru un n dat.

Să trecem la cazul

$$c = 3 \quad , \quad r = 1.$$

Neegalitatea (8) devine

$$n - 3 - 2u + \frac{\log 3}{\log 2} > (2v - n + 1)\frac{\log 5}{\log 2},$$

dar observând că

$$\frac{4}{3} < \frac{\log 3}{\log 2} < \frac{5}{3} \quad \text{şi} \quad \frac{7}{3} < \frac{\log 5}{\log 2} < \frac{8}{3},$$

avem pentru limitele lui u şi v

$$n - 3 - 2u + \tfrac{5}{3} > (2u - n + 1)\tfrac{7}{3}$$

$$\therefore \qquad 6u + 14v + 11 < 10n.$$

Am ajuns deci la un rezultat analog cu cel din primele 2 cazuri. Procedând la fel cu toate perechile de valori ale lui c şi r, vom găsi o serie de neegalităţi analoage cu (11), care pentru un n dat vor servi la găsirea lui u şi v şi acestea la găsirea lui a^2 şi b^2.

Următorul tabel cuprinde formele numerelor a, b şi neegalităţile analoage cu (11):

Cazul	Valoarea lui c	Valoarea lui r	Formulele numerelor a, b	Relaţiile dintre u, v, n
1^0	1	1	$2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^v$	$3u+7v+8<5n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
2^0	2	2	$2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 2^{u+1}.5^v$	$6u+14v+19<10n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
3^0	3	1	$2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^v$	$6u+14v+11<10n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
4^0	3	3	$2^{n-3-u}.5^{n-1-v} + 3.2^u.5^v$	$3u+7v+10<5n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
5^0	4	1	$2^{n-1-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^v$	$3u+7v+5<5n$; $u\leqslant n-1$; $v<n-1$
6^0	5	1	$2^{n-3-u}.5^{n-v} \pm 2^u.5^v$	$6u+14v+9<10n$; $u\leqslant n-3$; $v<n$
7^0	5	5	$2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^{v+1}$	$6u+14v+23<10n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
8^0	6	1	$3.2^{n-2-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^v$	$3u+7v+4<5n$; $u\leqslant n-2$; $v<n-1$
9^0	6	3	$2^{n-2-u}.5^{n-1-v} \pm 3.2^u.5^v$	$6u+14v+17<10n$; $u\leqslant n-2$; $v<n-1$
10^0	7	1	$7.2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^v$	$6u+14v+7<10n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
11^0	7	7	$2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 7.2^u.5^v$	$3u+7v+12<5n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
12^0	8	1	$2^{n-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^v$	$6u+14v+7<10n$; $u\leqslant n$; $v<n-1$
13^0	9	1	$9.2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^v$	$3u+7v+3<5n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
14^0	9	3	$3(2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 2^u.5^v)$	$3u+7v+8<5n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$
15^0	9	9	$2^{n-3-u}.5^{n-1-v} \pm 9.2^u.5^v$	$3u+7v+12<5n$; $u\leqslant n-3$; $v<n-1$

In afară de patratele calculate pentru cazul 1^0, să mai calculăm de exemplu patratele corespunzătoare cazului 9^0 pentru $n=7$.

Procedând exact ca la cazul 1° se găseşte că pentru $n=7$, $c=6$, $r=3$ avem tabloul:

	u	v	Numerele a, b	Numărul a^2	Numărul b^2
1	0	0	$2^5.5^6+3$	$500003^2=250003000009$	$499997^2=249997000009$
2	0	1	$2^5.5^5+3.5$	$100015^2=10003000225$	$99985^2=9997000225$
3	0	2	$2^5.5^4+5^2.3$	$20075^2=403005625$	$19925^2=397005625$
4	0	3	$2^5.5^3+5^3.3$	$4375^2=19140625$	$3625^2=13140625$
5	1	0	$2^4.5^6+2.3$	$250006^2=62503000036$	$249994^2=62497000036$
6	1	1	$2^4.5^5+2.5.3$	$500030^2=2503000900$	$49970^2=2497000900$
7	1	2	$2^4.5^4+2.5^2.3$	$10150^2=103022500$	$9850^2=97022500$
8	1	3	$2^4.5^3+2.5^3.3$	$2750^2=7577600$	$1250^2=1577600$
9	2	0	$2^3.5^6+2^2.3$	$125012^2=15628000144$	$124988^2=15622000144$
10	2	1	$2^3.5^5+2^2.5.3$	$25060^2=628003600$	$24940^2=622003600$
11	2	2	$2^3.5^4+2^2.5^2.3$	$5300^2=28090000$	$4700^2=22090000$
12	3	0	$2^2.5^6+2^3.3$	$62524^2=3909490576$	$62476^2=3903490576$
13	3	1	$2^2.5^5+2^3.5.3$	$12620^2=159264400$	$12380^2=153264400$
14	3	2	$2^2.5^4+2^3.5^2.3$	$3100^2=9610000$	$1900^2=3610000$
15	4	0	$2.5^6+2^4.3$	$31298^2=979564804$	$31202^2=973564804$
16	4	1	$2.5^5+2^4.5.3$	$6490^2=42120100$	$6010^2=36120100$
17	4	2	$2.5^4+2^4.5^2.3$	$2450^2=6002500$	$50^2=0002500$
18	5	0	$5^6+2^5.3$	$1572^2=247149841$	$15529^2=241149841$
19	5	1	$5^5+2^5.5.3$	$3605^2=12996025$	$2645^2=6996025$

Se vede că din cele 19 perechi de patrate din acest tabel, numai 12 sunt *pseudogemene*, acelea scrise cu litere grase, iar dintre acestea o pereche sunt patrate *gemene* şi avem şi o soluţie de numere care încep cu zerori şi care pot fi considerate ca patrate decapitate.

Se mai observă că unele din soluţiuni, acelea terminate cu zerori, sunt provenite din soluţiuni ce ar fi fost găsite la cazuri anterioare. Soluţiunea dela No. 14 de exemplu (9610000, 3610000), provine din soluţiunea (961, 361) pentru $n = 2$, căreia i s'au adăugat 4 zerori. Prin urmare, dacă se cunosc soluţiunile pentru un n dat, se va găsi imediat o parte de soluţiuni pentru un alt n, prin adăugire de un număr pereche de zerori.

Dacă în loc de a considerà pe c ca pe un număr de o cifră, vom considerà cazul general când c are o valoare oarecare, soluţiile întregi ale ecuaţiei

$$a^2 - b^2 = c.10^n,$$

vor fi date tot de formula (6) şi problema se rezolvă identic cu aceea a patratelor pseudogemene. Evident că în cazul general cele 2 patrate nu vor mai aveà toate cifrele, afară de unu, identice şi scrise în aceiaşi ordine. De exemplu, parte din soluţiunile ecuaţiei

$$a^2 - b^2 = 13.10^4,$$

sunt numerele:

$655^2 = 429025$; $3251^2 = 10569001$; $115^2 = 13225$;....

$645^2 = 416025$; $3249^2 = 10556001$; $15^2 = 00225$;....

Se vede că şi în cazul general vom aveà soluţii care încep cu zerori. Nu vom aveà însă în acest caz nici patrate gemene, nici patrate decapitate.

Colonel Gh. Buicliu.

LES ISOCENTRES DU TRIANGLE.

Soient AA_1, BB_1, CC_1 les transversales angulaires d'un point P pris dans le plan d'un triangle ABC. Nous nous proposons de trouver les coordonnées de P dans l'hypothèse que l'on a

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = l.$$

1°. Soient (p, q, r) les coordonnées barycentriques de P. En exprimant que les longueurs AA_1, BB_1, CC_1 sont égales à l, on a

$$\left.\begin{aligned} b^2r(q+r)+c^2q(q+r)-a^2qr&=l^2(q+r)^2\\ c^2p(r+p)+a^2r(r+p)-b^2rp&=l^2(r+p)^2\\ a^2q(p+q)+b^2p(p+q)-c^2pq&=l^2(p+q)^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Résolvons ces équations par rapport à a^2, b^2, c^2; on obtient

$$\left.\begin{aligned} l^2(q+r)(q+r+4p)&=a^2(p+q+r)^2\\ l^2(r+p)(r+p+4q)&=b^2(p+q+r)^2\\ l^2(p+q)(p+q+4r)&=c^2(p+q+r)^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Si l'on pose

$$u=pq+qr+rp,$$

les équations (2) prennent la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} (q-r)^2+4u&=a^2(p+q+r)^2:l^2\\ (r-p)^2+4u&=b^2(p+q+r)^2:l^2\\ (p-q)^2+4u&=c^2(p+q+r)^2:l^2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} q-r&=\pm\sqrt{\frac{a^2(p+q+r)^2}{l^2}-4u}\\ r-p&=\pm\sqrt{\frac{b^2(p+q+r)^2}{l^2}-4u}\\ p-q&=\pm\sqrt{\frac{c^2(p+q+r)^2}{l^2}-4u} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

On en déduit

$$\pm\sqrt{\frac{a^2(p+q+r)^2}{l^2}-4u}\ \pm\sqrt{\frac{b^2(p+q+r)^2}{l^2}-4u}\ \pm\sqrt{\frac{c^2(p+q+r)^2}{l^4}-4u}=0,$$

ce qui donne l'équation en u :

$$6u^2-\frac{(a^2+b^2+c^2)(p+q+r)^2}{l^2}+\frac{2(p+q+r)^4S^2}{l^4}=0,$$

d'où

$$u=\frac{(p+q+r)^2}{12l^2}\left[a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-48S^2}\right]. \quad (5)$$

Les équations (2) donnent aussi

$$2(p+q+r)^2+6u=\frac{(p+q+r)^2(a^2+b^2+c^2)}{l^2}, \qquad (6)$$

d'où

$$u=\frac{1}{6}(p+q+r)^2\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{l^2}-2\right]. \qquad (7)$$

En éliminant u entre (5) et (7), on obtient

$$l=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-48S^2}} \qquad (8)$$

et finalement

$$l_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3}}{2}}\right]. \qquad (9)$$

2°. Supposons que $a<b<c$. Alors h_a sera la plus grande hauteur. Pour que les valeurs de l soient admissibles, il faut et il suffit qu'elles soient plus grandes que h_a.

On trouve que $l_1>h_a$, mais $l_2<h_a$.

Par conséquent on a une solution unique, l_1.

3°. Construisons sur le côté BC le triangle équilatéral BCA_1 vers l'extérieur et le triangle équilatéral BCA_2 vers l'intérieur. On sait que

$$\overline{AA_1}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{2}},$$

$$\overline{AA_2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3}}{2}}.$$

On a donc

$$l_1=\tfrac{1}{2}\left(\overline{AA_1}+\overline{AA_2}\right), \qquad (10)$$

d'où l'on déduit une construction simple du point P.

On peut facilement remarquer qu'il y a deux point P et P_1 qui satisfont aux conditions du problème. Nous appelons ces points les *„isocentres"* du triangle.

4°. Si l'on écrit les équations (2) sous la forme

$$\left.\begin{aligned}(p+q+r)^2+2p(p+q+r)-3p^2&=a^2(p+q+r)^2:l^2\\(p+q+r)^2+2q(p+q+r)-3q^2&=b^2(p+q+r)^2:l^2\\(p+q+r)^2+2r(p+q+r)-3r^2&=c^2(p+q+r)^2:l^2\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

on trouve que les coordonnées barycentriques des isocentres sont données par les expressions:

$$(l_1\pm\sqrt{4l_1^2-3a^2}\quad,\quad l_1\pm\sqrt{4l_1^2-3b^2}\quad,\quad l_1\pm\sqrt{4l_1^2-3c^2})\quad(12)$$

5°. Voici quelques propriétées des isocentres:

1. Les isocentres et le centre de gravité du triangle sont en ligne droite.

2. La distance $\overline{PP_1}$ est donnée par l'expression

$$\overline{PP_1}^2=\frac{16}{9}\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}.$$

N. Agronomof.
Wladiwostok (Russie).

Note. Supposons que (p, q, r) sont les *coordonnées barycentriques absolues* du point P. Alors, on a l'égalité

$$p+q+r=1\quad(13)$$

et les équations (2) deviennent respectivement

$$\left.\begin{aligned}3p^2-2p-1+\frac{a^2}{l^2}&=0\\3q^2-2q-1+\frac{b^2}{l^2}&=0\\3r^2-2r-1+\frac{c^2}{l^2}&=0\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

d'où l'on déduit

$$\left.\begin{aligned}p&=\frac{l\pm\sqrt{4l^2-3a^2}}{3l}\\q&=\frac{l\pm\sqrt{4l^2-3b^2}}{3l}\\r&=\frac{l\pm\sqrt{4l^2-3c^2}}{3l}\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Si l'on ajoute, membre à membre, les rélations (15), on trouve, en tenant compte de (13):

$$\pm\sqrt{4l^2-3a^2}\pm\sqrt{4l^2-3b^2}\pm\sqrt{4l^2-3c^2}=0,\quad(16)$$

d'où l'équation qui donne l :

$$l^4 - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)l^2 + 3S^2 = 0. \qquad (17)$$

Désignons par $f(l^2)$ le premier membre de (17).

L'équation (17), du second degré en l^2, a ses racines l_1^2 et l_2^2 réelles et positives. Soit h_a la plus grande hauteur du triangle ($a < b < c$). On a successivement

$$f(h_a^2) = h_a^4 - \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)h_a^2 + 3S^2$$

$$a^4 f(h_a^2) = 16S^4 - 2(a^2+b^2+c^2)a^2S^2 + 3a^4S^2$$

$$a^4 f(h_a^2) = S^2[16S^2 - 2(a^2+b^2+c^2)a^2 + 3a^4]$$

$$a^4 f(h_a^2) = -S^2(a^2-c^2)^2 < 0,$$

résultat négatif. Par conséquent h_a^2 est compris entre les racines de l'équation (17), d'où l'on conclut que seulement la plus grande racine

$$l_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3}}{2}}\right]$$

est admissible.

En remplaçant dans les rélations (15) l par l_1, on aura les coordonnées barycentriques absolues des points P et P_1.

On doit combiner les valeurs de p, q, r, de manière que leur somme soit égale à 1 ; et cela exige que l'on n'associe pas les valeurs qui ont le même signe devant les radicaux.

V. Cristescu.

CUBURI TERMINATE CU RĂDĂCINA LOR.

(Urmare).

II. *n nepereche.* $n+1 = a \cdot 2^\alpha$, $n-1 = b \cdot 2^\beta$ $\alpha+\beta = p$.
Deducem :

$$2^{\alpha-1} \cdot a - 2^{\beta-1} \cdot b = 1. \qquad (7)$$

Prima parte nu trebuie să conţină factorul 2. Deci sau $\alpha = 1$ şi b nepereche, sau $\beta = 1$ şi a nepereche, sau α ori β nule Să examinăm pe rând aceste cazuri.

1. $\beta = 1$, $\alpha = p - \beta = p - 1$.

In acest caz avem:

$$n = a \cdot 2^{p-1} - 1, \tag{8}$$

şi înlocuind în (3) găsim:

$$a(a \cdot 2^{p-2} - 1)(a \cdot 2^{p-1} - 1) = \mathcal{M}5^p .$$

Cei trei factori din partea întâia sunt primi între ei şi deci nu se poate divide cu 5^p de cât unul din ei.

a) Fie $a = k \cdot 5^p$. Găsim:

$$n = k \cdot 5^p \cdot 2^{p-1} - 1. \tag{9}$$

Ca să îndeplinim condiţia (2) nu putem luà de cât $k = 1$ sau $k = 2$. Deci:

$$n = 5 \cdot 10^{p-1} - 1 \qquad \text{şi} \qquad n = 10^p - 1.$$

Prima dă pentru $p = 1$ pe n pereche, care nu corespunde ipotezei (II). Pentru alte valori avem:

$p =$	2;	3;	4;	5;	6.....
$5 \cdot 10^n - 1 =$	*49;*	*499;*	*4999;*	*49999;*	*499999.....*
Complimentarul =	*51;*	*501;*	*5001;*	*50001;*	*500001....,*

adică zece soluţiuni pânăla 1.000.000. A doua formulă ($n = 10^p - 1$) dă soluţiile de forma 999...9 şi singurul compliment 1, pe care le-am arătat încă dela început.

b) Fie $a \cdot 2^{p-2} - 1 = c \cdot 5^p$. Găsim:

$$2^{p-1} \cdot a - 5^p \cdot c = 1.$$

Aplicând formulele (4) şi ţinând seama de (8) găsim:

$$n = 2^{4p.5^{p-1}+1} + 2^{p-1} \cdot 5^p \cdot t - 1, \text{ sau } n = 2^{p-1} \cdot 5^p \, t - 2.5^{p.2^{p-3}} + 1. \tag{10}$$

c) Fie $a.2^{p-1} - 1 = c \cdot 5^p$. Găsim:

$$2^{p-1} \cdot a - 5^p \cdot c = 1.$$

Procedând ca mai sus găsim:

$$n = 2^{4(p-1)5^{p-1}} + 2^{p-1} \cdot 5^p \, t - 1, \text{ sau } n = 2^{p-1} \cdot 5^p \, t - 5^{p.2^{p-2}}. \tag{11}$$

Se va luà t aşà ca să satisfacă condiţiilor (2).

2. $\alpha = 1$, $\beta = p - \alpha = p - 1$.

In acest caz avem:

$$n = b \cdot 2^{p-1} + 1. \qquad (12)$$

şi înlocuind în (3) găsim:

$$b(b \cdot 2^{p-2} + 1)(b \cdot 2^{p-1} + 1) = \mathcal{M}.5^p.$$

Cei trei factori din prima parte fiind primi între ei, numai unul se va divide cu 5^p.

a) Fie $b = k \cdot 5^p$. Găsim:

$$n = k \cdot 5^p \cdot 2^{p-1} + 1.$$

Condiţia (2) arată că nu putem luă decât $k = 1$ şi avem:

$$n = 5 \cdot 10^{p-1} + 1. \qquad (9)$$

Această soluţie este complimentară cu prima dată la (II. 1. *a*) şi deci nu o mai considerăm.

b) Fie $b \cdot 2^{p-2} + 1 = c \cdot 5^p$. Găsim:

$$5^p \cdot c - 2^{p-2} \cdot b = 1.$$

Aplicând formulele (4) găsim:

$$n = 2 \cdot 5^{p \cdot 2^{p-3}} + 5^p \cdot 2^{p-1} \cdot t - 1 \qquad \text{sau}$$

$$n = 2^{p-1} \cdot 5^p t - 2^{4(p-2) \cdot 5^{p-1}+1} + 1. \qquad (10')$$

Dacă luăm t negativ la prima şi o adunăm cu a doua din formulele dela (10), se vede că suma soluţiilor este $\mathcal{M}.10^p$. Reţinem dar numai formula:

$$n = (2 \cdot 5^{p \cdot 2^{p-3}} - 1) - 5 \cdot 10^{p-1} \cdot t. \qquad (13)$$

Din aceasta scoatem următoarea regulă:

Se obţin soluţiuni neperechi terminate prin 9, luând ultimele p *cifre ale numărului* $(2 \cdot 5^{p \cdot 2^{p-3}} - 1)$. *Prima cifră dela stânga o mai putem mări cu 5, dacă este sub 5, sau micşorà cu 5, dacă trece peste 5.*

Procedând astfel găsim următoarele soluţiuni până la 1000000:

$p =$	3;	3;	4;	4;	5;	5;	6;	6;
$n =$	*249*;	*479*;	*1249*;	*6249*;	*31249*;	*81249*;	*781249*;	*281249*;
Complimentarul =	*751*;	*251*;	*8751*;	*3751*;	*68751*;	*18751*;	*2187 1*;	*718751*.

Avem astfel şasesprezece soluţii până la 1000000.

c) Fie $b \cdot 2^{p-1} + 1 = c \cdot 5^p$. Găsim că:

$$5^p \cdot c - 2^{p-1} \cdot b = 1$$

şi ca mai sus avem:

$$n = 5^{p \cdot 2^{p-2}} + 5^p \cdot 2^{p-1} t, \quad \text{sau}$$

$$n = 2^{p-1} \cdot 5^p \cdot t - 2^{4(p-1) \cdot 5^{p-1}} + 1 \qquad (11')$$

Aceste valori sunt complimentare cu cele date de (11) şi nu ne dau soluţii noi. Putem luà ca formule nouă prima din acestea cu t negativ, adică:

$$n = 5^{p \cdot 2^{p-2}} - 5 \cdot 10^{p-1} t.$$

De acì scoatem următoarea regulă:

Găsim soluţiuni neperechi terminate prin 5, luând ultimele p *cifre ale numărului* $5^{p \cdot 2^{p-2}}$. *Prima cifră dela stânga o mai putem mări cu 5, dacă este sub 5, sau micşorà cu 5, dacă trece peste 5.*

Găsim astfel soluţiile pânăla 1000000.

$p =$ 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6;

$n =$ 25; 625; 125; 0625; 5625; 90625; 40625; 390625; 890625;

Complimentarul *75; 375; 875; 9375; 4375; 09375; 59375; 609375; 109375;*

la care alăturând şi soluţia evidentă 5, găsim şaptesprezece soluţii noi.

3. $\beta = 0$, $\alpha = p$, $n = a \cdot 2^p - 1$.

Relaţia (3) ne dă;

$$a(a \cdot 2^p - 1)(a \cdot 2^{p-1} - 1) = M \cdot 5^p.$$

Unul singur din cei trei factori din partea întâia se divid cu 5^p.

a) Fie $a = 5^p \cdot c$. Deci

$$n = 10^p \cdot c - 1.$$

Nu putem luà decât $c = 1$. Dăm peste soluţia indicată la început.

b) Fie $a \cdot 2^p - 1 = c \cdot 5^p$. Pocedând ca în cazurile anterioare, găsim:

$n = 2^{4p \cdot 5^{p-1}} + 10^p \cdot t - 1$, sau $n = 10^p t - 5^{p \cdot 2^{p-1}}$, (10″)

care nu sunt decât formulele (10) cu t pereche.

c) Fie $a2^{p-1} - 1 = c.5^p$. Găsim:

$$n = 2^{4p.5^{p-1}+1} + 10^p t - 1, \quad \text{sau}$$

$$n = 10^{pt} - 2.5^{p.2^{p-2}} - 1. \qquad (11'')$$

care nu sunt decât formulele (11) cu t pereche.

4. $\alpha = 0, \quad \beta = p, \quad n = b.2^p + 1.$

Relaţia (3) ne dă:

$$b(b.2^p + 1)(b.2^{p-1} + 1) = \mathcal{M}5^p.$$

Avem şi aci trei cazuri:

a) Fie $b = 5^p.c$. Acesta dând $n > 10^p$ nu convine nici pentru $c = 1$.

b) Fie $b.2^p + 1 = c.5^p$. Găsim:

$$n = 5^{p.2^{p-1}} - 10^p t, \qquad n = 10^p t - 2^{4p.5^{p-1}}, \qquad (10''')$$

care sunt cele date de (10'').

c) Fie $b.2^{p-1} - 1 = c.5^p$. Găsim:

$$n = 2.5^{p.2^{p-1}} - 10^p t - 1, \quad \text{sau} \quad n = 10^p t - 2^{4(p-2).5^{p-1}+1} + 1 \qquad (11''')$$

care sunt date de (11'').

Recapitulând, găsim că problema admite pânăla 1000000 următoarele soluţii de cuburi, rădăcina lor fiind scrisă cu litere grase:

1; 64; 125; 216; 729; 13824; 15625; 117649; 132651; 421875; 438976; 970299; 1953**125**; 15438**249**; 15813**251**; 52734**375**; 53157**376**; 124251**499**; 125751**501**; 242970**624**; 244140**625**; 420189**749**; 423564**751**; 669921**875**; 997002**999**; 1948441**249**; 53151673**751**; 83740234**375**; 124924014**999**; 125075015**001**; 177978515**625**; 244023456**249**; 670151588**751**; 823974609**375**; 824238309**376**; 999700029**999**; 659285161**8751**; 30514648531**249**; 67047119140**625**; 124992499**949999**; 125007500**150001**; 9320008359**375**; 324965351**768751**; 536357148**681249**; 744268574**490624**; 74429321**890625**; 99997000**299999**; 130844162**109375**; 1308477051**109376**; 10467672852**218751**; 22247077149**281249**; 59604644775**390625**; 124999249999**499999**; 125000750001**500001**; 226284027099**609375**; 378496949456**718751**; 477735327150**781249**; 706454437500**890624**; 706456817136**890625**; 99999700002**999999**.

Pânăla 1000000 sunt deci 60 cuburi care se termină cu rădăcina lor.

E. Ştefănescu.

Notă. Articole tratând aceiaşi chestiune ne-au mai fost trimise de O. POPEA, care reduce chestiunea la găsirea penultimei reduse a fracţiei continul de forma $2^n/5^n$, $2^{n-1}/5^n$; $2^{n-2}/5^n$, şi de D-l G. TAILER, care exprimă soluţiile cu ajutorul simbolului lui LEGENDRE $E(x)$. D-lor nu a dat însă reguli precise pentru calculul soluţiilor ca D-l E. ŞTEFĂNESCU, nici nu au avut răbdare să dea soluţii numerice numeroase ca D-sa.

Pentru patrate problema a fost publicată şi în *Gazeta Matematică.*

Cu chestiunea aceasta s'au mai ocupat şi alţi amatori ai numerelor. Astfel în *Periodico di matematica* Vol. XXVI, lunie, pag. 206 *Paolo Cattaneo* dă şi numerele de 14 cifre:

19836425781249 ; 40081787109375 ; 40081787100376 ; 59918212890624 ; 59918212890625 ; 80163574218751.

I. I.

PROPRIETĂŢI ALE TRIUNGHIULUI.

Fie ABC un triunghiu oarecare, A'B'C' şi $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic şi complimentar. Prin punctele A_1, B_1, C_1 se duc paralele respectiv la laturile B'C', C'A', A'B' care se întretaie în A_2, B_2, C_2.

Fie apoi A"B"C" triunghiul tangenţial al triunghiului ABC şi O, H, O_9, G, centrul cercului circumscris, ortocentrul, centrul cercului celor nouă puncte şi baricentrul triunghiului fundamental ABC.

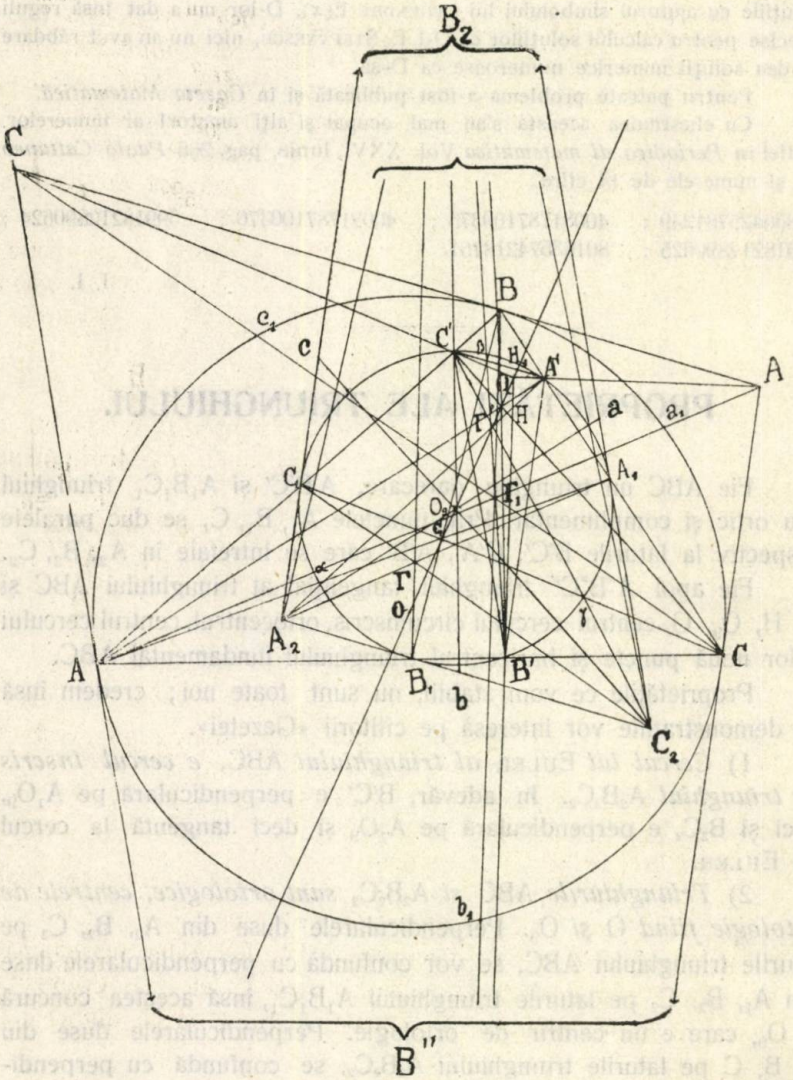
Proprietăţile ce vom stabili, nu sunt toate noi; credem însă că demonstraţiile vor interesă pe cititorii «Gazetei».

1) *Cercul lui* EULER *al triunghiului* ABC, *e cercul înscris în triunghiul* $A_2B_2C_2$. In adevăr, B'C' e perpendiculară pe A_1O_9, deci şi B_2C_2 e perpendiculară pe A_1O_9 şi deci tangentă la cercul lui EULER.

2) *Triunghiurile* ABC *şi* $A_2B_2C_2$ *sunt ortologice, centrele de ortologie fiind* O *şi* O_9. Perpendicularele duse din A_2, B_2, C_2 pe laturile triunghiului ABC, se vor confundă cu perpendicularele duse din A_2, B_2, C_2 pe laturile triunghiului $A_1B_1C_1$, însă acestea concură în O_9, care e un centru de ortologie. Perpendicularele duse din A, B, C pe laturile triunghiului $A_2B_2C_2$, se confundă cu perpendicularele coborîte din A, B, C pe B'C', C'A', A'B' şi vor concură deci în O.

3) *Dreptele* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *concură în punctul lui* GERGONNE Γ, *al triunghiului* $A_2B_2C_2$. Aceasta rezultă din proprietatea 1)

căci A_1, B_1, C_1 sunt punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul $A_2B_2C_2$, cu laturile lui.



4) *Dreptele care unesc vârfurile triunghiului* $A_2B_2C_2$ *cu punctele* α', β', γ', *unde cercul lui* EULER O_9 *taie a doua oară înălțimile triunghiului* ABC, *concură în punctul lui* NAGEL *al triunghiului* $A_2B_2C_2$. Aceasta rezultă din aceea că punctele α', β', γ'

sunt diametral opuse punctelor de contact A_1, B_1, C_1 ale cercului înscris în triunghiul $A_2B_2C_2$. Se mai ştie, după teorema lui KARIYA, că acest punct se află pe *hiperbola lui* FEUERBACH a triunghiului $A_2B_2C_2$.

5) *Centrul de omotetie al triunghiurilor* $A_2B_2C_2$ şi $A'B'C'$ *e inversul punctului lui* GERGONNE Γ', *al acestor două triunghiuri şi e situat pe dreapta lui* EULER *a triunghiului* ABC. In adevăr, cercul lui EULER O_9 fiind cercul înscris în triunghiul $A_2B_2C_2$, A_2A' e isogonala lui AA_1 în triunghiul $A_2B_2C_2$, de oarece A_1 şi A' sunt egal depărtate de perpendiculara A_2O_9, care e bisectoară în triunghiul $A_2B_2C_2$. Rezultă deci că dreptele A_2A_1, B_2B, C_2C_1 concură în *inversul punctului lui* GERGONNE, care fiind centrul de omotetie al triunghiurilor $A_2B_2C_2$ şi $A'B'C'$, se va bucură de aceiaşi proprietate şi în triunghiul $A'B'C'$; însă se ştie că acest punct e situat pe dreapta OH.

Tot din această proprietate mai deducem că:

6) *Centrul cercului circumscris triunghiului* $A_2B_2C_2$ *se află tot pe dreapta* OH, această dreaptă fiind omoloagă în triunghiurile $A_2B_2C_2$ şi $A'B'C'$.

7) *Dacă însemnăm cu* α, β, γ *punctele unde medianele taie a doua oară cercul lui* EULER, *grupurile de puncte:*

$$(A', A_2, \alpha); (B', B_2, \beta); (C', C_2, \gamma)$$

sunt colineare. In adevăr se ştie *) că α se află pe A_2A'.

8) *Raportul de asemănare al triunghiurilor* $A'B'C'$ *şi* $A_2B_2C_2$ *e* $4\cos A\cos B\cos C$. In adevăr, raportul de asemănare va fi egal cu raportul razelor cercurilor înscrise, care sunt

$$r' = 2R\cos A\cos B\cos C \quad \text{şi} \quad r_2 = R:2.$$

9) *Triunghiurile* $A_2B_2C_2$ *şi* $A''B''C''$ *sunt omotetice, centrul de omotetie fiind* G, *iar raportul de omotetie 1 : 2.* Se ştie că AO e perpendiculară pe $B'C'$, deci şi pe B_2C_2; dar AO e perpendiculară şi pe $B''C''$; deci $B''C''$ şi B_2C_2 sunt paralele, etc. Dar dreptele care unesc punctele omoloage A şi A_1, B şi B_1, C şi C_1 din cele 2 tri-

*) A se vedea: *Gazeta Matematică*, Vol. XXX, problema 3164 p. 227 şi 228.

unghiuri, concură în G, care deci e centrul de omotetie. Raportul de omotetie e:

$$AG : \overline{A_1G} = 2.$$

De aici se vede că:

10) *Orice puncte omoloage din cele două triunghiuri, sunt puncte complimentare în triunghiurile* ABC *şi* $A_1B_1C_1$. De ex.: punctele lui Gergonne Γ şi Γ_1 ale triunghiurilor $A_2B_2C_2$ şi $A''B''C''$, sunt coliniare cu G şi $2G\Gamma = G\Gamma_1$.

Tot din această proprietate se mai deduce că:

11) *Centrul cercului circumscris triunghiului* $A''B''C''$ *e situat pe dreapta* OH *).

12) *Punctele lui* Gergonne *ale triunghiurilor* $A_2B_2C_2$ *şi* $A''B''C''$ *sunt punctele lui* Lemoine *ale triunghiurilor* $A_1B_1C_1$ *şi* ABC. Punctele A″, B″, C″ sunt asociatele armonice ale punctului lui Lemoine al triunghiului ABC, deci AA″, BB″, CC″ sunt *simedianele* triunghiului ABC. La fel A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 vor fi simedianele triunghiului complimentar $A_1B_1C_1$.

13) *Dreptele* A_1O_9 *şi* AA″ *şi analoagele lor, se întâlnesc pe laturile triunghiului ortic* A′B C′. Se ştie că simediana AA″ trece prin mijlocul laturei B′C a triunghiului ortic, pe unde trece şi raza A_1O_9 a cercului celor nouă puncte a triunghiului ABC. Deci grupurile de drepte $(A_1O_9, AA'', B'C')$; $(B_1O_9, BB'', C'A')$; etc. sunt concurente.

14) *Triunghiurile* A′B′C′ *şi* $A''B''C''$ *sunt omotetice, iar centrul de omotetie e situat pe dreapta lui* Euler *a triunghiului* ABC. Laturile triunghiului $A''B''C''$ fiind perpendiculare pe OA, OB, OC vor fi paralele cu laturile triunghiului A′B′C′. Dar H şi O fiind puncte omoloage în triunghiurile A′B′C′ şi $A''B''C''$, raportul de omotetie este egal cu $\overline{HA'} : \overline{OA''}$. Avem însă $HA' = 2R \cos B \cos C$, $OA'' = R : \cos A$; deci raportul de omotetie este: $2 \cos A \cos B \cos C$.

Cum însă dreapta lui Euler uneşte două puncte omoloage în cele 2 triunghiuri (O şi H), rezultă că centrul de omotetie se va găsi pe această dreaptă **) şi o va împărţi în raportul

$$2 \cos A \cos B \cos C.$$

*) A se vedeà *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, problema 2639, p. 223 şi Rouché et de Comberouse, *Géométrie plane*, Nouvelle édition, p. 506, chestiunea propusă 26.

**) A se vedeà şi *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, problema 2639, pag. 220 şi 223 şi A. Gob, *Sur la droite et le cercle d'Euler*, *Mathesis* 1889, supplément.

Acest rezultat ne arată că centrul de omotetie al triunghiurilor A'B'C' şi A"B"C" este punctul Q din problema 3265 «*G. M.*», Vol. XXX, pag. 354, adică *inversul reciprocului ortocentrului* H al triunghiului ABC. Din această proprietate se mai pot deduce altele, dacă ţinem seamă de enunţurile problemelor 3265 şi 3234.

15) *Punctele corespunzătoare de intersecţie ale laturilor respective din triunghiurile* $A_2B_2C_2$ *şi* $A_1B_1C_1$ *(sau* A"B"C" *şi* ABC), *unite cu* O_9 *(sau cu* O), *sunt perpendiculare pe* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *(sau* AA", BB", CC"). Laturile triunghiului $A_2B_2C_2$ fiind simedianele exterioare ale triunghiului $A_1B_1C_1$, punctele de intersecţie ale laturilor corespunzătoare din triunghiurile $A_2B_2C_2$ şi $A_1B_1C_1$ se vor află pe dreapta lui LEMOINE a triunghiului $A_1B_1C_1$, ale cărei intersecţii cu laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt centrele cercurilor lui APOLLONIUS a acestui triunghiu. Insă se ştie că axele radicale ale cercurilor lui APOLLONIUS cu cercul O_9, circumscris unui triunghiu oarecare $A_1B_1C_1$, sunt simedianele acestui triunghiu *), care sunt perpendiculare pe liniile centrelor, şi sunt tocmai dreptele de mai sus. Aceeaşi demonstraţie şi pentru triunghiurile ABC şi A"B"C".

16) *Dacă însemnăm cu* a_1, b_1, c_1 *punctele unde simedianele triunghiului* ABC *taie a doua oară cercul circumscris, tangenta în* a_1 *la cercul circumscris, laturile* BC *şi* B"C" *concură pe dreapta lui* LEMOINE *a triunghiului* ABC. Această proprietate se deduce foarte uşor din precedenta. Ea e adevărată şi pentru triunghiul $A_1B_1C_1$.

17) *Punctele lui* FRANKE *ale triunghiurilor* ABC *sau* $A_1B_1C_1$ *sunt inversele punctelor lui* KARIYA *ale triunghiurilor* $A_2B_2C_2$, A'B'C', A"B"C", căci locul punctelor lui FRANKE ale triunghiurilor ABC sau $A_1B_1C_1$ *e dreapta lui* EULER OH a acestor triunghiuri, iar locurile punctelor lui KARIYA ale triunghiurilor $A_2B_2C_2$, A'B'C' sau A"B"C", sunt *hiperbolele lui* FEUERBACH ale acestor triunghiuri, care sunt transformatele prin puncte inverse ale dreptei care uneşte centrele cercurilor circumscrise şi înscrise ale acestor triunghiuri (dreapta OH).

CONST. C. POPOVICI.
Elev în Clasa VIII, Liceul Internat, Iaşi.

*) ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, *Géométrie plane*, nouvelle édition, p. 473.

NOTE MATEMATICE

60. *Alte zece algebre diverse.* (Vezi Nota 94, pag. 130).

71. **Abstractă.** Vezi *Iullien Pacotle.* La pensée mathématique contemporaine. Pag. 21.

72. **Clasică.** Idem. Pag. 93.

73. **Ecuaţiilor.** Idem. Pag. 36.

74. **Elemente.** (A două...) Vezi *Bulletin of the American mathematical Society.* Anul XXX. Pag. 194.

75. **Elemente.** (A trei...) Idem. Pag. 205.

76. **Euleriană.** Idem. Pag. 193.

77. **Matricelor.** Idem. Pag. 248.

78. **Medie.** *P. Wijdenes.* Middel-Algebra. Groniuga 1921.

79. **Quaternionilor.** Ca la No. 74. Pag. 250.

80. **Sub (algebra).** Subalgebra. Idem. Pag. 250.

(Va urmà). I. IONESCU.

61. *Asupra Numărului special cu probleme nerezolvate:* Soluţiunile primite la problemele următoare fiind neîndestulătoare, se vor considerà ca nerezolvate:

I. I.

No. 1807. Printre triunghiurile dreptunghice de aceeaşi arie, care este acela in care suma medianei, înălţimii şi bisectoarei ce pleacă din vârful unghiului drept, este cea mai mare? Când ele sunt laturile unui triunghiu de arie cât mai mare?

I. IONESCU.

No. 2223. Există cuburi gemene?

I. IONESCU.

No. 2338. Care este forma generală a ecuaţiilor de gradul II cu două variabile x, y, care pot reprezentà elipse, iperbole şi drepte, dar nici de cum parabole?

I. IONESCU.

No. 2382. Câte fracţii ordinare cu numărătorul 1 sunt echivalente cu fracţii zecimale periodice mixte, având zece cifre la partea neperiodică şi una la partea periodică?

I. IONESCU.

No. 2405. Se dau două axe dreptunghiulare OX, OY. Pe ordonatele corespunzătoare lui $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$ se consideră segmentele coprinse între ordonatele $(-1, +1)$; $(-2, -1)$; $(-2, -1)$; $(-1, +1)$; $(+1, +2)$; $(+1, +2)$; $(-1, +1)$; $(+1, +2)$; $(-2, -1)$; $(-1, +1)$; $(-1, +1)$. Care este gradul cel mai mic al unei curbe algebrice care poate intersectă toate cele 11 segmente?

I. Ionescu.

No. 2416. La un cerc sunt tangente n cercuri egale, tangente între ele două câte două. Ce relațiune există între razele lor?

I. Ionescu.

62. *O proprietate a patratelor și cuburilor.* Sub acest titlu, d-l Gh. Vasiliu publică în «G. M.» Vol. XXXI pag. 29, o notă în care pune pe n^2 și pe n^3 în funcție de n și $n-1$. Acea notă a fost generalizată apoi de d-l I. Niculescu-Dobridor la pag. 250. Plecând dela identitatea

$$n = (n-1) + 1$$

și aplicând formula binomului, se poate pune orice putere a lui n numai în funcție de $n-1$. Astfel avem succesiv

$$n = (n-1) + 1$$

$$n^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1$$

$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$n^4 = (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

. . . . . .

Plecând dela identitatea

$$n = (n+1) - 1,$$

se pot găsi formule analoage pentru valoarea unei puteri a lui n, în funcție de $n+1$.

Col. Gh. Buicliu.

63. *Asupra problemei 3346.* La datele bibliografice asupra acestei probleme, cuprinse în nota dela pagina 309, trebue adăogat

că proprietatea care face obiectul problemei, rezultă şi din proprietăţile cuprinse în chestiunea propusă sub Nr. 46 la pag. 510 a uvrajului: ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, *Géométrie plane, nouvelle édition.*

N. I. MANOLESCU.
Elev Liceul Unirea, Focşani.

64. *Asupra problemei 3367.* Problema subsistă şi în cazul unui patrulater oarecare, rezolvându-se ca şi pentru triunghiu. Avem astfel următorul enunţ şi rezultat:

Se împart laturile patrulaterului ABCD în acelaş raport $m:n$, mergând în acelaş sens. Fie A_1, B_1, C_1, D_1 punctele astfel căpătate respectiv pe laturile BC, CD, DA, AB. Procedăm la fel cu patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$, împărţind laturile sale tot în raportul $m:n$, etc. Fie S, S_1, S_2, S_3,... ariile patrulaterelor ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, etc. Limita sumei

$$\lim_{p=\infty}(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_p+\ldots)=S\cdot\frac{m^2+n^2}{2mn}.$$

RÉNÉ I. SPATHY.

65. *Asupra problemei 3247.* Să considerăm ecuaţia mai generală:

$$\arcsin x+\operatorname{arc\,tg}x=k.$$

Cum avem:

$$\arcsin x=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

urmează că ecuaţia se mai poate scrie:

$$\frac{x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}=\operatorname{tg}k,$$

sau:

$$f(x)\equiv x^4(1+\operatorname{tg}^2k)+x^2\operatorname{tg}^2k+2x\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}^2k=0.$$

Această ecuaţie se pretează uşor oricărei rezolvări pentru diferitele valori ale lui k, căci dela început se observă că:

$$f(1)>0, \qquad f(0)<0 \qquad \text{şi} \qquad f(-1)>0,$$

atunci când $k \neq 0$ şi $\pi/4$.

1) Pentru: $k = \pi\alpha$ ($\alpha = 0$ este cazul problemei 3247), avem ecuaţia:

$$x^4 = 0.$$

2) Pentru: $k = \pi\alpha \pm \pi/4$, avem ecuaţiile:

$$2x^4 + x^2 \pm 2x - 1 = 0,$$

care se mai pot scrie:

$$(x+1)(2x^3 - 2x^2 + 3x - 1) = 0$$

şi

$$(x-1)(2x^3 - 2x^2 + 3x + 1) = 0,$$

ceeace ne dă deodată:

$$x = \mp 1.$$

3) Pentru $k = \pi\alpha \pm \pi/2$, avem ecuaţia:

$$x^4 + x^2 - 1 = 0,$$

a cărei soluţie reală este numai:

$$x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

O verificare a acestui caz.

Se ştie că:

$$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v = \frac{\pi}{2},$$

când: $u.v = 1$, ori:

$$u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{şi} \qquad v = x,$$

unde înlocuind cu rădăcina dată avem:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{6-3\sqrt{5}}} = 1,$$

ori:

$$(-1+\sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}.$$

CĂP. I. LINTEŞ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN BUCUREŞTI.

Anul I. (Secţiunea A).

Epura de examen (sesiunea 1926).

Titlul exterior: Suprafeţe de revoluţie. Titlul interior: Sferă şi Cilindru. Cadrul obicinuit (250/400). Linia pământului paralelă cu laturile mici ale cadrului, aşezată la 240 mm. sub laturea de sus.

Se dă:

1. *O sferă* tangentă la cele două plane de proecţie, de centru OO', raza = 80 mm. Linia de ordine OO' se află la egală distanţă de laturile lungi ale cadrului.

2. *Un cilindru de revoluţie* a cărui axă trece prin punctul cel mai de sus al sferei, este paralelă cu planul vertical de proiecţie şi face un unghiu de 65°, spre stânga, cu planul orizontal de proiecţie. Generatoarea sa de contur aparent vertical din dreapta, este tangentă la conturul aparent vertical al sferei.

Se cere să se afle intersecţia acestor două solide.

Se vor determină puncte curente, tangenta într'un punct, punctele pe conturele aparente orizontal şi vertical ale sferei şi cilindrului, punctul dublu, punctele duble în proiecţie orizontală (acestea din urmă facultativ).

Se va reprezentă *Solidul comun.*

Datele în negru, liniile de construcţii în roşu, curba de intersecţie în albastru. Părţile scoase în negru mixt — · — · — · —

Se va anexă la epură o legendă, explicând procedeele adoptate şi mersul construcţiilor. Se va arătă după ce fel de curbă se proiectează intersecţia în planul vertical.

Anul I. (Secţiile B, C şi E).

Epura de examen (sesiunea 1926).

SFERĂ ŞI CILINDRU.

Cadrul obicinuit (250/400). Linia pământului la mijlocul cadrului, paralelă cu laturile mici.

Se dă:

1. *O sferă* tangentă la planul orizontal de proecţie. Raza = 80 mm. Linia de ordine OO' a centrului, coincide cu axa cadrului. Depărtarea centrului este de 120 mm.

2. *Un cilindru drept vertical* având ca bază un cerc în planul orizontal de proecţie, de rază 60 mm. Centrul ω al acestui cerc are depărtare de 94 mm.,

iar distanţa sa dela latura din stânga a cadrului este de 114 mm. Inălţimea cilindrului este de 180 mm.

Se cere:

Să se afle curba intersecţie a celor două solide.

Se vor determină puncte curente, precum şi punctele de pe conturele aparente ale celor două solide. Se va construi tangenta într'un punct. Se va reprezentă *Sfera ştirbită de cilindru.*

Datele în negru, construcţiile în roşu, curba intersecţie în albastru.

Părţile scoase ale sferei, precum şi părţile exterioare ale cilindrului în trăsături negre mixte — · — · — · —

Se va anexà o legendă, explicând procedeele adoptate şi mersul construcţiilor.

FACULTATEA DE ŞTIINŢE, CLUJ.

Seziunea Iunie 1926.

TEORIA FUNCŢIUNILOR p. II.

Proba teoretică.

I°. Se consideră integrala

$$A_n = \frac{x^{n-p}}{2\pi i} \int_C \frac{z^p\, e^{z-x}}{(z-x)^{n+1}}\, dx,$$

n şi p fiind numere întregi pozitive sau negative, iar C, cercul cu centrul în origină şi cu raza $R > |x|$.

Se cere:

1. Să se arate că A_n este un polinom de gradul n în x, a cărui formă explicită se cere.

2. Luând pe R suficient de mare, să se arate că avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n A_n(x) = (1+\alpha)^p e^{\alpha x}.$$

II°. Se cere modulul şi argumentul expresiei

$$(1 + e^{i\varphi})^{a+ib},$$

unde a şi b sunt numere reale şi $-\pi < \varphi < \pi$.

Proba practică.

Să se calculeze integrala

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz^2}\, dz}{z^4 + 1},$$

Γ fiind sfertul de cerc AB cu centrul în origină şi cu raza $R > 1$. Să se deducă de aici valoarea integralei

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2 - \sin x^2}{x^4 + 1}.$$

APLICAŢIUNI GEOMETRICE.

Proba teoretică.

Se consideră suprafaţa riglată $z = x \operatorname{tg} y$.

1°. Să se scrie ecuaţiunile generatoarei drepte.

2°. Să se scrie ecuaţia diferenţială a liniilor asimtotice şi să se integreze.

3°. Să se calculeze pentru linia asimtotică nerectilinie: razele de curbură şi de torsiune şi să se deducă că cele 2 familii de linii asimtotice sunt formate respectiv din linii drepte şi din elice circulare.

4°. Să se scrie ecuaţia planului osculator într'un punct oarecare al unei linii asimtotice elice şi să se verifice că acest plan e tangent la suprafaţă în punctul considerat.

5°. Să se scrie ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură.

6°. Să se calculeze curbura totală a suprafeţei într'un punct oarecare.

(Timpul acordat: 4 ore).

Proba practică.

Se consideră iperbola: $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Să se afle: normala într'un punct oarecare, raza de curbură, desfăşurata şi lungimea unui arc de curbă cuprins între două limite oarecare (t_0 şi t_1).

(Timpul acordat: 2 ore).

MATEMATICI GENERALE.

Proba teoretică.

1. Să se studieze variaţia funcţiunii

$$y = \frac{2x^3 + 5x^2}{(x+4)^2}.$$

2. Să se integreze ecuaţiunea diferenţială

$$(x^3 + 1)y' = 3x^2 \cdot y + (2x - e^{-x})(x^3 + 1)^2.$$

Proba practică.

1. Să se calculeze integrala

$$\int_0^{+1} \frac{(x^2-3)\,(x^3-16)}{(x+2)^2\,(x^2+9)}\,dx.$$

2. E ora 12. Un aeroplan e semnalat la 50 km depărtare. El vine cu 100 km pe oră în linie dreaptă, deasupra unei baterii antiaeriene şi se menţine la o înălţime de 568,98 metri.

Bateria are la dispoziţie un tun care poate aruncă o ghiulea vertical cu viteza iniţială de 294,3 m pe secundă.

La ce oră trebuie trasă lovitura, pentru ca ghiuleaua să loviască aeroplanul?

Ce viteză are ghiuleaua în momentul întâlnirii? (Nu se ţine seamă de rezistenţa aerului).

ANALIZA MATEMATICĂ p. II.

Proba teoretică.

Se dă ecuaţia diferenţială

$$yy'' - y'^3 = y^2(\log y - x)$$

şi se cere:

1. Să se facă schimbarea de funcţiune $y = ze^x$.
2. Să se integreze ecuaţia in z.
3. Să se deducă din forma integralei generale, ce schimbare de variabilă ar trebui făcută, pentru ca ecuaţia dată să se transforme într'o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţii constanţi.

Proba practică.

Să se găsiască suprafeţele, pentru care suma algebrică a segmentelor determinate de planul tangent pe cele trei axe, este constantă.

MECANICA RAŢIONALĂ p. I.

Proba teoretică.

1°. Un punct material descrie o traectorie sub acţiunea unei forţe centrale, forţa e funcţie numai de distanţa la punctul central. Să se arate:

1. Dacă se cunoaşte ecuaţia traectoriei $r = f(\theta)$, r şi θ fiind coordonatele polare ale punctului material, să se arate cum se poate determină forţa.

2. Dacă se cunoaşte forţa, să se arate că r şi θ se pot determină numai prin cuadraturi în funcţie de timp, de asemenea şi traectoria.

Aplicație. 1. Ecuația curbei fiind $r = a(1 + \cos\theta)$, să se găsiască legea forței.

2. Forța $F = -\frac{12a^2\lambda^2}{r^4}$; la momentul inițial $r_0 = 2a$, $\theta_0 = 0$, iar $v_0 = \lambda a$ și e perpendiculară pe raza vectoare. Să se studieze mișcarea și să se găsiască traectoria.

Proba practică.

Un punct material greu ($g = 10m$ pe secundă), e aruncat pe verticală în sus cu o viteză inițială de $10m$ pe secundă și se opune o rezistență mgv. Să se găsiască înălțimea la care se urcă mobilul, timpul întrebuințat pentru a-l parcurge și travaliul greutății și al rezistenței.

ALGEBRA SUPERIOARA.

Proba teoretică.

Se consideră ecuația

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 16x + 24 = 0.$$

1. Să se rezolve, știind că are 2 rădăcini a căror sumă e zero.
2. Să se calculeze cele patru rădăcini cu două zecimale exacte.
3. Să se calculeze cu o zecimală exactă, rădăcinile obținute, egalând cu zero, respectiv derivata întâia și a doua a lui $f(x)$.
4. Să se reprezinte grafic variația funcțiunei

$$y = f(x),$$

indicând și punctele de inflexiune.

Proba practică.

1. Să se calculeze cu trei zecimale exacte rădăcinile pozitive ale ecuației:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 10x + 6 = 0.$$

2. Să se calculeze suma seriei

$$\sum \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ.

Instrucția a două cilindre. Cadrul are dimensiunile orizontale și verticale de 270 mm și 420 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală, la distanța de 180 mm de sus în jos. Cilindrul C, are ca bază, în planul orizontal, cercul cu centrul în O(60, 88, 0) de rază 22 mm, iar generatoarele fac în orizontal și vertical cu linia de pământ, unghiurile α și β, astfel că $\operatorname{tg}\alpha = {}^2/_7$, $\operatorname{tg}\beta = {}^5/_7$. Cilindrul C_1 are ca bază, în planul orizontal, cercul cu centrul în O_1 (168, 130, 0), de rază 38 mm, iar generatoarele fac în orizontal și vertical cu linia de pământ, unghiurile α_1 și β_1, astfel că $\operatorname{tg}\alpha_1 = {}^9/_2$, $\operatorname{tg}\beta_1 = {}^5/_2$.

BIBLIOGRAFIE.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul C. No. 4—6. Octomvrie-Decemvrie 1925. Buenos-Aires. Investigaţiuni moderne asupra *geometriei complexe* in planul real, de F. PINGSDORF. Mişcarea apei in canale şi conducte şi calculul lor, de O. SCHMIEDEL. Estimaţiuni numerice ale evenimentelor istorice, de A. MAC DONALD. Soarele şi pământul, de O. SCHMIEDEL.

E. CHAUDET. *La evolucion de la astronomia.* Buenos-Aires 1926. (Publicată cu ocazia cincuantenarului Societăţii Ştiinţifice Argentine).

T. CARLEMAN. *Les fonctions quasi analytiques.* Paris. Gauthier-Villars & C-ie. Paris 1926.

Curierul matematic. Anul II. No. 4. Iunie 1926. Bucureşti (litografiat). Asupra unor puncte colineare, de T. POPOVICIU.

Mathesis. Tomul XL. No. 5. Mai 1926. Bruxelles. Asupra geometriei triunghiului şi tetraedrului, de CL. SERVAIS. Asupra generalizării la tetraedru a unei teoreme a lui NOYER-DROZ FARNY, de R. GOORMAGHTIGH. Note de geometrie analitică, de AD. M.

Journal des mathématiques élémentaires publicat de H. VUIBERT. Anul 50. No. 17 şi 18. Iunie 1926. Paris.

Revista matematică din Timişoara. Anul VI. No. 4. Iunie 1926. Timişoara. Teoreme remarcabile din geometria triunghiului, de M. GRÜNBAUM.

Revista Ştiinţifică. „V. ADAMACHI". Vol. XII. No. 3. Mai 1926. Iaşi. Asupra infinitului matematic, de P. SERGESCU. CAMILLE FLAMARION, de MITU ZWIBEL.

CERERI.

139. De unde şi cu ce sumă mi-aşi puteà procurà *Geometria triunghiului,* de D-l N. BLAHA.

T. G. COCEA.
(Liceul Piteşti).

Răspuns la cererea No. 133. La pagina 245, Vol. I. Ediţia II, se dă pentru 332 patratul 100224, in loc de 110224 şi pentru 333 patratul 100889, in loc de 110889.

V. C. POPESCU.
(Lc. Târgul Mureş).

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2641. *Să se afle suma produselor două câte două a primelor* n *numere divizibile prin 7.*

I. VELLESCU.

Fie în general un divizor p. Primele n numere divizibile cu p sunt $1.p$; $2.p$; $3.p$; $4.p$; .... ; np. Produsul lor două câte două va conţine factorul p^2. Făcând suma produselor două câte două şi dând pe p^2 pe din afară, ne va rămâne în parenteză suma produselor două câte două a primelor n numere. Avem:

$$1+2+3+4+ \ldots +n = n^2(n+1)/2.$$

Ridicând la patrat şi însemnând cu S suma produselor două câte două a primelor n numere, avem:

$$(1^2+2^2+3^2+ \ldots +n^2)+2S = n^2(n+1)^2/4.$$

Dar parenteza se cunoaşte şi este $n(n+1)(1n+1)/6$. Deci:

$$2S = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2S = \frac{n(n+1)}{12}(3n^2+3n-4n-2)$$

$$S = \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$$

$$S = \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

Suma căutată va fi dar:

$$\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2)p^2.$$

Pentru $p=7$ găsim:

$$\frac{49}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

C. I. CIORĂNESCU.

PROBLEMA 3324. *Să se arate că dacă* $A_1, A_2, \ldots A_{p-1}$ *sunt coeficienții desvoltărei produsului:*

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+p-1),$$

atunci avem:

$$1 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{p-1} = \mathcal{M}.\, p.$$

Să se generalizeze.

CĂP. I. LINTEȘ.

I. Observăm că:

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+p-1) = x^{p-1} + A_1 x^{p-2} + \cdots + A_{p-1}.$$

Deci, pentru $x = 1$, avem:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) = 1 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{p-1} = \mathcal{M}.\, p.$$

c. c. e. d. d.

II. Putem considerà produsul:

$$(x+\alpha_1)(x+2.\alpha_2)\ldots[x+(p-1)\alpha_{p-1}]$$

și găsim analog că:

$$p!\,\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} = 1 + A_1 + A_2 + \cdots + A_p = \mathcal{M}.\, p,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$ fiind întregi oarecare.

III. Dacă r este o rădăcină primitivă a ecuației:

$$x^{p-1} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p)$$

atunci coeficienții $A_1, A_2, \ldots A_{p-1}$ ai produsului:

$$(x+1)(x+r)(x+r^2)\ldots(x+r^{p-2})$$

satisfac divizibilității problemei, căci numerele:

$$r^0, r^1, r^2, \ldots r^{p-2},$$

dau față de p resturile:

$$1, 2, 3, \ldots (p-1),$$

într'o ordine oarecare și atunci avem cazul II, unde:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{p-1} = \mathcal{M}.\, p + 1.$$

IV. Să vedem acuma dacă avem:

$$1 + a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + \cdots + a_{p-1} \cdot A_{p-1} = \mathcal{M}.p,$$

$a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ fiind niște întregi oarecare.

Calculând coeficienții desvoltărei produsului dat, avem (ZAHLENTHEORI, P. BACHMANN, 77):

$$A_1 = C_p^2$$

$$2A_2 = C_p^3 + C_{p-1}^2 \cdot A_1$$

$$3A_3 = C_p^4 + C_{p-1}^3 \cdot A_1 + C_{p-2}^2 \cdot A_2$$

. . . . . .

. . . . . .

$$(p-2)\, A_{p-1} = C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-2} \cdot A_1 + C_{p-2}^{p-3} A_2 + \ldots + C_3^2 A_{p-3}$$

$$(p-1)\, A_{p-1} = 1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-2}.$$

Ultima egalitate se mai poate scrie:

$$p.\, A_{p-1} = 1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1},$$

care ne arată prima parte a problemei.

Observăm apoi că:

$$A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots A_{p-2},$$

sunt divizibili cu p, numai

$$A_{p-1} \not\equiv \mathcal{M}p.$$

Ori cum:

$$p \cdot A_{p-1} = 1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1},$$

atunci urmează că:

$$1 + A_{p-1} = \mathcal{M}\, p.$$

Aşà dar expresiunea ce ne-am propus mai sus este divizibilă cu p numai când:

$$a_{p-1} = 1.$$

Sau putem aveà:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_{p-1} A_{p-1} + a_{p-1} = \mathcal{M}\, p,$$

ce constitue o expresiune şi mai generală.

Am mai puteà adăogà că:

$$A_1 \cdot A_2 \ldots A_{p-1} = \mathcal{M}\, p^{p-1}.$$

Sau:

$$A_1 \cdot A_2 \ldots A_{p-2}\,(A_{p-1} + 1) = \mathcal{M}\, p^p.$$

In sfârşit, odată valoarea coeficienţilor $A_1,\ A_2, \ldots A_{p-1}$ fiind cunoscută, se pot formà diferite expresiuni.

Notă: 1) Au rezolvat ca la I problema, D-nii: Gr. Ioachim, Ion Miu, M. Ozias, N. Teodorescu, N. Botea şi B. Gataianu.

2) Au generalizat ca la II, considerând:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{p-1},$$

D-nii: Gr. Ioachim, M. Ozias, N. Teodorescu şi N. Botea.

Căp. I. Lintes.

PROBLEMA 3342. *O progresie aritmetică are* p + q *termeni, din care primul este egal cu* a. *Se cere raţia acestei progresii şi suma primilor* p *termeni, ştiind că suma ultimilor* q *termeni este nulă.*

Col. Gh. Buicliu.

Soluţia I, dată de D-nii: R. Adam (Lic. Constanţa); E. Albeaţă, M. Blumen (Lic. Petru-Rareş, Piatra Neamţ); L. Brül (Lic. Cantemir, Bucureşti); H. Cohn (Lic. Laurian, Botoşani); H. David (Lic. Codreanu, Bârlad); F. Dinescu (Lic. Ploeşti); C. Drâmbă (Lic. Galaţi); S. Feldstein, P. Iscovici, E. Lupescu (Lic. Brătianu, Piteşti); H. Marcovici (Lic. Botoşani); G. Nicolescu (Lic. Unirea, Focşani); V. Novacu (Lic. Moise Nicoară, Arad); C. Păun (Lic. Focşani); I. Th. Popovici, A. Roşculeţ, G. Tailer (Lic. Codreanu, Bârlad); I. C. Vasiliu, S. Weiss (Lic. Galaţi); A. Weissbuch (Lic. M. Cogălniceanu, Iaşi).

Fie

$$\div a\,.\,a+x\ldots a+px\ldots a+(p+q-1)x,$$

progresia căutată. Suma ultimilor q termeni, este conform ipotezei

$$\frac{[a+px+a+(p+q-1)x]q}{2}=0;$$

de unde se deduce

$$a+px+a+(p+q-1)x=0.$$

$$(1)\qquad \therefore\qquad x=\frac{-2a}{2p+q-1},$$

căci $q\neq 0$. Cunoscând raţia x, se găseşte uşor că suma primilor p termeni este

$$(2)\qquad S_p=ap\frac{p+q}{2p+q-1}.$$

Soluția II, dată de D-nii: S. ARONOVICI (Lic. Galați); GH. CĂLIN (Lic. Caracal); GR. IOACHIM (Lic. Militar Iași); N. MANOLESCU (Lic. Unirea Focșani); N. MIHĂILESCU (Lic. Matei Basarab, București); O. SCHÄCHTER, N. TEODORESCU (Lic. Sp.-Haret, București); și B. VASILESCU (Lic. Sf. Sava, București).

Fie S_{p+q} suma termenilor progresiei, iar S_p și S_q suma primilor și ultimilor termeni. Conform enunțului

$$S_{p+q} - S_p = S_q = 0$$

$$S_{p+q} = S_p .$$

Inlocuind în această relație pe S prin valorile date de formulele cunoscute, se găsește rația x după care se deduce S_p. Se găsesc rezultatele (1) și (2) dela soluția I.

Observațiuni. 1°. Un număr de 17 soluțiuni nu au fost citate pentru că aveau rezultatele greșite.

2°. Dacă s'ar fi dat

$$S_q = m$$

atunci s'ar fi găsit, pe oricare din cele 2 căi

$$x = \frac{2m - 2ap}{q(2p + q - 1)}, \quad S_p = \frac{aq(p+q) + m(p-1)}{q(2p+q-1)}\, p.$$

3°. Dacă se dă suma S_p a primilor p termeni și se cere rația și suma S_q se găsește:

$$x = \frac{2m - 2ap}{p(p-1)} \quad \text{și} \quad S_q = \frac{q(q+2p-1)m - ap^2q(p+q)}{p(p-1)} .$$

4°. D-nul I. C. VASILIU studiind problema analoagă pentru o progresie geometrică, găsește

$$S_p = \frac{a\left[\cos\frac{2kp\,\Pi}{q} + i\sin\frac{2kp\,\Pi}{q} - 1\right]}{\cos\frac{2k\Pi}{q} + i\sin\frac{2k\Pi}{q} - 1} .$$

GH. B.

PROBLEMA 3377. *Să se verifice identitatea;*

$$\sqrt[5]{\frac{16a^4}{15625}\left(\frac{11a}{5}\sqrt{\frac{1}{5}} + a\right)} - \sqrt[5]{\frac{16a^4}{15625}\left(\frac{11a}{5}\sqrt{\frac{1}{5}} - a\right)} = 2a.$$

O. IANCULESCU.

Soluție dată de D-nii: E. GRÜNSTEIN (Lic. Cogălniceanu, Iași); G. PARASCHIV, C. PILAT, T. PUȘCĂ, V. RÂPEANU, E. RUSU,

T. Stoicescu, H. Telemac (Lic. Internat, Iaşi); G. Tailer (Lic. Bârlad) şi N. Teodorescu (Lic. Haret, Bucureşti).

Simplificând cu a identitatea propusă şi observând că $15625=5^6$, obţinem:

$$\sqrt[5]{\frac{16}{5}\left(\frac{11}{5\sqrt{5}}+1\right)}-\sqrt[5]{\frac{16}{5}\left(\frac{11}{5\sqrt{5}}-1\right)}=2,$$

$$\therefore \quad \sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{50\sqrt{5}}}-\sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{50\sqrt{5}}}=1. \qquad (1)$$

Notăm

$$\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{50\sqrt{5}}}=a, \qquad \sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{50\sqrt{5}}}=b. \qquad (2)$$

Avem

$$(a-b)^5=a^5-b^5-5ab\,(a^3-b^3)+10a^2b^2\,(a-b),$$

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab\,(a-b)$$

$$\therefore \quad (a-b)^5=a^5-b^5-5ab\,(a-b)\,[(a-b)^2+3ab]+10a^2b^2(a-b).$$

$$\therefore \quad (a-b)^5=a^5-b^5-5ab\,(a-b)^3-5a^2b^2\,(a-b).$$

Ţinând seamă de relaţiile (2) avem:

$$a^5-b^5=\frac{1}{5}\ , \quad ab=\sqrt[5]{-\frac{4}{5^3.10^2}}=-\sqrt[5]{\frac{1}{5^3.5^2}}=-\frac{1}{5}\ ;$$

$$\therefore \quad (a-b)^5=\frac{1}{5}+(a-b)^3-\frac{1}{5}(a-b).$$

Punând $a-b=x$, obţinem ecuaţiunea:

$$5x^5-5x^3+x-1=0, \qquad (2)$$

care este verificată pentru $x=1$.

Notă. Impărţind ecuaţiunea (2) cu $x-1$, obţinem:

$$f(x)=5x^4+5x^3+1=0,$$

care are numai rădăcini imaginare.

In adevăr, ecuaţiunea $f'(x)=0$ are ca rădăcini pe $x=0$ şi $x=-\frac{3}{4}$, iar şirul lui Rolle nu prezintă nici o variaţie de semn.

Singura rădăcină reală a ecuaţiei (2), este deci $x=1$.

R. T. I.

EXERCIŢII

62. Suma cifrelor unui patrat de cinci cifre, dă patratul cifrei mijlocii. Care este acel patrat?

M. GHELBER.

R. Din $d+m+s+z+u=s^2$, se scot şase ecuaţii dând lui s valorile 1; 2; 3; 4; 5; 6. Prima nu dă nimic. La celelalte se ia grupa zu, aşa ca să termine un patrat şi se deduce $(d+m)$ care se descompun într'o sumă. Se găsesc soluţiile: $10201=101^2$; $12321=111^2$; $27556=166^2$; $48400=220^2$; $52421=229^2$; $65536=256^2$; $69696=264^2$.

63. Se scrie după un cub de trei cifre un patrat de două cifre. Numărul de cinci cifre format, poate fi patrat?

V. C. POPESCU.

R. Cuburile sunt 125; 216; 343; 512; 729, iar patratele 16; 25; 36 49; 64; 81. Se încearcă a scoate rădăcinile cuburilor şi se văd ce patrate se pot pune la urmă ca să iasă rădăcina exactă. Nu se găseşte nicio soluţie efectivă şi numai două formale: 21609 şi 72900.

64. Se cer patratele de patru cifre a căror rădăcină se obţine scriind cifra unităţilor după a sutelor.

A. PÂRVU.

R. Unităţile reproducându-se prin ridicare la patrat, nu pot fi decât 0; 1; 5; 6. De aci ecuaţiile:

$$(10s)^2 = 1000m + 100s$$
$$(10s+1)^2 = 1000m + 100s + 10z + 1,$$
$$(10s+5)^2 = 1000m + 100s + 10z + 5,$$
$$(10s+6)^2 = 1000m + 100s + 10z + 6,$$

care se reduc la

$$s(s-1) = 10m\ ;\quad 2s(5s-u) = 100m+z\ ;\quad 10s^2+2 = 100m+z\ ;$$
$$2s(5s+1) = 100m+z.$$

Prima cere $s=5$ sau $s=6$ şi dă soluţiile *2500* şi *3600*.
A treia cere $z=2$ în care caz devine imposibilă.
In a doua dând valori lui s, nu găsim soluţii.
La a treia dând valori lui s, găsim soluţia $5776=76^2$.

65. Fie G_a, G_b centrele de greutate ale triunghiurilor ACD, BCD. Să se arate că $G_a G_b$, este paralelă cu AB.

N. AGRONOMOF.
(Wladiwostok).

R. Fie M mijlocul lui CD. Avem:

$$MG_a = \tfrac{1}{3}MA$$
$$MG_b = \tfrac{1}{3}MB.$$

Deci în triunghiul MAB, linia $G_a G_b$ este paralelă cu AB.

PROBLEME PROPUSE.

3431. Babele ghicitoare dela noi, procedează în modul următor: Iau 41 boabe, le descântă şi le împarte la întâmplare în trei grămezi puse în linie dreaptă. Din fiecare din aceste trei grămezi iau mereu câte patru boabe, până ce rămân în fiecare grămadă 1; 2; 3 sau 4 boabe. Boabele luate în mână din cele trei grămezi le amestecă şi iar procedează ca mai sus, aşezând alte trei grămezi sub boabele rămase dela primele grămezi. Procedează cu noile grămezi ca şi cu primele. Cu boabele rămase în mână se mai procedează încă odată, aşă că pe masă rămân trei linii şi trei coloane cu câte 1; 2; 3; sau 4 boabe. Se întreabă:

1. Câte tablouri diferite putem aveà şi să se deducă dacă după acele tablouri se poate ghici?

2. Care este suma boabelor care rămân în fiecare tablou?

3. Dacă presupunem acel tablou alcătuind un determinant, care este maximum şi minimum valorii lui absolute?

Ion M. Miu.

3432. Se cer patratele de patru cifre $mszu$ şi $m's'z'u'$ aşà ca su şi $s'u'$ să fie două numere consecutive.

C. C. Popovici.

3433. Se cere suma:

$$0,1+0,2+0,3+0,4+\ldots+0,9+$$
$$0,10+0,11+\ldots\ldots\ldots+0,99+$$
$$0,100+0,101+0,102+\ldots+0,999+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+0,n.$$

N. Agronomof.
(Wladiwostok).

3434. Fie O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi I_1 centrul cercului înscris în triunghiul complimentar.

Să se demonstreze că perpendicularele duse în I pe IA, IB, IC taie respectiv laturile opuse ale triunghiului ABC în trei puncte situate pe o dreaptă, care formează cu laturile triunghiului un patrulater, în care dreapta lui Newton este perpendiculară pe dreapta OI_1.

Micu Grünbaum.

3435. Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni cu 6 necunoscute:

$$x^2 + at - 1 = 0 \qquad u + xz - dt = 0$$
$$y^2 + bt - 1 = 0 \qquad v + yz - et = 0$$
$$xy - ct = 0 \qquad u^2 + v^2 - z^2 - ft = 0,$$

în care a, b, c, d, e, f sunt numere reale date.

COLONEL GH. BUICLIU.

3436. Să se studieze variaţia funcţiunei

$$y = \frac{mx^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

şi să se figureze curba pentru $m = 0$, $m = 1$, $m = -\frac{1}{8}$.

TH. ANGHELUŢĂ.

3437. Intre elementele unui triunghiu oarecare, avem relaţiunea:

$$\frac{a}{r_a}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A\right) + \frac{b}{r_b}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B\right) + \frac{c}{r_c}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C\right) = 0.$$

P. BLEIWEISS.

3438. Un avion sboară cu o viteză u (uniformă), urmând o traectorie rectilinie în planul orizontal de altitudine H. Un tun antiaerian situat în planul de altitudine *zero*, trage un proectil în avion cu viteza iniţială v_0. Cunoscându-se în momentul tragerei distanţa D_0 între tun şi avion, cum ar trebui ochit cu tunul (decalat axul ţevei) pentru ca proectilul să loviască avionul, tragerea considerându-se în vid?

Aplicaţiune pentru:

$u = 150$ $^{km}/_{oră}$; $H = 3000$ m.
$v_0 = 800$ $^{m}/_{sec}$; $D_0 = 6000$ m.

CĂP. I. LINTEŞ.

3439. Dintr'un disc circular şi omogen să se detaşeze un sector, astfel ca centrul de greutate al părţii rămase să fie la o distanţă de centrul discului, egală cu o treime din raza sa.

E. ABASON.

3440. Să se găsiască în funcţie de lungimea coardei, momentul static al unui segment de cerc în raport cu diametrul paralel cu coarda.

I. IONESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam I. Mircea (3174); *Adam I. Radu* (3174, 344); *Akerman Cazimir* (3409); *Bernstein M.* (3174); *Blumenfeld Milu* (3344); *Botea Gh. N.* (3163, 74); *Braeşter I. Otto* (3344, 409, E, R); *Brezuica C. I. I.* (3382, C, E); *Căldăraru Leon* (3279, 406); *Călin Gh.* (3392, 401, 06, 09, 18); *Cernes M.* (3401); *Chiru-Nanov O.* (3401, 06, 09); *Ciorănescu I. C.* (3174); *Cocea Gh. Teodor* (3344); *Constantinescu M.* (3401, 14); *Costăchescu C.* (2696, 3407, N); *Dângă Vlad* (3269, 401, 09); *David Haim* (3344, 403, 06, 09, 14, E); *Diaconescu V. Th.* (3406, 09, E); *Dinescu Florin* (3344); *Dorneanu V.* (3344); *Drăghiceanu M. Matei* (3174); *Drâmbă C.* (3409); *Dumitrescu M.* (3364, 409); *Fedeleş C.* (3174); *Feldstein M. I.* (E); *Florea C. Al.* (3344); *Foca Ilie* (3311); *Focşeneanu I. M.* (3174); *Gaiu G. Em.* (3344, 409); *Gataianţu B.* (3401); *Georgescu I. Ioan* (3174); *Georgescu-Racoviţă I. I.* (3401, 09, E, N); *Georgescu I. Răducanu* (3409, E); *Gheorghiu C. Adrian* (3344); *Gheorghiu C.* (3392); *Gheorghiu T. Gh.* (3409); *Goldstein S. F.* (3174); *Grabovski Eug.* (3269, 401, 09); *Grünstein Ernest* (3392, 401, 06, 09, 14); *Hulubei Telemac* (3406, 09); *Ioachim Gr.* (3401, 09, E); *Ionescu-Bujor A.* (3409); *Ionescu-Bujor C.* (3174, 344, 409); *Ionescu I. Paul* (3084, 174); *Leon S.* (3344); *Manafu Valeriu* (3174, E); *Manolescu N.* (3406, 09); *Mareş Gr.* (3344, 409); *Mariş Marius* (3409); *Marcovici H.* (3348); *Miu M. Ioan* (3409); *Morţun Emil* (3406, 09); *Munteanu Gh.* (3409); *Nestor D.* (3344); *Nicolau V. Gh.* (3392, 409); *Nicolau A. V.* (3401); *Nicolau-Dobridor I. N.* (3344, 401, E, N,); *Novacu V.* (3344, 401, 09, 28); *Pârvu A.* (3392, E); *Pătroianu I. M.* (3174); *Pilat C.* (3392, 401, 06, 09); *Popea Ovidiu* (3174); *Popescu C. Const.* (3075); *Popescu Dorin* (3174); *Popescu D-tru* (E); *Popovici C. C.* (3174, 344); *Popovici T. I.* (3344); *Potopeanu G.* (3344); *Radev Ath.* (Imbolia) (3174); *Roşculeţ V. Alexe* (3428); *Roşu A.* (N); *Segall L.* (3366, 82); *Segărceanu C.* (3348, 92, 401); *Spacu Gh. P.* (3409); *Spathy I. René* (2511, 696, 3409, 23, 28, E); *Simionescu Gh.* (3174, E); *Sternhell L.* (3409); *Stoicescu Th.* (3406, 09, E); *Tailer G.* (3406, 09); *Togo Themo* (3406, 17); *Udriscky Tr.* (3174); *Vasiliu C. I.* (3174, 344); *Velea M.* (E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Soluţiunile primite în ultimul timp la problemele: 1424, 2347, 443, 510, 39, 75, 3019, 227, 39, 99, 303, 19, 27, 39, 42, 47, 53, 64, 66, 69, 89, 92, 93, 99, 401, 10, 14, 18, 20 şi 22 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu**, *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită*, 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu**, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* . . Lei 180,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu**, (adresa: Str. Basarabia, 45, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.

Mr Asociatiunea pt Cultura & Lit. Poporului Român din Sibiu
1925/26
complet
C III R 28

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXI.

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1926.

SUMARUL

1. O problemă de calculul variaţiunilor . . *Şerban Gheorghiu.*
2. Asupra ortopolului . . . . . *M. I. Focşeneanu.*
3. Note Matematice: 66—73.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografii.
6. Cereri.
7. Probleme rezolvate: 2347, 2358, 2511, 2829, 3174, 3233, 3317, 3333, 3378, 3392, 3409, 3423.
8. Exerciţii: 66—73.
9. Probleme propuse: 3441—3450.
10. Tabla de materii.

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

ABONAMENTUL 75 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1926

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXI se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **C. Malcoci,** Inginer Inspector General, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 766, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 43, 55, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 807, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 16, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 602, 07, 08, 09, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 71, 84, 86, 92, 95, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 81, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 65, 69, 71, 80, 85, 208, 15, 20, 30, 40, 49, 55, 57, 60, 64, 75, 76, 78, 92, 98, 300, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 13, 16, 18, 20, 25, 35, 41, 43, 50, 54, 60, 61, 71, 72, 79, 85, 87, 90, 96, 97, 98, 400, 02, 04, 05, 11, 12, 13, 15, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „Gazeta Matematică“ (Fabrica de Chibrituri din Bucureşti), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXXI *SUPLIMENT* No. 12

RECREAŢIUNI

1. **Soluţia recreaţiunii 2 din Suplimentul 5, Anul XXX.**

Problema era:

„O cărămidă costă un leu şi o jumătate de cărămidă. Care este preţul unei cărămizi în lei?"

D-nii: C. ISTINIE, V. MANAFU, I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ, I. FOCA, I. C. V. VASILIU, I. ILIUŢĂ şi L. SEGAL au dat soluţia:

„O cărămidă costând 1 leu şi $^1/_2$ cărămidă, înseamnă că dau 1 leu pe $^1/_2$ cărămidă. Deci preţul cărămizii este 2 lei".

D-l P. BLEIWEIS dă soluţia:

$$x = 1 + \frac{x}{2},$$

$$\therefore \quad x = 1.$$

Problema aceasta-i veche; am auzit-o când eram copil şi am rămas foarte decepţionat când i-am cunoscut soluţia, căci nu puteam admite ca o cărămidă să coste 2 lei când un lucrător se plăteà cu 2 lei pe zi şi i se aruncà şi câtevà cărămizi în spinare, când patronul nu erà mulţumit cu lucrul lui. Azi problema are datele ei corespunzătoare cu realitatea: o cărămidă costă în jurul lui 2 lei! Nu mai văd pe nimeni care să arunce bucuros cărămizile; din contră, se adună cu sfinţenie ori pe unde se găsesc ele.

GH. B.

* * *

2. **Problema ciobănească.** In Suplimentul No. 5. Anul XXX, am pus următoarea problemă ciobănească, pe care o auzisem la Rucăr:

— „Câte oi ai moşule?"

— „Patru cu lapte, cinci de toate şi cu berbecul şapte".

Răspunsul precis am spus că-l aştept dela corespondenţi. Am primit un singur răspuns dela D-l ION C. V. VASILIU (Lc. Militar, Târgul Mureş). Iată-l, deşi nu este cel adevărat:

„Nu se poate admite altă soluţie decât aceea că moşneagul printr'aceasta a înţeles că are 5 oi de toate, dintre care 4 cu lapte, apoi mai are un miel pe care nu l-a socotit între oi şi pe berbec cu care a completat suma de şapte în totul".

D-l I. C. V.... Z. VASILIU ($i = 1, 2 \ldots \infty$) se înşeală; se mai pot admite şi alte soluţii între care cea adevărată este că moşul ori nu ştia să

numere ori eră nebun. Intre aceste două limite se pot face toate presupunerile posibile, toate putând fi tot una de adevărate, sau tot una de neadevărate.

GH. B.

* * *

3. **Geografie aritmetică.** La noi în ţară avem următoarele localităţi:

Doi peri. Cătun în judeţul Iaşi.
Două Mai. Sat „ „ Constanţa.
Trei scaune. Judeţ în Transilvania.
Trei fântâni. Cătun în Judeţul Iaşi.
„ „ Fermă „ „ Ciuc.
Patru fraţi. Sat „ „ Ialomiţa.
Zece hotare. Cătun „ „ Bihor.
Jumătăţeni. Sat „ „ Botoşani.
A treia parte. Sat „ „ Roman.
Mila 35. Cătun „ „ Tulcea.

I. I.

* * *

4. **Diferite feluri de calcul.**

a) *Politic.* In „Istoria Bisericii Române", de M. DOBRESCU & MIHĂLCESCU, pag. 39—40, găsim:

„DESPOT eră luteran, nu atât din convingere, cât mai ales din *calcul politic*".

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

b) *Material.* Idem, pag. 47, găsim:

„Din toate acestea rezultă că unirea nu s'a făcut din convingerea religioasă, ci din *calcule materiale*, din dorinţa de o stare economică bună".

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

* * *

5. **Metaforă.** In ziarul „Universul", din 12 Fevruarie 1926, la „Filme", găsim:

„MUSSOLINI îi ameninţă pe Nemţi că dacă vor fi obraznici, le va răspunde la *patrat* şi la *cub*!"

RENÉ I. SPATHY.

Cu condiţie ca răspunsului să nu-i lipsească nimic; altfel ese altfel.

I. I.

* * *

6. **Lumea plană.** Un scriitor vorbind de lumea cu două dimensiuni, găseşte acolo ideile moderne de nivelare socială; acolo nimeni nu se poate urcă în capul altuia; acolo nu există inferiori şi superiori; acolo nu există supra om; nimeni nu se poate înălţă pe ruinele altuia; acolo nu există subşefi, suboficeri, subsecretari de Stat, etc., căci nu există dedesubturi; etc.

I. I.

* * *

7. **Eroare de tipar? Neştiinţă?** In *„Calendarul Plugarilor"*, intocmit de Societatea Agronomilor, la pag. 69, găsim:

„Lungimea unui arc de cerc = Raza înmulţită cu numărul gradelor arcului şi împărţit cu 180^0". $\left[\frac{\pi R n^0}{180^0}\right]$

Care este bună: formula sau regula?

Erata dela fine nu indică nicio eroare!

I. I. Iliuţă-Dăbuleni.

* * *

8. **Geografie geometrică.** La noi în ţară avem următoarele localităţi:

— *Linia.* Un sat în judeţul Argeş, altul în judeţul Vâlcea. Avem *Linia mare* sat în Argeş unul şi în Olt două; avem *Linia de jos şi de sus* în Mehedinţi; *Linia dealului* în Vâlcea şi *Linia din vale* în Olt, iar *Linia pe vale* în Argeş; avem *Linia hanului* în Argeş; *Linia ciobanului* în Buzău; *Linia richitelor* în Argeş; *Linia lucianca* în Ilfov şi *Linia Zisului* în Argeş.

— *Unghiu* este sat în Neamţ; *Unghiul lui Păr* este în Iaşi; *Valea unghiului* e în Buzău; iar *Ungheni* avem câte unul în Argeş şi Olt şi câte doi în Iaşi şi Bălţi.

— *Cercul* se găseşte în Iaşi.

— *Săgeata* şi *Săgeata de sus* sunt în Buzău.

I. I.

* * *

9. **Spirit de observaţie!**

— Prof. — Cu ce este egal $(\sin a + \sin b)$?

— Elev — Cu $2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

— Prof. — (Către cei din clasă). Care este greşala?

— X. — Trebuia să dea pe sin factor comun.

I. Foca.

* * *

10. **Soluţie rapidă.** In problema 3280 se cere să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \text{arc}\sin x = 0.$$

Dăm pe $\sin x$ factor comun şi avem:

$$\sin x(1 + \text{arc}) = 0,$$

de unde $\sin x = 0$ şi deci $x = 0$.

A. M. Cernes.

* * *

11. **Curbă dreaptă.** La o Adunare generală a Societăţii Tranwaelor din Bucureşti, un orator vorbind de trecerea unei linii pe o stradă, spune că pe acea stradă *curba este dreaptă!* Nu era deloc chestiunea de a opune aceasta la o *curbă strâmbă!*

I. I.

* * *

12. **Infinite specificate:**

a) *Limpede.* In „*Mitologia Eddelor*", de E. Boureanu, pag. 57, găsim:

„Ce este acel cal năsdrăvan Şleipner, cu opt picioare, decât iuţeala cu care mintea aleasă străbate miile de leghe în domeniul *infinitului limpede*...

A. R. Ionescu.

b) *Adânc.* In romanţa: „*Iubii doi ochi*", de I. Fernic, găsim versurile:

„Erau *adânci* ca *infinitul*
Ca şi nemărginitul cer".

A. B. Ionescu.

c) *Albastru.* In poezia „*Amurgul sufletului*", de C. C. Cristea, citim:

„Când guri de valuri reci şi roşii
Sărută pătimaş albastrul infinit".

E. St. Iacob.

* * *

13. **Ce e boala?** Matematicianul Laurent s'a ocupat cu teoria asigurărilor şi ca atare a examinat şi problema asigurărilor contra bôalei. Dar ce este boala? Iată părerea lui:

„Inainte de toate, este locul să ne întrebăm ce este un om bolnav. Mai toţi suntem bolnavi, mai mult sau mai puţin şi nu cred să existe un singur om care să nu aibă oarecare infirmitate. De aceea nici la medicină, nici la fisiologie nu trebui să ne adresăm pentru a defini omul bolnav. Un bolnav pentru noi este un individ care încetează să lucreze, pentrucă el *îşi zice* că este bolnav şi *a fost recunoscut* bolnav de un medic care face această declaraţiune".

I. I.

* * *

14. **Convingere nesdruncinată!** Filosoful Libri a negat existenţa sateliţilor lui Jupiter, pe care îi descoperise Galileo de curând. El a refuzat toată viaţa să puie ochiul la o lunetă, de teamă să nu-i vază şi să nu le mai poată negă existenţa mai departe!

I. I.

* * *

15. **Definiţia omului.** Goblot îl defineşte astfel: „*omul este animalul care socoteşte*".

I. I.

O PROBLEMĂ DE CALCULUL VARIAȚIUNILOR.

§1. Intr'o notă prezentată la «Academia dei Lincei» din Roma, D-l Levi Civitta, a rezolvat o problemă de calculul variațiunilor, susceptibilă a aveà aplicațiuni importante atât în domeniul Analizei pure, cât și în acela al Fizicei-Matematice. Am socotit că nu ar fi lipsit de interes pentru corespondenții «G. M.», a le expune această chestiune sub o formă cât se poate de elementară.

Problema consistă, fiind dată o funcțiune $U(x, y)$ continuă într'un domeniu limitat, pentru mai multă simplitate la aria A, interioară unei curbe σ convexă și regulată în orice punct, a determină o funcțiune $u(x, y)$ armonică în interiorul ariei A, astfel ca integrala:

$$I = \int\int_A [U(x,y) - u(x,y)]^2 ds,$$

să fie minimă.

Soluțiunea acestei probleme, în cazul general, conduce la considerațiuni destul de delicate asupra ecuațiunilor integrale. Pentru a le evità, în cele ce urmează, mă voiu mărginì la două cazuri particulare, care deși restrânse, permit a redà o imagine aproximativă a acestei chestiuni.

* * *

§2. Presupun că funcțiunea dată $U(x, y)$ nu depinde decât de distanța punctului $M(x, y)$ la origine, sau cu alte cuvinte trecând în coordonate polare:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

presupun că U e funcțiune numai de ρ, iar nu și de θ.

Presupun de asemenea că $U(\rho)$ este continuă, când ρ variază între 0 și R.

U fiind o astfel de funcțiune, ne propunem a rezolvà problema dela §1, în cazul când A este aria cercului cu centrul în origine și de rază $\rho = r < R$ și apoi, în cazul în care A e coroana circulară coprinsă între cercurile cu centrul în origine și de raza r și R.

In ambele cazuri, este evident că funcțiunea armonică, căutată, u nu depinde decât de ρ. Intr'adevăr, atât funcțiunea dată U,

cât şi aria A, sunt invariante, rămân aceleaşi, pentru orice rotaţiune arbitrară în jurul originei. Deci şi integrala I rămâne aceeaşi şi prin urmare şi funcţiunea u, căutată, ce presupunem că există şi că este unică, rămâne aceeaşi.

Or, toate funcţiunile armonice, $u(\rho)$, sunt integrale ale ecuaţiunei :

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{du}{d\rho} = 0 \tag{1}$$

obţinută din ecuaţiunea lui LAPLACE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

în care am făcut schimbarea de variabile :

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta$$

şi în rezultat am anulat derivatele parţiale ale lui u în raport cu θ.

Integrala generală a ecuaţiunei (1), este :

$$u = a \log \frac{1}{\rho} + b, \tag{2}$$

a şi b fiind două constante arbitrare.

Rămâne deci bine stabilit, că în cele ce urmează, funcţiunea căutată u, este de forma (2). Dealtminteri, este datorită acestei circumstanţe favorabile, de a puteà exprimà funcţiunea u, sub o formă ce nu conţine semnul $\int$, că putem evità, în rezolvarea problemei ce ne-am propus, întrebuinţarea ecuaţiunilor integrale.

* * *

§3. Trec acum la primul caz ce mi-am propus a examinà. Funcţiunea u fiind presupusă armonică şi cu atât mai mult olomorfă, în interiorul cercului (C) cu centrul în origine şi de rază $\rho = r < R$, urmează că avem $a = 0$, căci dacă $a \neq 0$ funcţiunea u definită de (2), devine infinită în domeniul originei.

Problema propusă revine, în acest caz, la a determinà o constantă b, astfel ca valoarea integralei :

$$I(b) = \iint_A [U(\rho) - b]^2 ds,$$

$$I(b) = 2\pi \int_0^r [U(\rho) - b]^2 \rho d\rho,$$

să fie minimă.

Fie b această constantă și fie b' o constantă arbitrară, iar

$$I(b') = 2\pi \int_0^r [U(\rho) - b']^2 \rho d\rho,$$

valoarea lui I corespunzătoare. $I(b')$ se mai poate scrie:

$$I(b') = 2\pi \int_0^r [U(\rho) - b + (b - b')]^2 \rho d\rho$$

$$\therefore \quad I(b') = I(b) + 4\pi(b - b') \int_0^r [U(\rho) - b]\rho d\rho + 2\pi(b - b')^2 \int_0^r \rho d\rho.$$

Ori, pentru a avea, ori care ar fi b',:

$$I(b) < I(b'),$$

este necesar să avem:

$$(3) \qquad \int_0^r [U(\rho) - b]\rho d\rho = 0,$$

căci dacă această condițiune nu ar fi îndeplinită, atunci putem determină o constantă b', astfel ca să avem:

$$4\pi(b - b') \int_0^r [U(\rho) - b]\rho d\rho + 2\pi(b - b')^2 \int_0^r \rho d\rho < 0$$

și prin urmare, în acel caz, am avea și:

$$I(b) > I(b').$$

Condițiunea (3) este necesară; ea este și *suficientă*. Într'adevăr, ținând seamă de (3), $I(b')$ devine:

$$I(b') = I(b) + 2\pi(b - b')^2 \int_0^r \rho d\rho$$

$$\therefore \quad I(b) < I(b').$$

Ecuațiunea (3), ne dă:

$$b = \frac{2}{r^2} \int_0^r U(\rho)\rho d\rho,$$

ceeace rezolvă problema în cazul nostru.

Voiu observà acum, că funcţiunea armonică determinată $u = b$, satisface egalitatea :

$$\iint_C uds = \iint_C U(\rho)ds,$$

unde reamintim că C este cercul $\rho = r$, sau cu alte cuvinte :

Valoarea mijlocie (moyenne) în cercul C, *a funcţiunei armonice* u, *ce face minimă integrala I, este egală valoarei mijlocii, în acelaş cerc, a funcţiunei date.*

* * *

§4. Voiu examinà acum, cazul în care aria A, este mărginită de cercurile $\rho = r$ şi $\rho = R$. Din punct de vedere analitic, acest caz prezintă un fapt remarcabil: aria A, numai este limitată, ca în cazul precedent de o singură curbă, ci de două curbe.

De data aceasta, funcţiunea căutată u, este în mod efectiv, de forma (2)

$$u = a\log\frac{1}{\rho} + \rho,$$

fiindcă repet, orice funcţiune $u(\rho)$, armonică într'o arie ce nu conţine origina, este de forma indicată.

Presupunem că există două constante a, b astfel ca funcţiunea u, ce ele determină, să facă minimă integrala I. Fie :

$$I(\alpha, \beta) = \iint_A [U(\rho) - a\log\frac{1}{\rho} - b]^2 ds$$

$$= 2\pi \int_r^R [U(\rho) - a\log\frac{1}{\rho} - b]^2 \rho d\rho,$$

valoarea integralei I, corespunzătoare.

Printr'un raţionament absolut analog celui întrebuinţat în cazul precedent, se obţine, că pentru ca $I(\alpha, \beta)$ să fie minimul integralei I, este necesar şi suficient să avem :

$$(4) \qquad \int_r^R [U(\rho) - a\log\frac{1}{\rho} - b]\log\frac{1}{\rho}\rho d\rho = 0$$

$$(5) \qquad \int_0^R [U(\rho) - a\log\frac{1}{\rho} - b]\rho d\rho = 0.$$

Inainte de a determină efectiv constantele a şi b, vom observà că relaţiunea (5), este echivalentă următoarei:

$$\iint_A (a\log\frac{1}{\rho} + b)ds = \iint_A U(\rho)ds.$$

Se poate deci afirmà ca şi în cazul precedent că:

Valoarea mijlocie, în arie A, *a funcţiunei armonice, ce face minimă integrala* I, *este egală valoarei mijlocii, în aceeaşi arie a funcţiunei date.*

Punem:

$$A = \int_r^R \rho\left[\log\frac{1}{\rho}\right]^2 d\rho = \left|\frac{\rho^2}{2}\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho^2}{2}\log\frac{1}{\rho} + \frac{\rho^2}{4}\right|_r^R$$

$$B = \int_r^R \rho\log\frac{1}{\rho}d\rho = \left|\frac{\rho^2}{2}\log\frac{1}{\rho} + \frac{\rho^2}{4}\right|_r^R$$

$$C = \int_r^R \rho d\rho = \left|\frac{\rho^2}{2}\right|_r^R.$$

Relaţiunile (4) şi (5), devin:

$$(4') \qquad Aa + Bb = \int_r^R \rho V(\rho)\log\frac{1}{\rho}d\rho$$

$$(5') \qquad Ba + Cb = \int_r^R \rho V(\rho)d\rho,$$

relaţiuni ce determină în mod unic constantele a şi b, căci este evident că:

$$AC - B^2 \neq 0.$$

* * *

§5. Voiu terminà, prin a reaminti rolul, ce a avut în considerațiunile precedente aria A și în special, faptul ca această arie este limitată de o singură curbă — § 3 — sau de două curbe, diferite §4. S'ar puteà crede, a priori, că acest din urmă caz, conține pe primul sau cu alte cuvinte, că ar fi suficient să se modifice, în mod convenabil, curbele ce limitează domeniul de integrațiune pentru a se trece dela un caz la celalt. Voiu arătà că acest fapt, nu se produce.

Presupun pentru aceasta, că voesc să determin minimul integralei I, când aria A este cercul $\rho = R$. In virtutea celor expuse la § 3, găsesc:

$$b_1 = \frac{2}{R^2} \int_0^R U(\rho)\rho d\rho$$

Presupun apoi, că voesc să rezolv aceeaș problemă, aria A fiind coroana circulară coprinsă între cercurile $\rho = R$ și $\rho = \varepsilon$. Determin astfel două constante a și b. Când ε tinde către zero constantele a și b, tind către limite finite: a_2 și b_2, date de ecuațiunile (4') și (5') unde facem $r = 0$ și ne putem asigurà cu ușurință — pe un caz particular de ex. $U(\rho) = \rho$ —, că $a_2 \neq 0$ și $b_2 \neq b_1$. Voiu observà, deasemeni, că atât integrala:

$$I(a_2, b_2) = \iint U[(\rho) - a_2 \log \frac{1}{\rho} - b_2]^2 ds$$

calculată în interiorul cercului $\rho = R$ — cât și toate integralele ce intervin la determinarea lui a_2 și b_2, au un sens, deși funcțiunea $\log 1/\rho$ devine infinită pentru $\rho = 0$. Mai mult, integrala $I(a_2, b_2)$ este în mod efectiv, un minimum pentru integrala I, sau cu alte cuvinte oricare ar fi constantele a'_2, b'_2 — diferite de a_2, b_2 — avem:

$$I(a_2, b_2) < I(a'_2, b'_2).$$

Vedem deci că în interiorul cercului $\rho = R$, problema propusă admite două soluțiuni diferite, după cum voim să rezolvăm această problemă, în interiorul cercului considerat sau în interiorul coroanei circulare limitate de cercurile $\rho = R$ și $\rho = \varepsilon$, unde ε tinde către zero.

Această contradicție aparentă se explică — pe deoparte —, prin faptul că funcțiunea căutată u, deși depinde de aria A, nu este

cu nimic probat, că aria A tinzând către o arie limită A şi funcţiunea u tinde către funcţiunea ω corespunzătoare acestei arii limită A, — iar pe de alta — prin faptul că o funcţiune armonică în interiorul unui domeniu, prezintă caractere esenţial distincte de o funcţiune armonică în exteriorul acelui domeniu. De aceea, problemele § 3 şi § 4 sunt distincte.

ŞERBAN GHEORGHIU.

ASUPRA ORTOPOLULUI *).

O dreaptă Δ taie în punctele M şi N cercul O, circumscris unui triunghiu ABC. Fie:

A', B', C' proiecţiile vârfurilor A,B,C pe Δ;

A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB;

P mijlocul segmentului MN;

$M_a N_a$, $M_b N_b$, $M_c N_c$ proiecţiile segmentului MN pe laturile BC, CA, AB;

α, β, γ mijloacele segmentelor MA, MB, MC;

α', β', γ' » » NA, NB, NC;

ω ortopolul dreptei Δ în raport cu triunghiul ABC.

1. *Patrulaterele* $B'C'M_a N_a$, $C'A'M_b N_b$, $A'B'M_c N_c$ *sunt inscriptibile şi cercurile circumscrise lor se întretaie în ortopolul* ω.

In adevăr, corzile $B'M_a$ şi CN sunt paralele, fiind ambele antiparalele cu coarda BM în cercul O şi în patrulaterul inscriptibil $BMB'M_a$. Deci $\sphericalangle BB'M_a = \sphericalangle NCC'$. Dar în patrulaterul inscriptibil $CNC'N_a$, avem $\sphericalangle NCC' = \sphericalangle NN_a C'$ şi prin urmare

$$\sphericalangle BB'M_a = \sphericalangle NN_a C'$$

$$\therefore \quad \sphericalangle M_a B'C' = \sphericalangle M_a N_a C',$$

de unde conchidem că patrulaterul $M_a B'N_a C'$ este inscriptibil.

La fel demonstrăm că patrulaterele $C'A'M_b N_b$, $A'B'M_c N_c$ sunt şi ele inscriptibile.

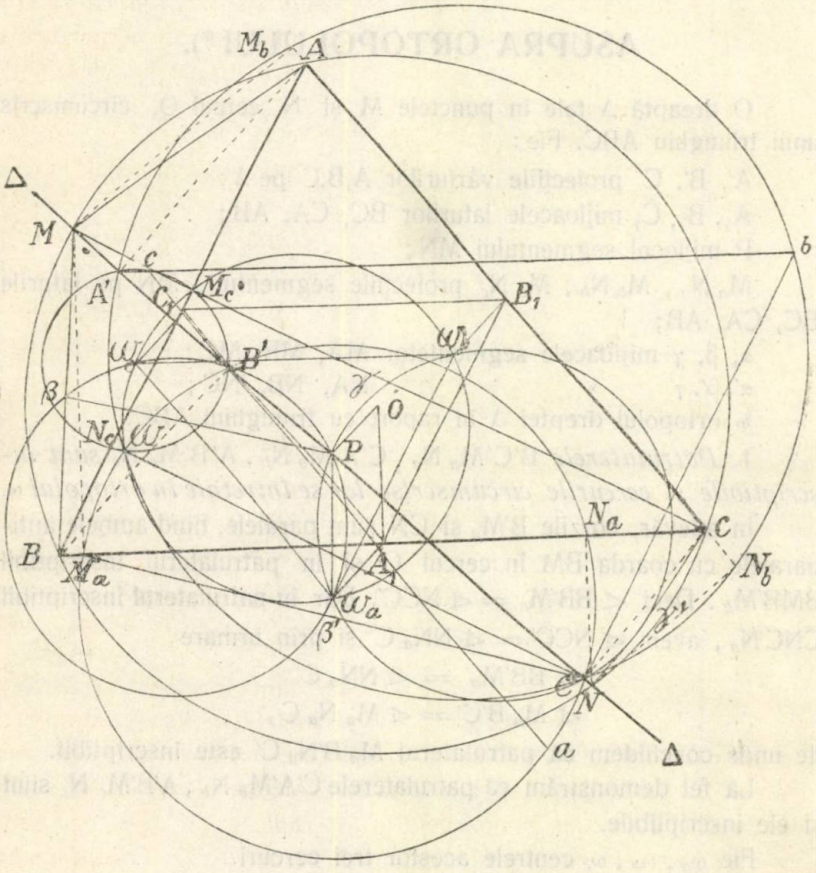
Fie ω_a, ω_b, ω_c centrele acestor trei cercuri.

Centrul ω_a al cercului ortopolar $B'C'M_a N_a$ se găseşte pe perpendiculara ridicată prin mijlocul segmentului B'C'. Ori această per-

*) Acest articol ne-a fost trimes o parte în Ianuarie şi alta în Februarie 1926. De atunci, unele părţi din el au apărut în *Curierul Matematic* Vol. II N-rul 3 (Maiu 1926). Fiind interesant îl publicăm şi noi în intregime.

(N. R.)

pendiculară fiind paralelă cu BB' și CC', trece prin A_1 și deci $A_1\omega_a$ este paralelă cu OP. Dar ω_a se găsește și pe perpendiculara ridicată prin mijlocul segmentului $M_a N_a$, perpendiculară care trece prin P și e paralelă cu OA_1. Rezultă că patrulaterul $OA_1\omega_a P$ este un paralelogram și deci segmentul $A_1\omega_a$ este egal și paralel cu OP. Analog demonstrăm că segmentele $B_1\omega_b$ și $C_1\omega_c$ sunt fiecare egale și paralele cu OP.



Urmează de aici că patrulaterele $\omega_a\,\omega_b\,B_1A_1$, $\omega_b\,\omega_c\,C_1B_1$ și $\omega_c\,\omega_a\,A_1C_1$ sunt și ele paralelograme și deci laturile triunghiului $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ sunt respectiv egale și paralele cu laturile triunghiului complimentar $A_1B_1C_1$.

Linia centrelor $\omega_a\,\omega_b$ fiind paralelă cu A_1B_1 și deci cu AB,

cercurile ω_a şi ω_b care trec prin C' au axa lor radicală perpendiculară pe AB, sau cu alte cuvinte această axă este chiar proiectanta lui C' pe AB, de unde conchidem că cercurile ω_a, ω_b, ω_c se întretaie în ortopolul ω al dreptei Δ faţă de triunghiul ABC.

2. *Triunghiul* $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$, *format de centrele cercurilor ortopolare, este homotetic şi egal cu triunghiul complimentar* $A_1B_1C_1$.

Această proprietate am demonstrat-o mai sus şi din ea decurg toate celelalte proprietăţi ale cercurilor ortopolare.

3. *Triunghiul* $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ *este ortologic cu triunghiul fundamental* ABC. In adevăr, am demonstrat mai sus că perpendicularele duse din ω_a, ω_b, ω_c respectiv pe BC,CA,AB se întâlnesc în P, mijlocul segmentului MN.

4. Dacă în loc de trei lungimi egale cu OP, luăm pe cele trei perpendiculare duse din A_1,B_1,C_1 pe Δ, trei lungimi egale cu λ, obţinem următoarea generalizare:

Fie Δ *o dreaptă în planul unui triunghiu* ABC *şi* A',B',C' *proiecţiile vârfurilor sale pe* Δ. *Pe cele trei perpendiculare duse pe* Δ *din* A_1,B_1,C_1 *se ia, în acelaş sens, o aceiaşi lungime* λ; *se obţin astfel punctele* ω'_a, ω'_b, ω'_c. *Cercurile cu centrele în* ω'_a, ω'_b, ω'_c *şi care trec respectiv prin perechile de puncte* (B',C'), (C',A'), (A',B') *au ca centru radical ortopolul* ω.

După cele spuse mai sus, demonstraţia acestei proprietăţi este evidentă.

5. Când lungimea λ este egală cu zero, avem demonstraţia teoremei ortopolului dată de D-nul profesor Traian Lalescu*).

6. Generalizarea precedentă are avantajul de a ne arătă că *teorema cercurilor ortopolare subsistă şi în cazul când dreapta* Δ *nu taie cercul* O.

Pentru aceasta, nu avem decât să dăm dreptei Δ o mişcare de translaţie, iar centrelor ω_a, ω_b, ω_c o translaţie egală cu a dreptei Δ. De oarece proiecţiile A',B',C' suferă fiecare o translaţie egală cu a dreptei Δ, cercurile ortopolare rămân egale cu ele însăşi şi se întretaie deci în acelaş punct, centrul lor radical.

7. Din cele ce preced, rezultă că *ortopolurile a două drepte paralele, în raport cu un acelaş triunghiu, se găsesc pe o per-*

---

*) Tr. Lalescu, *O nouă demonstraţie a teoremei ortopolului în legătură cu teorema lui* T. Lemoyne, *Gazeta Matematică*, Vol. XXI, p. 138.

pendiculară pe cele două drepte şi la o depărtare egală cu distanţa dintre drepte (proprietate cunoscută).

8. Se cunoaşte teorema lui SALMON:

Dacă printr'un acelaş punct, situat pe un cerc, se duc trei coarde, şi dacă descrim pe fiecare din ele, ca diametre, un cerc, aceste trei cercuri care au un punct comun, se întretaie în trei puncte colineare *).

Reciproca acestei teoreme este următoarea:

Dacă trei cercuri descrise pe trei drepte concurente ca diametre, se taie două câte două în trei puncte colineare, centrele lor se găsesc pe un cerc ce trece prin punctul comun dreptelor.

Dacă trecem la ortopol, cercurile ortopolare îndeplinesc această din urmă condiţie; urmează deci că:

Ortopolul ω *se găseşte pe cercul circumscris triunghiului* $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$. După proprietatea 2) acest cerc este egal cu cercul circumscris triunghiului complimentar, adică egal cu cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC.

9. *Dacă prin proiecţiile* A',B',C' *ale vârfurilor unui triunghiu* ABC *pe o dreaptă* Δ, *ducem paralele la laturile triunghiului* ABC, *se formează un triunghiu* abc, *homotetic cu* ABC *şi pe al cărui cerc circumscris se află ortopolul* ω, *al dreptei* Δ *faţă de triunghiul* ABC.

Această proprietate rezultă din aceea că triunghiurile *abc* şi $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ sunt homotetice, având ortopolul ω ca centru de homotetie.

10. *Când* Δ *e diametru în cercul* O, *centrele cercurilor ortopolare sunt* A_1,B_1,C_1. *In acest caz,* (după proprietatea 8), *ortopolul* ω *se găseşte pe cercul* $A_1B_1C_1$, *adică pe cercul lui* EULER, proprietate cunoscută şi demonstrată pe altă cale.

11. In cazul când Δ e diametru în cercul ABC, mai rezultă următoarea proprietate:

Fie A',B',C' *proiecţiile vârfurilor unui triunghiu* ABC *pe un diametru al cercului circumscris şi fie* $a_1b_1c_1$ *triunghiul format de paralelele duse prin* A',B',C' *la laturile* BC,CA,AB. *Cercul circumscris triunghiului* abc *este tangent cercului lui* EULER *al triunghiului* ABC, *iar centrul său se află pe acest cerc.*

*) A se vedea: **F. G. M.**, *Exercices de géométrie*, VI-e éd., théorème 168, p. 332.

Proprietatea este evidentă, dacă observăm că după proprietăţile 9) şi 10) ω este centrul de homotetie al triunghiurilor $a_1b_1c_1$ şi $A_1B_1C_1$, iar raportul de homotetie 1 : 2.

12. Să presupunem că dreapta Δ se deplasează paralel cu ea însăşi până ce devine tangentă cercului ABC. Fie M_1 punctul de tangenţă şi M_2 proiecţia lui M_1 pe BC. Punctele M_a şi N_a se confundă atunci cu M_2, cercul ortopolar ω_a devine tangent laturei BC în M_2, raza $\omega_a M_2$ e perpendiculară pe $\omega_b \omega_c$ (care rămâne paralelă cu BC) şi avem următoarea proprietate:

Punctul de tangenţă al unei drepte cu cercul circumscris unui triunghiu ABC, *este ortocentrul triunghiului care are ca vârfuri centrele cercurilor ortopolare.*

13. Centrul ω_a al primului cerc ortopolar se obţine luând intersecţia perpendicularelor ridicate pe mijloacele lui $B'M_a$ şi $C'N_a$. Dar aceste perpendiculare trec respectiv prin β şi γ'. Cum $B'M_a$, BM şi $C'N_a$, CN sunt diagonalele patrulaterelor BM_a MB' şi CN_a NC', urmează că cele două perpendiculare sunt dreptele lui NEWTON ale acestor două patrulatere. Deci:

Centrul cercului ortopolar ω_a *se obţine luând intersecţia dreptelor lui* NEWTON *ale patrulaterelor* BM_a MB' şi CN_a NC'.

14. De oarece dreptele de mai sus sunt perpendiculare respectiv pe $B'M_a$ şi $C'N_a$, rezultă că sunt perpendiculare şi pe CN şi BM. De aici urmează o altă construcţie simplă a centrului cercului ortopolar:

Perpendicularele duse din mijloacele β *şi* γ' *ale segmentelor* BM *şi* CN, *respectiv pe* CN *şi* BM, *se întretaie în* ω_a, *centrul cercului ortopolar corespunzător laturei* BC.

15. *Când latura* BC *e fixă şi unghiul opus* A *constant, centrul primului cerc ortopolar* ω_a *e fix, iar celelalte două centre* ω_b *şi* ω_c *ale cercurilor ortopolare, descriu câte un cerc.*

In adevăr, am văzut mai sus (la Nr. 14) că centrul cercului ortopolar ω_b se găseşte la intersecţia perpendicularelor duse din P pe AC şi din γ pe NA. Aceste două perpendiculare fac între ele un unghiu egal cu unghiul NAC (sau cu suplimentul său, după cazul figurei) care e constant. Deci locul lui ω_b este cercul descris pe $P\gamma$ capabil de unghiul constant NAC (sau suplimentul său).

Analog, locul lui ω_c este cercul descris pe $P\alpha$ capabil de suplimentul unghiului NBA (sau de unghiul NAB), care e constant.

Cât priveşte pe ω_a, el e fix, de oarece punctele B', M_a, C', N_a sunt fixe.

MIHAIL I. FOCŞENEANU.
Sublocotenent.
Student în Matematici, Cluj.

Notă. a) Observăm că $\omega B'$ şi $\omega C'$ sunt respectiv perpendiculare pe AC şi AB. Avem deci, în cercul ω_a,

$$\sphericalangle B'M_a C' = \sphericalangle B'\omega C' = \sphericalangle A,$$

şi deci cercul ortopolar ω_a se obţine descriind pe B'C' un segment de cerc capabil de unghiul A. Avem prim urmare următoarea teoremă:

Segmentele de cerc capabile de unghiurile A, B, C, *descrise respectiv pe dreptele* B'C', C'A', A'B' *se intretaie în ortopolul* ω *al dreptei* Δ *faţă de triunghiul* ABC.

b) O consecinţă imediată a acestei proprietăţi e că vârfurile *a, b, c ale triunghiului* abc *se află pe segmentele de cerc de mai sus, adică pe cercurile ortopolare* ω_a, ω_b, ω_c.

c) Triunghiul $P\gamma\gamma'$ este complimentarul triunghiului CMN inscris în cercul ABC. Cercul $P\gamma\gamma'$ este deci cercul lui EULER al triunghiului CMN; el trece deci prin C' şi e egal cu cercul lui EULER al triunghiului ABC.

Am văzut la Nr. 15 că avem:

$$\sphericalangle P\omega_b\,\gamma = \sphericalangle NAC = \sphericalangle NMC = \sphericalangle P\gamma'\gamma.$$

Deci ω_b se află pe cercul $P\gamma\gamma'C'$. Dar P este ortocentrul triunghiului $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$, iar cercul $P\gamma\gamma'C'$ fiind egal cu cercul $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ (după proprietatea 2), rezultă că cercul $P\gamma\gamma'C'$ trece şi prin ω_a, de oarece el este cercul lui CARNOT al triunghiului $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ relativ la latura $\omega_a\,\omega_b$. Avem deci următoarea proprietate:

Cercurile $P\gamma\gamma'C'$, $P\alpha\alpha'A'$, $P\beta\beta'B'$ *sunt egale cu cercul lui* EULER *al triunghiului* ABC *şi determină prin intersecţia lor centrele cercurilor ortopolare.*

Centrele cercurilor $P\gamma\gamma'C'$, $P\alpha\alpha'A'$ şi $P\beta\beta'B'$ sunt vârfurile unui triunghiu egal şi homotetic cu fiecare din triunghiurile $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ şi $A_1B_1C_1$.

V. CRISTESCU.

NOTE MATEMATICE

66. *Alte zece feluri de calcul* (Vezi Nota 24, pag. 208).

41. **Algebric.** Vezi *P. Boutroux.* L'idéal scientifique des mahématiciens. Pag. 243.

42. **Bisericesc.** *Stiffel Mich.* Deutsche Aritmethica inhaltend Hausrechnung, die deutsche Coss, die Kirchenrechnung, Nüremberg 1545.

43. **Casnic.** Idem.

44. **Cifre.** (fără...). *L. T. Huef.* Le calcul sans ciffres. Paris 1836.

45. **Dactilic.** Vezi *H. G. Zeuthen.* Histoire des mathématique. Paris. Pag. 224.

46. **Funcţional.** Vezi *Jullien Pacotte.* La pensée mathématique contemporaine. Pag. 21.

47. **Grafo-mecanic.** *M. d'Ocagne.* Cours de géométrie pure et appliquée. Tome II. Calcul graphomécanique.

48. **Limitelor.** Ca la 46. Pag. 26.

49. **Observaţional.** *E. T. Whittaker & G. Robinson.* The calculus of observations. Londra. 1924.

50. **Operaţional.** Vezi *Bulletin of the American mathematical Society.* Anul 1925. Pag 485.

(Va urmà). I. IONESCU.

67. *Asupra problemei* 3341. Cu ocazia împlinirii a 30 ani ai „*Gazetei Matematice*", D-l G. ŢIŢEICA a scris un articol la pagina 12 din acest an în care, între altele spunea:

«E adevărat că numărul 30 nu are, pe cât ştiu, proprietăţi aritmetice deosebite, care să-l scoată în evidenţă din rândul numerelor întregi; nu este nici număr prim, nici patrat perfect».

Mi-am amintit atunci de o proprietate a lui 30, semnalată de LANDAU în *Mathesis* Vol. XXXVII pag. 263 cu următorul cuprins:

«*O proprietate a numărului 30.* Indicatorul $\varphi(30)=8$; sunt deci 8 numere (cuprizând şi unitatea) inferioare lui 30 şi prime cu el. Ceeace este remarcabil este că aceste numere sunt tocmai numerele prime absolute, inferioare lui 30, adică 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29».

Am observat însă că această proprietate este caracteristică pentru numărul 30, în sensul că este cel mai mare număr care se bucură de acea proprietate, şi am propus problema 3341. In urmă, am aflat însă că LANDAU a arătat că această proprietate este caracteristică pentru 30, şi că o demonstraţie i-a fost dată de H. LORENT în acelaş an din *Mathesis*, pag. 386. Demonstraţia dată, cere cunoaşterea unei teoreme de aritmetică superioară, pe când aceea pe care o posed, nu cere asemenea cunoştinţi. De aceea las mai departe problema ca propusă.

I. IONESCU.

68. *Asupra numărului cu probleme nerezolvate.* Problemele următoare neavând primite soluţiuni complete, se vor considerà ca nerezolvate.

I. I.

No. 2609. Se dă seria:

$$1 - \frac{x}{T_1} + \frac{x^2}{T_1T_2} - \frac{x^3}{T_1T_2T_3} + \cdots,$$

în care T_i este al i-lea număr triunghiular. Pentru ce valoare a lui x suma seriei este nulă?

I. IONESCU.

No. 2889. Un număr este media aritmetică a sumei cifrelor lui şi a răsturnatului lui. Care este acel număr?

I. IONESCU.

No. 3081. Congresul panortodox dela Constantinopol a hotărît că din anii $\mathscr{M}100$ să nu fie bisecţi decât cei de forma $\mathscr{M}q+2$ şi $\mathscr{M}q+6$. Care este durata mijlocie a anului după această normă? Cum stă această durată faţă de anul astronomic?

I. IONESCU.

No. 3171. Numărul 30 se poate pune în două moduri sub forma $xy(x+y)$. Mai sunt alte numere care se bucură de aceiaşi proprietate?

I. IONESCU.

69. *Asupra numerelor cu cifre identice.* In nota 2 din «G. M.» Vol. XXXI, pag. 29, d-l GH. VASILIU scrie

$$1111..11 = 5555..55 + 5555..56.$$

Numărul 11..1 se mai poate pune şi sub interesanta formă $2 \times 55..5 + 1$, iar în general numărul *aaa..aa* se poate pune sub forma

$$a(2 \times 55...5 + 1).$$

COL. GH. BUICLIU.

70. *Fracţii pseudo-simetrice.* Putem să numim funcţiunea $f(x, y)$ pseudo-simetrică, dacă satisface egalitatea

$$(1) \qquad f(x, y) = f(ty, ux).$$

Aceste funcţiuni se bucură de o interesantă proprietate pe care voesc să o semnalez aci, şi anume:

Dacă funcţiunea pseudo-simetrică f(x, y) *se divide cu* ty — ux, *ea se divide şi cu* x — y *şi reciproc.*

Fie

$$f(x, y) = (ty - ux)\varphi(x, y),$$

atunci

$$f(ty, ux) = tu(x - y)\varphi(ty, ux) = f(x, y),$$

ceeace arată că $f(x, y)$, se divide cu $x - y$.

Reciproc, dacă

$$f(x, y) = (x - y)\varphi(x, y),$$

avem şi

$$f(ty, ux) = (ty - ux)\varphi(ty, ux) = f(x, y). \qquad \text{c. c. t. d.}$$

Se poate demonstrà foarte uşor că pentru ca un polinom $P(x, y)$, să fie pseudo-simetric trebue ca indicii t, u să fie legaţi prin relaţia:

$$(2) \qquad t \cdot u = 1.$$

Demonstraţia se face direct înlocuind în $P(x, y)$ pe x, y respectiv cu ty, ux.

TIBERIU POPOVICIU.

71. *Indicatori şi factoriale.* Imi propun să arăt că:

$$\varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi[(n-1)!] = n!$$

In adevăr, se ştie că dacă $d_1, d_2, \ldots d_{n-1}$ sunt divizorii lui N, excepţie făcând 1 şi N, atunci avem:

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_{n-1}) = N.$$

Ori divizorii lui $n!$, exceptând pe 1 şi factoriala însăşi, sunt:

$$2, 3, 4, 5, \ldots (n-1)!$$

c. c. e. d. d.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

72. *Asupra notelor:* 7 (XXIX) *şi* 64 (XXX).

Pentru ca $\varphi(A^m)$ să fie de forma B^n, în afară de soluţiile date de D-l CĂPITAN LINTEŞ în notele de mai sus, se pot combină factorii produsului:

$$\varphi(A^m) = a^{m\alpha-1}.b^{m\beta-1}\ldots(a-1)(b-1)\ldots,$$

aşa încât să putem obţine şi alte soluţii.

Spre exemplu, numărul: $N = 3^{2n}.7^{2m+1}$ poate aveà indicatorul de forma B^n fără să satisfacă condiţiunilor găsite de autorul notelor, căci în adevăr:

$$\varphi(N) = (2.3^n.7^m)^2, \quad \text{fără ca să avem:}$$

$$a - 1 = 2 = p^2 \quad \text{şi} \quad a^{\alpha-1}(b-1) = 3^{2n}.2 = q^2.$$

De altfel însuşi autorul notelor a prevăzut posibilitatea altor soluţiuni, deoarece îşi pune problema în felul dacă *există sau nu* asemenea numere.

O. POPEA.

73. *Asupra isocentrelor.* Chestiunea tratată de D-l N. AGRONOMOF în numărul trecut, a mai ocupat şi pe alţi matematiciani. In Vol. XVII (1910) din *L'Intermédiaire des mathématiciens* se găseşte următoarea chestiune pusă de D-l L. BICKART:

Trouver dans le plan d'un triangle ABC *un point* M *tel que, si l'on appelle* α, β, γ *les intersections de* AM, BC, CM *respectivement avec* BC, CA, AB, *on ait:*

$$A\alpha = B\beta = C\gamma,$$

M *est le foyer de la conique circonscrite au triangle donné et qui a pour centre le centre de gravité. Je demande une solution géométrique.*

In acelaş volum sunt date răspunsuri de WELCH, MALO, MAJOL. In volumul următor sunt unele observaţiuni făcute de BARISIEN şi WELCH acestei chestiuni.

BICKART a generalizat problema in volumul XVII punând condiţiunea:

$$\frac{A\alpha}{m} = \frac{B\beta}{n} = \frac{C\gamma}{p}.$$

Punctul M este la intersecţia a două cuartice care au un punct dublu comun şi se taie odată în fiecare punct ciclic.

Problema are în genere 10 soluţiuni; studiul realităţii lor nu este făcut. Punctele sunt date de ecuaţiile în coordonate normale:

$$\frac{y^2+2yz\cos A+z^2}{a^2m^2(by+ct)^2} = \frac{z^2+2zx\cos B+x^2}{b^2n^2(cz+ax)^2} = \frac{x^2+2xy\cos C+y^2}{c^2p^2(ax+by)^2}.$$

Din cele ce preced, pare că ar fi mai nimerit să se zică isocentrelor, *punctele lui* BICKART

I. IONESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Chestiuni propuse la Exerciţiile scrise ale examenului de Capacitate al profesorilor de matematici, ţinut la Iaşi în Iunie 1926.

Chestiunile propuse la prima probă scrisă de Matematici elementare.

SPECIALITATEA PRINCIPALĂ.

I. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând: suprafaţa, perimetrul şi un unghiu. Condiţia de posibilitate a problemei.

II. Se consideră şirul de numere x_k, definit prin relaţiile de recurenţă:

$$x_1^2 = px_0 + q$$

$$x_2^2 = px_1 + q$$

$$\vdots$$

$$x_n^2 px_{n-1} + q$$

$$\cdots\cdots$$

p, q, x_0 fiind pozitive şi luând valorile pozitive ale numerelor x_k. Să se arate:

1°. Că acest şir este crescător sau descrescător, după cum x_0 este mai mic sau mai mare decât rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$x^2 - px - q = 0.$$

2°. Să se găsiască limita acestui şir.

3°. Să se interpreteze în modul acesta

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

III. Să se rezolve şi să se discute sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} x + by + z &= 1 \\ ax + y + dz &= 1 \\ x + cy + z &= 1. \end{aligned}$$

IV. Să se determine polinomul de gradul 3, care ia valorile $y = -7$, $y = +1$, $y = -1$, $y = -7$, respectiv pentru $x = -1$, $x = 0$, $x = +1$, $x = +2$, şi să se studieze variaţia lui.

V. Se dă un patrat ABCD de latura a şi un punct M, în interiorul lui. Se uneşte M cu vârfurile opuse B şi D şi din M se coboară perpendicularele MP şi MQ, respectiv pe AB şi AD.

Să se determine poziţiile punctului M, astfel ca volumurile rezultate din învârtirea triunghiurilor MDQ şi MPB în jurul lui AD, să fie egale.

In special să se afle poziţia lui M de pe diagonala BD.

SPECIALITATEA SECUNDARĂ.

I. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x.$$

II. Să se studieze seriile: $u_n = \frac{n}{2^n}$, $u_n = \frac{2_n^2+1}{n!}$.

III. Să se calculeze integrala $I = \int_1^2 \frac{(x+1)dx}{x(x^2+1)}$.

IV. Chestiunile III, IV, V din specialitatea principală.

Chestiunile propuse la a 2-a probă scrisă de Matematici din materia de licenţă.

SPECIALITATEA PRINCIPALĂ.

I. O funcţie analitică are ca parte reală $P(x, y) = \frac{y}{(1+x)^2+y^2}$. Care este partea imaginară a acestei funcţiuni? Să se scrie apoi funcţia sub forma $f(z)$.

II. O ecuaţie diferenţială liniară

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} + Py + Q = 0,$$

admite soluţiile particulare: $y_0 = x$

$$y_1 = x \sin x.$$

1°. Să se formeze integrala generală;

2°. Să se calculeze P şi Q din (1);

3°. Să se demonstreze soluţia $y(x)$, care ia valoarea $2u$ în punctul $x = u$.

III. Ecuaţia generală a hyperbolelor echilatere tangente în O la Ox şi având centrele lor pe dreapta $x = a$. Prin fiecare punct P al planului trec două hyperbole. Regiunile planului unde trebue să se găsiască punctul P pentru ca acestea să fie reale. Învelitoarea axelor acestor hyperbole.

IV. In ecuaţia cu derivate parţiale $pxz + qyz = y^2 - x^2$, unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, se iau ca noui variabile independente u şi v, definite de relaţiile: $x^2 = 2u$, $y^2 = 2v$.

Ce devine ecuaţia dată? Să se integreze această ecuaţie şi să se arate că printre suprafeţele integrale există o familie de cuadrice.

Natura acestor cuadrice.

V. Să se determine elipsoidul central de inerţie al unei jumătăţi de cerc, omogenă.

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Vol. XL. No. 6. Iunie 1926. Bruxelles. † J. Neuberg, de L. Godeaux. Asupra sinormalelor în conice, de Cl. Servais. Asupra invarianţei legei lui Gauss, de C. Larquin. Mecanica şi triunghiuri speciale, de V. Thébault. Exerciţii de geometrie analitică, de Ad. M.

Curierul matematic. Anul II. No. 5. Iunie 1926. Bucureşti. (Litografiat). O categorie de relaţii trigonometrice, de I. C. Vasiliu. Relaţii în legătură cu un patrulater, de C. N. Popescu.

P. Sergesco. Quelques remarques sur les courbes unicursales. (Extras din Comptes rendus du Congres de Liège de 1924 de *l'Association* française pour l'avancement des sciences). Paris 1926.

P. Sergesco. *Sur la résolution en entiers de l'équation* $ax^2 + b = y^2$. (Extras din Comptes rendus du Congres des Sociétés savantes en 1925· Sciences). 1926.

Journal de mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. Anul 50. No. 19 şi 20. Iulie 1926. Paris.

Foaia matematică. Anul III. No. 5. Mai 1926. Chişinău. Triunghiuri cosogonale, de M. GRÜNBAUM.

Idem. No. 6. Iunie. Asupra restului împărţirii a două polinoame, de M. I. FOCŞĂNEANU.

Idem. No. 7. Iulie. Chestiuni de studiat, de M. GRÜNBAUM. Asupra unor puncte, de V. COŞNIŢĂ.

CONSTANTIN C. TEODORESCU. *Curs de rezistenţa materialelor.* Tipografia Şcoalei speciale de Artilerie. Timişoara 1926.

Tipărirea cursurilor pentru Şcoli speciale, şi mai ales a cursurilor tecnice, care cer figuri numeroase, pagini întregi cu formule matematice, table numerice, planşe, etc., este astăzi foarte anevoioasă. Costul tipăritului este foarte ridicat; elevii şcoalelor tecnice sunt în majoritate lipsiţi de mijloace, chiar pentru traiul lor în timpul anilor de studii, astfel în cât puţini sunt care îşi pot procură cursuri tipărite şi se mulţumesc cu notele luate în clasă; inginerii, şi în general intelectualii, sunt azi foarte slab retribuiţi pentru ca să-şi poată plăti luxul de a-şi înbogăţi bibliotecile lor cu volume noi apărute, şi se mulţumesc cu cele pe care le au sau le pot găsi pela anticari.

D-l Inginer Şef C. C. TEODORESCU, vechiu şi distins colaborator la această Revistă, actualmente profesor la Şcoala politecnică din Timişoara, unde predă cursul de Rezistenţa materialelor, a căutat să învingă rezistenţele la tipărire din ziua de azi; a reuşit şi a dat la lumină un volum de 256 pagini, care conţine materia pe care D-sa o predă elevilor din Secţiunea electro-mecanică şi Secţiunea de mine dela acea Şcoală, în timpul a doi ani de studiu. D-sa a putut obţine acest rezultat condensând expunerea, de multe ori la minimum inteligibil, făcând sacrificii de muncă şi de bani şi având concursul colegului nostru, D-l Colonel GH. BUICLIU, Comandantul Şcoalei speciale de artilerie din Timişoara, care a oferit autorului atelierele Şcoalei pentru tipărire, căci, după cum se spune în Prefaţă, „fără de acest sprijin şi faţă de preţurile patronilor tipografi, tipărirea unui asemenea volum ar fi fost o imposibilitate materială".

Am început această recensie cu expunerea dificultăţilor de tipărire, căci necesitatea de a condensă cât mai mult materia, de a o indesă, de a o comprimă cât se poate, — ca să vorbim în termeni de rezistenţa materialelor, — a făcut ca, pe ici, pe colo, să se întreacă limitele admisibile şi să se iviască deformaţiuni permanente în tratarea şi expunerea chestiunilor. Numai aşă se explică lipsa de claritate şi de preciziune la tratarea unor chestiuni, pe care de altfel autorul dovedeşte că le posedă în întregime; numai aşă se explică lipsa de desvoltări mai largi la introducerea ipotezelor de calcul precum şi unele salturi mari şi bruşce la stabilirea formulelor, ecuaţiilor sau la transformările lor. S'a mers până acolo în cât, dacă subiectul se găseă în titlu, expunerea a început cu predicatul. Astfel la pagina 32 găsim:

„20. *Ipoteza de repartiție a rezistențelor dedusă din experiență.* Este aceiași ca și în cazul întinderii, și ne conduce la aceiași concluzie, că rezistențele sunt uniform distribuite".

Iar la pagina 195 găsim:

„102. *Determinarea rezistențelor interioare.* Sunt produse de momentul încovoietor, forța normală și forța tăetoare. Acestea (?) din urmă sunt însă neglijabile, așă că le vom luă în considerare pe cele dintâiu."

* * *

Cursul este împărțit în 9 capitole. Cap. I se ocupă cu *Propietățile materialelor.* Primele patru paragrafe referitoare la echilibru elastic, rezistențe și deformațiuni ar fi fost mai bine să se treacă într'un capitol special, ca introducere în Cursul de Rezistența materialelor, căruia de altfel nu i s'a dat definițiunea. Găsim numai în prima pagină, aliniatul al doilea:

„In rezistența materialelor corpurile se deformează, distanța între puncte se schimbă, ipoteza rigidității cade. Se naște atunci întrebarea dacă mai putem aplică în rezistența materialelor regulele de echilibru ca și în mecanică."

Nu s'a spus însă mai înainte ce este „rezistența materialelor" și ce urmărește dânsa. Capitolul arată rezultatele ce le dă încercările de materiale, relațiile dintre rezistențe și deformații, limita de elasticitate și de rupere, lucrul mecanic de deformație, influiența temperaturii, și rezistențele admisibile în construcțiuni. Trebuiau date explicațiuni la fig. 12 și la căderea în desuetudine a legilor lui WÖHLER.

Cap. II este intitulat *Rezistențe simple.*. Aci se studiază fenomenele de întindere, de compresiune. de tăere, de torsiune, de încovoiere și de încălzire a corpurilor. Se arată cum se calculează rezistențele, deformațiile, lucrul mecanic și se tratează diferite aplicațiuni practice printre care și îmbinările cu buloane, nituri sau cu pene. Chestiunea presiunilor pe găurile de nituri nu este destul de desvoltată. La pag. 55 trebuia explicat de ce și când dispare y'.

Cap. III se ocupă cu *încovoierea grinzilor drepte*, și anume cu determinarea momentelor încovoietoare și a forțelor tăetoare pentru diferite feluri de încărcări și de rezemări, pentru sarcini direct sau indirect aplicate, fixe sau mobile, și cu metoda liniilor de influiență. Problemele sunt tratate analitic și grafic. In lipsă de referință la un anumit curs de statică grafică, ar fi fost necesar un capitol introductiv cu elementele absolut necesare pentru aplicațiunile care se fac cu ajutorul staticei grafice. Stabilirea relațiunii dintre momentul încovoietor și forța tăetoare este prea sumar făcută: lipsește cazul discontinuității momentelor și convențiunile pentru concordanța semnelor. Capitolul se continuă cu momentele de inerție, variațiunea lor, calculul lor analitic și grafic, cercul lui MOHR, elipsa de inerție. Urmează apoi determinarea rezistențelor în grinzi în diferite cazuri, lunecarea longitudinală, rezistențe principale, rezistențe reduse și grinzi nituite. Se studiază apoi deformația grinzilor, calculul analitic și grafic al săgeților, cazurile de solicitări combinate din încovoiere cu tensiune și compresiune, aplicate la studiul masivelor de zidărie omogene și neomogene, cazurile de solicitare la încovoiere și torsiune cu

aplicare la calculul arborilor. Capitolul se termină cu studiul flambagiului, dându-se formula lui EULER şi critica ei.

Acest capitol este prea vast: el ocupă mai mult ca 1/3 din tot volumul. El ar fi trebuit subdivizat. Studiul reazemelor e prea succint. La pag. 124 în loc de *pol* trebuie pus *antipol*. La studiul flambagiului lipseşte noţiunea de *lungime de flambaj* şi arătarea posibilităţi de condiţiuni de flambaj în diferite plane; la pag. 145 cuvântul *parabolă* trebuie înlocuit cu *iperbolă*, cum de altfel este scris pe figura corespunzătoare. Calculul stâlpilor cu zăbrele este prea sumar.

Cap. IV se ocupă cu *Calculul construcţiunilor*. Acì s'au pus chestiuni prea disparate pentru a se putea întruni în acelaş capitol. Se începe cu calculul cablelor şi al curelelor, se trece la calculul sistemelor articulate şi se termină cu împingerea pământului! Afirmaţiunea dela pag. 158 că se dispune de două metode pentru determinarea tensiunilor în bare, nu este justă, întru cât sunt mai multe metode.

Cap. V se ocupă cu *Teoria gererală a grinzilor* cu ajutorul lucrului mecanic de deformaţiune şi lucrului virtual., legile lui CASTIGLIANO şi MAXWELL şi aplicaţiunile lor la sisteme static nedeterminate, printre care grinzile continui, care ocupă numai două pagini.

Cap. VI se ocupă cu *Incovoierea barelor curbe* după metoda din cursul lui BACH, cu aplicaţiuni la tuburi, inele, lanţuri.

Cap. VII se ocupă cu *Starea rezistenţelor într'un corp*, stabilindu-se formulele generale pentru rezistenţe şi deformaţiuni, cu aplicaţiuni la câtevà cazuri simple.

Cap. VIII se ocupă cu *Calculul plăcilor şi vaselor*, şi în special plăcile circulare simplu rezemate sau încastrate pe de margini supuse la presiuni uniforme, sau la o sarcină concentrată în mijlocul lor. Se dau şi metode aproximative pentru calculul plăcilor. Se tratează apoi problema vaselor cu pereţii groşi, a discurilor supuse la rotaţiuni foarte repezi, şi se termină cu calculul rezervoarelor.

Cap. IX intitulat *Oscilaţiuni*, tratează câtevà probleme simple de eforturi dinamice, rezistenţe oscilatorii şi de propagarea rezistenţelor.

* * *

După cum se vede volumul conţine un material foarte bogat, şi în special toate chestiunile care interesează pe inginerii mecanici. Chestiunile sunt bine tratate, însă o repet, foarte condensat. Un specialist chiar nu poate urmări raţionamentele şi calculele decât cu condeiul în mână. Elevilor le trebuiesc explicaţiuni desvoltătoare. Chestiunile sunt lămurite prin exemple bine alese, însă şi acestea prea sumar expuse. Trecerea dela date la ecuaţii, transformările de calcul, înlocuirea literelor cu valori numerice, se fac prea brusc. Datele problemei nu se pun toate dela început, ci se introduc treptat cu nevoile calculului, unităţile nu se stabilesc dela început, ci se schimbă în cursul calculelor. Trecerea dela un exemplu la altul se face uneori fără nici o prevenire, fără titluri, fără numerotare. Cu toate că mânuiesc chestiuni de rezistenţa materialelor de aproape 35 ani, totuşi am întâmpinat piedici la

citirea unora din exemplele numerice. Expunerea s'a comprimat prea mult. Iată câteva exemple spre a invederà cele spuse mai sus. In exemplul dela pag. 111, momentul sarcinilor mobile este dat în *tm*, al sarcinilor permanente în *kgm*, iar la calculul modulului de rezistenţă, ele sunt introduse în *kgcm*, rezistenţa admisibilă se introduce 1200, fără să se fi impus aceasta dinnainte. De asemenea nu s'a dat distanţa dintre sarcini. In expresiunea reacţiunii, cititorul trebuie să stabilească singur că 100 este pus în loc de 5×20 deodată, că 6,66 este două treimi din lungimea de 10m a grinzii şi că 1.5 trebuie să fie 1,5 distanţa dintre osii şi că în 18 dela numitorul lui A este o eroare de tipar, căci ar fi trebuit tipărit 10.

Nomenclatura se resimte de lipsa unei sistematizări în tecnica română. Autorul nu a ţinut seamă de nomenclatura matematică stabilită de Societatea română de ştiinţe, redată în Vocabulariul publicat în Biblioteca „Gazetei Matematice.“ Sunt cuvinte care *şochează* limba română, ca de exemplu cuvântul *şoc* întrebuinţat curent de autor, când ar fi putut fi înlocuit fără nici un inconvenient cu *ciocnire*, *isbire*, *sdruncinare*, după cazuri.

Notaţiunile arătate la începutul cursului sunt inspirate din tratatele streine: unele ca σ *şi* τ pentru rezistenţe sunt în uz în Germania; altele ca Ω pentru secţiuni sunt în uz în Franţa, totuşi pe unele locuri a scăpat şi notaţiunea germană *F* pentru secţiuni, fără a se anunţà, ca la pagina 191. Tabloul notaţiunilor arată şi unităţile corespunzătoare, dar ele nu s'au respectat peste tot. Ar fi fost util ca să se arate, la fiecare noţiune, şi pagina la care se introduce spre a i se putea cercetà mai de aproape sensul când cinevà, căutând a anumită chestiune, dă peste o notaţiune necunoscută lui.

Figurile sunt destul de numeroase şi clare. La unele nu s'au pus toate literele de care se vorbeşte în text, la altele lipsesc cote, iar altele nu sunt tocmai bine propoţionate cu dispoziţiunile reale din practică, deşi aceasta nu are nici un inconvenient pentru studiul rezistenţei materialelor. Aci însă este bine să părăsim axioma matematicianilor că geometria face raţionamente bune pe figuri rele, şi să căutăm să imprimăm elevilor tecnici cât mai mult darul de a lucrà pe figuri proporţionate cu realitatea lucrurilor. La fig. 120 variaţia momentelor între roţi nu este liniară.

Pe ici, pe colo, se găsesc şi unele scăpări din vedere, sau de precizare a aproximaţiilor făcute. Astfel la pag. 110 din greutatea proprie trebuia scăzută greutatea osiei şi a roţilor; la pag. 160 lungimea de flambaj trebuia luată de 8m, căci articulând grinda la mijloc acolo se poate ivì un punct de frângere, la pag. 163 concluziunea de simetrie cere şi întoarcerea cu 180° a sarcinilor, etc.

Imprimarea este bine îngrijită, formulele bine prezentate, erori de tipar puţine care să pună în încurcătură pe cititor. La stabilirea formulei lu EULER pag. 140 lipseşte exponentul 2 la; alt exponent pierdut la pag. 196. etc. Putem spune că tipografiei Şcoalei speciale de Artilerie i se pot încredinţà tipăriri de cărţi matematice ori cât de dificile de cules.

Termin aci această lungă recensiune a Cursului D-lui inginer Şef C. C. TEODORESCU. Uvragiul ese de regulă din cadrul celor pe care recensionăm în „*Gazeta Matematică*“, însă am ţinut aci ca să arăt mai mult unele norme ce

trebuiesc avute în vedere la tipărirea de cărţi de matematici aplicate, de cât a face o critică operei autorului, care de altfel mi-a şi cerut-o, prin scrisoarea cu care mi-a trimis cartea, în scopul de a aveà „o călăuză pentru predarea cursului şi la o viitoare ediţie“ pe care îi dorim să o vedem cât mai repede şi care suntem convinşi că va fi ireproşabilă. Aducem însă fără înconjur toate laudele autorului pentru munca şi conştiinciositatea depusă în alcătuirea şi tipărirea cursului, şi pentru curagiul de a întreprinde publicarea lui în condiţiunile grele de azi.

ION IONESCU.

CERERI.

Răspuns la cererea 125. Numerele cerute se pot găsi în o broşură tipărită la Paris, editor GAUTHIER VILLARS & Co., Quai des Grands Augustins 55, sub titlul:

„*Table des nombres premiers et de la décomposition de nombres* de 1 à 10000, par G. INGHIRAMI, *revue et corrigée* par le DR. PROMPT“ în anul 1919.

I. C. CRISTESCU.

Societatea Gazeta Matematică posedă aceste table. Menţionez că la numărul 4241 este o eroare de tipar, care ar puteà face să se creadă că acest număr nu este prim.

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2347. *Fiind dat un triunghiu* ABC, *să însemnăm cu* D *al doilea punct de intersecţie al cercurilor ce trec prin punctele* A *şi* C, A *şi* B *şi tangente respectiv la* AB *şi* AC. *Să se arate că* AD *este simediana unghiului* A *în triunghiul* ABC *şi că simetricul punctului* A *în raport cu* D, *este pe cercul circumscris triunghiului* ABC.

N. ABRAMESCU.

Soluţie dată de D-l CONSTANTIN I. GEORGESCU (Elev la Şcoala Politechnică, Bucureşti).

Se observă pe figură că unghiurile BAD, ACD sunt egale, ca având aceiaşi măsură în cercul ACD şi analog, unghiurile ABD,

CAD sunt egale. Triunghiurile ABD, CAD sunt deci direct asemenea, în cât

$$\overline{DB} : \overline{DA} = c : b \quad \text{şi} \quad \overline{DA} : \overline{DC} = c : b$$

$$\therefore \qquad \overline{DB} : \overline{DC} = c^2 : b^2.$$

Fie M punctul unde AD taie latura BC. Unghiurile ADB, CDA fiind egale, AD este bisectoarea unghiului BDC; deci

$$\overline{MB} : \overline{MC} = \overline{DB} : \overline{DC} = c^2 : b^2,$$

de unde conchidem că AM este simediana laturei BC.

Fie α şi β punctele unde AD şi CD taie a doua oară cercul ABC. Avem:

$$\sphericalangle B\beta\alpha = \sphericalangle BA\alpha = \sphericalangle AC\beta = \sphericalangle AB\beta,$$

deci $A\alpha$ este paralelă cu $B\beta$ şi figura $A\alpha B\beta$ este un trapez isoscel înscris în cercul ABC.

De altă parte avem:

$$\sphericalangle \alpha\beta C = \sphericalangle \alpha AC \quad \therefore \quad \sphericalangle \alpha\beta D = \sphericalangle ABD.$$

Dar am demonstrat că $\sphericalangle B\beta\alpha = \sphericalangle AB\beta$; deci triunghiul $DB\beta$ este isoscel, de unde conchidem că D este mijlocul lui $A\alpha$.

Notă. Dacă observăm că cercurile din enunţ sunt cercurile adjuncte (CA) şi (BA), găsim că problema 2347 este cunoscută sub o formă puţin diferită (a se vedea: F.G.—M., *Exercices de géométrie* ediţia, VI. teorema 1056, pag. 1217, *Rouché et de Comberousse, Traité de géométrie plane*, nouvelle édition, p. 480 şi 481, teorema 45 şi corolariul 1°, *„Gazeta Matematică"*, Vol. XXVIII p. 114 şi 115, problema 2934), ceeace a fost observat şi de D-l Const. I. Georgescu.

V. C.

PROBLEMA 2358. *Să se afle limita expresiei:*

$$\frac{(x^a - 1)(x^b - 1)\ldots(x^l - 1) - abc\ldots l(x-1)^n}{(x-1)^{n+1}},$$

pentru $x = 1$; a, b, ... l *fiind* n *numere întregi.*

H. Cuşută.

Soluţie dată de D-nii: Virgil S. Bârsănescu, I. T. Bârsu, N. I. Ciorănescu, Pincu Katz, C. H. Nicolau, Th. Nicolau,

ILIE POPA, O. POPEA, C-TIN C. POPOVICI, GH. RIZESCU şi TEODOR T. STOICESCU.

Fiecare din factorii $(x^a - 1), (x^b - 1), \ldots (x^l - 1)$, sunt divizibili cu $x-1$, astfel că simplificând prin $(x-1)^n$ expresia dată pe care s'o notăm cu E, devine:

$$E = \frac{(x^{a-1}+\ldots+x+1)\,(x^{b-1}+\ldots+x+1)\ldots(x^{l-1}+\ldots+x+1) - ab\ldots l}{x-1}.$$

Pentru $x = 1$, această expresie se prezintă sub forma nedeterminată 0/0, putem deci aplică regula lui HÔPITAL.

$$\lim_{x=1} E = \lim_{x=1} \sum [a-1)x^{a-2} + (a-2)x^{a-3} + \ldots + 1]\,(x^{b-1} + \ldots$$

$$\ldots + x + 1)\ldots(x^{l-1} + \ldots + x + 1)$$

$$= \sum \frac{a(a-1)}{2}\, b \ldots l = \frac{ab\ldots l}{2}(a - 1 + b - 1 + \ldots + l - 1)$$

$$= \frac{ab\ldots l}{2}(a + b + \ldots + l - n).$$

Observare. Unii corespondenţi au observat că problema aceasta este propusă şi rezolvată şi în «*Culegere de Probleme de Algebră*» de D-nul A. GH. IOACHIMESCU (ed. IV), Cap. XX prob. 27. A se vedeà şi soluţia dată acolo.

PROBLEMA 2511. *Să se demonstreze că într'un heptagon regulat* ABCDEFG, *avem relaţia*

$$\frac{l - d_2 + d_1}{l + d_2 - d_1} = \frac{d_2 - l}{d_2 + l},$$

l, d_1, d_2 *fiind respectiv lungimile dreptelor* AB, AC, AD *(enunţ rectificat).*

E. STIHI.

1. *Soluţie* dată de D-nii: ION M. MIU (Elev în Cl. VIII, Liceul Caracal) şi RENÉ I. SPATHY (Elev în Cl. VII, Liceul Mateiu Basarab).

Aplicând patrulaterului înscris ABDE teorema lui PTOLOMEU, avem:

$$AB.DE + BD.AE = AD.BE. \qquad (1)$$

Insă $BE = AE = AD = d_2$, fiindcă sunt coarde care subîntind arce egale; iar $BD = AC = d_1$ şi $AB = DE = l$, pentru acelaş motiv. Deci (1) se poate scrie

$$l^2 + d_1 d_2 = d_2^2 \qquad \therefore \qquad d_2(d_2 - d_1) = l^2$$

$$\therefore \quad \frac{l}{d_2 - d_1} = \frac{d_2}{l} \qquad \therefore \qquad \frac{l - d_2 + d_1}{l + d_2 - d_1} = \frac{d_2 - l}{d_2 + l}.$$

2. *Soluţie* dată de D-nul RENÉ I. SPATHY (Elev Cl. VII, Liceul Mateiu Basarab).

Fie H intersecţia dreptelor AD şi CE. Triunghiurile ADE şi EDH sunt isoscele şi asemenea, ceeace se vede uşor luând măsura unghiurilor în cercul în care e înscris heptagonul. De aci rezultă

$$\overline{DE} : \overline{DH} = \overline{AD} : \overline{DE}. \qquad (2)$$

Insă $DE = l$, $AD = d_2$, iar $DH = DA - HA$. Dar $HA = CA = d_1$, căci triunghiul ACH este isoscel. Relaţia (2) devine deci

$$\frac{l}{d_2 - d_1} = \frac{d_2}{l} \qquad \therefore \qquad \frac{l - d_2 + d_1}{l + d_2 - d_1} = \frac{d_2 - l}{d_2 + l}.$$

Notă. 1. D-nul R. I. SPATHY aplicând teorema lui PTOLOMEU patrulaterului înscris ACDE, obţine relaţia

$$d_1 d_2 = l d_1 + l d_2. \qquad (3)$$

Relaţia (3) pusă sub forma

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2},$$

face obiectul problemei 669 propusă în *Mathesis* 1890, pag. 47.

2. In cercul cu raza 1, avem:

$$AB = l = 2\sin\frac{\pi}{7}, \quad AC = d_1 = 2\sin\frac{2\pi}{7}, \quad AD = d_2 = 2\sin\frac{3\pi}{7},$$

iar ambele părţi ale relaţiei propuse sunt egale cu

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{7}.$$

V. C.

PROBLEMA 2829. *Să se stabiliască identitatea:*

$$\prod_{n=1}^{n=5} (x^2 + a^2{}_n) = (x^5 - s_2 x^3 + s_4 x)^2 + (s_1 x^4 - s_3 x^2 + s_5)^2,$$

în care s_i *înseamnă suma produselor luate câte* i *în toate modurile posibile a cantităţilor* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Să se generalizeze.

V. ALACI.

Soluție dată de D-nii: M. ADAM (Constanța), NICOLAE ALEXIU (Constanța), MARTIN BERCOVICI, VICTOR BUCHNER (București), I. COȘEREANU (Timișoara), IOAN B. FLORESCU (Craiova), C-TIN I. GEORGESCU (Craiova), N. GEORGESCU-ROEGEN, EMIL MANOLESCU, GH. D. POPESCU (Iași), TIBERIU POPOVICI (Arad), EMIL ȘTEFĂNESCU (București), ALEXANDRU TAUBER (Botoșani), N. TEODORESCU (București) și ION C. VASILIU.

Putem scrie, evident:

$$(x+ia_1)(x+ia_2)(x+ia_3)(x+ia_4)(x+ia_5)=x^5+is_1x^4-s_2x^3-is_3x^2+s_4x+is_5=(x^5-s_2x^3+s_4x)+i(s_1x^4-s_3x^2+s_5)$$

$$(x-ia_1)(x-ia_2)(x-ia_3)(x-ia_4)(x-ia_5)=(x^5-s_2x^3+s_4x)-i(s_1x^4-s_3x^2+s_5) \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Înmulțind aceste relațiuni avem:

$$\prod_{n=1}^{n=5}(x^2+a^2{}_n)=(x^5-s_2x^3+s_4x)^2+(s_1x^4-s_3x^2+s_5)^2.$$

Generalizare. Considerăm produsul:

$$(x+ia_1)(x+ia_2)\ldots(x+ia_n)=x^n+is_1x^{n-1}-s_2x^{n-2}+\ldots \ldots+i^{n-1}s_{n-1}x+i^n s_n \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Dacă:

$$(1)\quad n=2p,\ \prod_{n=1}^{n}(x+ia_n)=[x^{2p}-s_2x^{2p-2}+s_4x^{2p-4}-\ldots+(-1)^p s_{2p}]+i[s_1x^{2p-1}-s_3x^{2p-3}+\ldots+(-1)^p s_{2p-1}x].$$

$$(2)\quad n=2p+1,\ \prod_{n=1}^{n}(x+ia_n)=[x^{2p+1}-s_2x^{2p-1}+\ldots+(-1)^p s_{2p}x]+i[s_1x^{2p}-s_3x^{2p-2}+\ldots+(-1)^p s_{2p+1}].$$

Schimbând pe i în $-i$, avem:

$$(3)\quad n=2p,\ \prod_{n=1}^{2p}(x-ia_n)=[x^{2p}-s_2x^{2p-2}+\ldots+(-1)^p s_{2p}]-i[s_1x^{2p-1}-s_3x^{2p-3}+\ldots+(-1)^p s_{2p-1}x]$$

$$(4)\quad n=2p+1,\ \prod_{n=1}^{2p+1}(x-ia_n)=[x^{2p+1}-s_2x^{2p-1}+\ldots+(-1)^p s_{2p}x]-i[s_1x^{2p}-s_3x^{2p-2}+\ldots+(-1)^p s_{2p+1}].$$

Înmulțind relațiile (1) și (3), apoi (2) și (4), obținem:

Dacă, $n = 2p$:

$$\prod_{n=1}^{2p} (a^2 + a^2{}_n) = [x^{2p} - s_2 x^{2p-2} + \ldots + (-1)^p s_{2p}]^2 + [s_1 x^{2p-1} - s_3 x^{2p-3} + \ldots + (-1)^p s_{2p-1} x]^2.$$

Dacă, $n = 2p + 1$:

$$\prod_{n=1}^{2p+1} (x^2 + a^2{}_n) = [x^{2p+1} - s_2 x^{2p-1} + \ldots + (-1)^p s_{2p} x]^2 + [s_1 x^{2p} - s_3 x^{2p-2} + \ldots + (-1)^p s_{2p+1}]^2.$$

Observare. D-l Alexandru Tauber, observă că:
Dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, avem:

$$(x^2 + a^2)^n = [x^n - C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} + \ldots]^2 + C_n^1 a x^{n-1} - C_n^3 a^3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} + \ldots]^2,$$

ceeace demonstrează că: *Dacă un număr întreg este suma a două patrate, orice putere întreagă a sa, este suma a două patrate.* (Problema 3151 propusă în «*G. M.*» XXIX, pag. 279 de D-l M. Ghermănescu).

PROBLEMA 3174. *Fie* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *intersecțiunile mediatoarelor unui triunghiu* ABC *cu cercul circumscris.*

Să însemnăm cu S_a, S_b, S_c *dreptele lui* Simson *ale punctelor* A_1, B_1, C_1 *în raport cu triunghiul* ABC *și cu* S'_a, S'_b, S'_c *dreptele lui* Simson *ale punctelor* A_2, B_2, C_2.

Să se demonstreze că dreptele din fiecare grup (S_a, S_b, S_c), (S'_a, S_b, S'_c), (S'_a, S'_b, S_c), (S_a, S'_b, S'_c) *sunt concurente.*

Marin Ștefan.

Fie A', B', C' mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$; M_1 și M_2 proiecțiunile punctelor A_1 și A_2 pe AB. Să arătăm că dreptele $A'M_1$ și $A'M_2$ sunt bisectoarele (interioară și exterioară) ale unghiului B'A'C'. Patrulaterul $A_1M_1A'B$ este înscris în cercul descris pe $\overline{A_1B}$ ca diametru, având $\sphericalangle A_1M_1B = \sphericalangle A_1A'B = 90^0$. Folosindu-ne de măsura unghiurilor înscrise în același cerc, avem că

$$\sphericalangle BM_1A' = \sphericalangle BA_1A' = \sphericalangle BA_1A_2 = \sphericalangle BAA_2,$$

deci dreptele M_1A' şi AA_2 sunt paralele. Insă $\sphericalangle B'A'M_1 = \sphericalangle A'M_1B$, fiind alterne interne formate de drepte paralele, $\sphericalangle A'M_1B = \sphericalangle BAA_2$, fiind corespondente formate de drepte paralele, $\sphericalangle BAA_2 = \sphericalangle A_2AC$, având aceiaşi măsură, iar $\sphericalangle A_2AC = \sphericalangle M_1A'C'$, fiind ascuţite şi având laturile paralele; deci $\sphericalangle M_1A'C' = \sphericalangle M_1A'B'$, adică *dreapta* S_a *este bisectoarea interioară a unghiului* $B'A'C'$.

Observând că AA_1 este bisectoarea exterioară a unghiului BAC şi că $\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle A_1A_2B = \sphericalangle A'A_2B = 180^0 - \sphericalangle A'M_2B = \sphericalangle A'M_2A$, deducem că dreapta S'_a este bisectoarea exterioară a unghiului $B'A'C'$ ($A'M_2 \parallel AA_1$, $A'M_2 \perp AA_2$, $AA_2 \parallel A'M_1$, deci $A'M_2 \perp A'M_1$).

Dreptele S_a, S'_a, S_b, S'_b, S_c, S'_c fiind bisectoarele interioare şi exterioare ale triunghiului $B'A'C'$, avem proprietăţile enunţate.

Observare. Unii rezolvitori ai problemii de faţă au arătat că ea este o aplicaţiune interesantă a articolului «*Dreapta lui Simson*», publicat de D-l Tr. Lalescu în «Rev. Mat. Timişoara», An. II, No. 10.

Au rezolvat problema: † Ovidiu Popea, D-nii: M. I. Adam, Radu Adam, M. A. Bernştein, N. G. Botea, C. I. Ciorănescu, Matei M. Drăghiceanu, C. Fedeleş, Ioan I. Georgescu, F. S. Goldştein, C. T. Ionescu-Bujor, Paul I. Ionescu, Valeriu Manafu, M. I. Pătroianu, Const. C. Popovici, Dorin Popescu, Ath. Radev (Imbol), Gh. Simionescu, Tr. Udrisky, Ioan C. Vasiliu, Leon Weiss.

PROBLEMA 3233. *Se cere un patrat perfect de patru cifre, care are ca rădăcină suma celor două numere care se obţin despărţind numărul în două, printr'o linie dusă prin mijlocul lui.*

G. Dâmboianu.

Această problemă este identică cu problema 2367 propusă în «G. M.» XXI de D-l O. Ornănescu. Soluţiile, împreună cu rezolvarea, se găsesc la locul cuvenit; ele sunt:

$$9801 = 99^2 \quad , \quad 2025 = 45^2 \quad , \quad 3025 = 55^2.$$

Au trimis soluţiuni la această problemă, D-nii: N. Beschea, P. Bleiweiss, Gh. Călin, I. Cristescu, F. Dinescu, I. Georgescu, F. Goldstein, M. Iliescu, S. Katz, D. Milculescu şi A. Roşu.

PROBLEMA 3317. *Să se rezolve în numere raționale ecuația*

$$xy = x^y .$$

E. ȘTEFĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: V. BÂRSĂNESCU, T. HULUBEI, GR. IOACHIM, N. MANOLESCU, GH. NICOLESCU, I. POPA, A. POPOVICI, T. PUȘCĂ, E. RUSSU, T. STOICESCU și T. TOGO.

Lăsând la o parte soluția elementară

$$x = 0, \qquad y = k, \qquad \text{(rațional)}$$

simplificăm ecuația dată cu x și rezolvăm în raport cu x; obținem

$$x = y^{\frac{1}{y-1}}.$$

Pentru ca x să fie rațional, trebue ca

$$\frac{1}{y-1} = m. \qquad (m \text{ întreg})$$

Deducem $\quad y = 1 + \frac{1}{m}, \quad x = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$

care sunt soluțiile generale raționale ale ecuației date.

PROBLEMA 3333. *In timpul ocupației germane, așteptau pâine într'o zi, de cu seară, în fața unei brutării 90 persoane. Ele ereau așezate pe două rânduri, în perfectă ordine. La orele 6 dimineața brutarul începù distribuția pâinilor, în număr de 300, pe care le făcuse noaptea. Atunci năvăli în fața prăvăliei, lume străină de cele două rânduri. Pâinea erà distribuită astfel: se dedeau 10 pâini oamenilor din rânduri, 20 celor ce năvăliau prin față, iar 30 erau dosite de brutar pentru speculă. După ce 4/5 din pâini au fost astfel distribuite, venì o patrulă germană. Aceasta confiscă brutarului marfa dosită, pentru a o distribuì populației, așeză și rândurile așà că persoana care erà a 90ª devenì a 100ª. Știind că fiecare persoană lua câte 2 pâini, se întreabă dacă toate persoanele din rândul format de cu seară au luat pâine și câte din cele ce au năvălit prin față, fără rând, au luat pâine?*

ELENA N. LĂZĂRESCU.

Soluţie dată de D-nii: S. Affer, D. M. Baidac, Al. C. Bassarab, M. Blumen, E. Botea, Istinie Brezuica, Gh. Călin, C. Cercel, I. C. Cristescu, I. David, H. Dăscălescu, Fl. Dinescu, V. Dorneanu, Al. Florea, I. Foca, B. Gataianţu, C. Gherghiceanu, E. Grabovschi, E. Grünstein, I. Iliuţă-Dăbuleni, Al. B. Ionescu, N. C. Ionescu, Paul Ionescu, C. Ionescu-Bujor, Arno Kahane, E. Lupescu, N. Manolescu, Valeriu Manafu, N. Mihăilescu, M. Marin, I. Miu, I. Nicolau-Dobridor, V. Novacu, Şt. Pârvănescu, A. Pârvu, C. Păun, Corneliu Popescu, Virgiliu Popescu, C. Popovici, I. Th. Popovici, C. Segârceanu, René I. Spathy, C. Stegaru, G. Tailer, şi V. Tăraş (Elev liceul Braşov).

Până la venirea patrulei, dându-se 4/5 din cele 300 pâini existente, adică 240, rezultă că brutarul a avut timp să repete exact de 4 ori distribuţia după sistemul început şi prin urmare au căpătat câte 2 pâini: 20 persoane din rânduri şi *40 persoane din afară de rânduri*, rămânând 120 pâini dosite şi 60 nedistribuite, adică în total 180 pâini, ce s'ar fi putut distribui la 90 persoane.

In momentul venirei patrulei, ultima persoană din rânduri (a 90ª) ajunsese a 70ª prin plecarea celor ce-şi primiseră pâinile, iar după venirea patrulei devenind a 100ª, înseamnă că înaintea ei au fost intercalate 30 persoane din afară de rânduri.

Cum pâinea ce mai rămăsese nu ajungeà decât la 90 persoane, *această persoană a rămas fără pâine.* A avut însă mângâerea să mai aibă încă 9 persoane înaintea sa în rânduri, care aŭ rămas fără pâine. Nu putem însă şti câte din acele 9 persoane au aşteptat toată noaptea la rând şi câte au fost dintre cele din afară de rânduri, intercalate de patrula germană.

Notă. D-nul C. Ionescu-Bujor observă că realitatea desminte această problemă şi anume:

1°. In timpul ocupaţiei germane populaţia cumpără pâinea cu „cartela", care dădea drept fiecărei persoane la 440 gr. de pâine pe zi. Cumpărătorii primind de la brutar câte 2 pâini, rezultă că toate familiile ce se aprovizionau de la această brutărie aveau acelaşi număr de membri!

Că problema se referă la timpul cartelelor, se vede din faptul că persoanele se aşezaseră pe două rânduri şi „în perfectă ordine", fără să le supravegheze nimeni.

2°. Incepând distribuirea pâinei şi năvălind din faţă lume străină, nu se poate admite că cei ce au aşteptat toată noaptea să primiască aceasta fără a reacţiona.

Căp. Gr. Z.

PROBLEMA 3378. *Să se afle limita expresiei*

$$E = \frac{A^n(1-D^n) - B^n(1-C^n)}{C^n - D^n},$$

când n *tinde către zero,* A, B, C, D *fiind cantităţi reale.*

M. ŞTEFAN.

I. *Soluţie* dată de D-nii: O. BRAESTER, L. BRÜLL, M. CERNES, H. COHN, P. CRISTEA, V. DÂNGĂ, T. DIACONESCU, A. FLOREA, R. GEORGESCU, E. GRABOVSCHI, E. GRÜNSTEIN, D. HAIM, E. IACOB, GR. IOACHIM, S. KATZ, A LUPU, N. MANOLESCU, H. MARCOVICI, D. NESTOR, GH. NICOLAU, V. NOVACU, C. PILAT, C. POPESCU, C. POPOVICI, T. PUŞCĂ, H. RABINOVICI, V. RÂPEANU, L. SEGALL, C. SEGĂRCEANU, P. ŞERBAN, T. STOICESCU şi I. VASILIU.

Pentru $n = 0$, expresiunea dată ia forma nedeterminată

$$E \sim \frac{0}{0}.$$

Aplicând regula lui HÔPITAL

$$\lim_{n=0} E = \lim_{n=0} \frac{(1-D^n)A^n LA - A^n D^n LD - (1-C^n)B^n LB + B^n C^n LC}{C^n LC - D^n LD}$$

$$= \frac{-LD + LC}{LC - LD} = 1.$$

II. *Soluţie* dată de D-l C. POPOVICI.

Dacă efectuăm împărţirea, putem scrie

$$E = B^n + (B^n - A^n)\frac{D^n}{C^n} + (B^n - A^n)\frac{D^{2n}}{C^{2n}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2}{C^{pn}}(A^n - B^n)\frac{C^{pn} - D^{pn}}{C^n - {}^n D}.$$

Trecând la limită, toţi termenii începând al doilea sunt nuli şi rămâne

$$\lim_{n=0} E = 1.$$

PROBLEMA 3392. *Să se găsiască un patrat perfect de 4 cifre, ştiind că dacă i se schimbă între ele ultimele 2 cifre, se obţine un cub perfect.*

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: P. CARABEŢEANU, A. CARACOSTEA, A. PÂRVU (Lic. Lazăr Bucureşti); D. POPESCU (Lic. Internat, Iaşi); B. VASILESCU (Lic. Sf. Sava, Bucureşti); E. ALBEAŢĂ, L. HAIM (Lic. Petru Rareş, Piatra-Neamţ); T. COCEA (Lic. Brătianu, Piteşti); A. BORNEANU (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti); E. IACOB (Botoşani); C. BĂLĂŞESCU, V. POPESCU (Lic. Militar, Tg. Mureş); T. TĂNASE (Lic. Câmpina); R. SPATHY, N. MIHĂILESCU (Lic. Matei Basarab, Bucureşti); D. SEGÂRCEANU (Lic. Fr. Buzeşti, Craiova); M. MARINAŞ, I. BREZUICA, D. ZAMFIR, B. GATAIANŢU, T. DIACONESCU, I. ŞCHIOPULESCU, GH. CĂLIN (Lic. I. Assan, Caracal); I. NICOLAU-DOBRIDOR (Lic. Militar, Craiova); E. GRÜNSTEIN (Lic. Kogălniceanu, Iaşi); T. BACIU (Lic. R.-Sărat); E. BOTEA, A. ANGELESCU A. T. IONESCU-BUJOR (Lic. Cantemir, Bucureşti); M. MARIŞ (Lic. Arad) şi D. BAIDAC-GRADINO.

Cuburile de 4 cifre sunt:

1000 , 1331 , 1728 , 2197 , 2744 , 3375,

4096 , 4913 , 5832 , 6859 , 8000 , 9261.

Schimbând între ele ultimele 2 cifre şi reţinând numai pe acelea care au terminaţia patratelor perfecte, obţinem

1000 , 2744, 4069 , 8000 , 9216.

Dintre acestea, numai 9216 este patrat perfect, aşă că soluţiile problemei sunt

$$96^2 = 9216 \quad ; \quad 21^3 = 9261.$$

Notă 1°. Un corespondent şi-a terminat soluţia cu observaţia că dacă s-ar fi cerut un număr care să fie în acelaş timp cub şi patrat, s-ar fi găsit numai soluţia

$$64^2 = 4096 \quad ; \quad 16^3 = 4096.$$

Trebuia să observe acel corespondent că numerele care sunt patrate şi cuburi în acelaş timp, sunt de forma N^{6n} şi atunci ar fi găsit foarte multe soluţiuni la problema d-sale.

2°. Au mai găsit soluţia exactă a problemei 3392, d-nii: I. ZAMFIRESCU, C. GHEORGHIU (Lic. Brătianu Piteşti); C. DRÂMBĂ (Lic. Galaţi); C. COSTĂCHESCU (Lic. Militar, Iaşi); J. KRAKAUER (Lic. Matei Basarab, Bucureşti); A. WEISSBUCH (Lic. Kogălniceanu, Iaşi); V. NOVACU (Lic. Arad); C. PILAT (Lic. Internat, Iaşi); GH. NICOLAU (Lic. Codreanu, Bârlad); M. CERNES (Iaşi), R. ARGEŞANU, I. ILIUŢĂ-DĂBULENI (Lic. Caracal) şi E. RUSSU (Lic. Internat, Iaşi).

PROBLEMA 3409. *Dacă* $(b-c)/(b+c)=tg\varphi$, *unde* b *şi* c *sunt catetele unui triunghiu dreptunghiu* ABC, *să se demonstreze relaţiunile*

$$(1)\qquad \frac{h_a}{a}=\frac{\cos 2\varphi}{2} \qquad \text{şi} \qquad (2)\qquad abc\sin 2\varphi = h_a(b^2-c^2),$$

notaţiunile fiind cele obicinuite.

CORNELIU N. POPESCU.

Soluţiune dată de D-l IOAN M. MIU (cl. VII, Liceul Caracal). Fie BAC triunghiul dreptunghiu având $\overline{AC}=b$ şi $\overline{AB}=c$, la care prelungind catetele BA şi CA respectiv cu $\overline{AB_1}=b-c$ şi $\overline{AC_1}=b+c$, formăm un al doilea triunghiu dreptunghiu B_1AC_1. Având $\overline{B_1A}/\overline{C_1A}=\operatorname{tg}C_1$, rezultă că $\varphi=C_1+k\pi$ (k fiind un număr întreg), deci

$$\cos 2\varphi=\cos(2C_1+2k\pi)=\cos 2C_1 \quad , \quad \sin 2\varphi=\sin 2C_1.$$

Aşă dar pentru a stabili relaţiunile (1) şi (2), este de ajuns a calculă din triunghiul B_1AC_1 pe $\cos 2C_1$ şi $\sin 2C_1$.

In primul rând, observăm că $\overline{B_1C_1}^2=(b-c)^2+(b+c)^2=2(b^2+c^2)=2\,BC^2=2a^2$, de unde $B_1C_1=a\sqrt{2}$.

Apoi $\cos C_1=\dfrac{b+c}{a\sqrt{2}}$, iar $\sin C_1=\dfrac{b+c}{a\sqrt{2}}$, deci avem şi

$$\cos 2C_1=\frac{(b+c)^2-(b-c)^2}{2a^2}=\frac{2bc}{a^2}=\frac{4S}{a^2}=\frac{2h_a}{a}$$

$$\sin 2C_1=2\cdot\frac{b^2-c^2}{2a^2}=\frac{b^2-c^2}{a^2}=\frac{h_a(b^2-c^2)}{abc}, \qquad \left(a=\frac{bc}{h_a}\right)$$

care conduc la relaţiunile (1) şi (2).

Au mai rezolvat problema pe alte căi şi D-nii: CAZIMIR AKERMAN, O. BRAEŞTER, GH. M. CĂLIN, O. CHIRU-NANOV, H. DAVID, VLAD S. DÂNGĂ, TEODOR V. DIACONESCU, C. M. DRÂMBĂ, MARIN G. DUMITRESCU, EUGEN GABROVSCHI, EMANOIL G. GAIU, RĂDUCAN I. GEORGESCU, I. I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ, GH. TH. GHEORGHIU, ERNEST GRÜNSTEIN, HULUBEI TELEMAC, GRIGORE IOACHIM, A. şi C. T. IONESCU-BUJOR, V. MANAFU, NICOLAE I. MANOLESCU, GRIGORE MAREŞ, MARIUS MARIŞ, EMIL MORŢUN, GH. MUNTEANU, GH. V. NICOLAU, VALERIU NOVACU, CONSTANTIN PILAT, PETRU GH. SPACU, RENÉ I. SPATHY, L. STERNHELL, TEODOR STOICESCU, G. TAILER.

PROBLEMA 3423. *Fie* AB *un diametru în cercul* O *şi* D *o dreaptă perpendiculară pe* AB. *Să se ducă coarda* AM, *care taie pe* D *în* N, *aşà ca* MN *să aibă o lungime dată.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: RENÉ I. SPATHY (Lc. Matei Basarab, Bucureşti) şi MARIUS MARIŞ (Lc. Arad).

Fie P intersecţia dreptelor AB şi D. Ducem BN. Triunghiurile dreptunghice ABM, ANP având unghiul ascuţit din A comun, sunt asemenea şi avem:

$$AB/AN = AM/AP,$$

$$\therefore \quad \overline{AM} \times \overline{AN} = \overline{AB} \times \overline{AP}.$$

Cunoaştem dar produsul lungimilor AM, AN. Diferenţa acestor lungimi este MN, mărime cunoscută după enunţ. Cunoscând diferenţa şi produsul a două lungimi, ştim că se pot determinà geometriceşte acele lungimi.

Pentru aceasta, pe BP ca diametru descrim un cerc şi din A îi ducem tangenta AT. Unim T cu mijlocul C al lui AB şi luăm pe această dreaptă $TI = \frac{1}{2}MN$, care este cunoscut. Din I descrim un cerc cu raza TI. Diametrul acestui cerc va fi MN. Acest cerc este tăiat de AI în punctele Q şi R. Avem dar:

$$QR = AR - AQ = 2TI = MN.$$

$$\overline{AQ} \cdot \overline{AR} = \overline{AT}^2 = AB \times AP.$$

Deci $AQ = AM$ şi $AR = AN$. Din A descrim dar un cerc cu raza AR, care va tăià dreapta D în punctele N şi N'. Dreptele căutate sunt AN şi AN'.

Problema este posibilă dacă ultimul cerc descris taie pe D şi avem atunci două soluţii; dacă este tangent lui D avem numai soluţia; altfel problema este imposibilă.

EXERCIŢII

66. Există numere de două cifre, astfel ca diferenţa dintre ele şi răsturnatul lor să fie egală cu produsul cifrelor?

G. TAILER.

R. Nu, căci ar trebui

$$10a + b - 10b - a = 9(a - b) = ab,$$

relaţie care n'are soluţiuni întregi mai mici ca zece.

67. Să se găsiască un număr aşă că dacă schimbăm între ele ultimele două cifre ale patratului său, să obţinem patratul numărului consecutiv.

A. M. Cepnes.

R. Condiţiunile din enunţ se scriu:

$$100a + 10b + c = n^2$$

$$100a + 10c + b = (n+1)^2$$

de unde:

$$n = \frac{9(c-b)-1}{2}.$$

Când $c-b$ ia valorile 1, 3, 5, 7, 9 se deduc valorile pe care trebue să le încercăm pentru n: 4, 13, 22, 31 şi 40. Se verifică că numai 13 răspunde problemei.

68. Să se găsiască patratul de cinci cifre de forma $aaabc$, unde $a = 2c$.

Th. Cocea.

R. $22201 = 149^2$ şi $88804 = 298^2$ trebue să fie mai mic ca 5. Deci patratul se poate termină cu 1 sau cu 4. Pentru cazul întâi, ne trebuesc patratele de forma $222b1$, iar pentru cazul al doilea, de forma $888b4$. Se găsesc numai soluţiile indicate.

69. Să se găsiască patratul de trei cifre de forma $a(a-1)(2a-2)$.

I. Iliuţă-Dăbuleni.

R. Cifra $2a-2$ ar putea fi: 0, 4 sau 6; adică a ar putea fi 1, 3 sau 4. Se deduc soluţiunile 100 şi 324.

70. Mediana vârfului unghiului drept A al triunghiului ABC, taie cercul O circumscris, în A'. Cercul descris pe OA' ca diametru, taie pe BC în E, iar A'E taie cercul primitiv în D. Figura ABCD e un trapez isoscel.

V. Dorneanu.

R. AD e perpendiculară pe BC, căci unghiul din E e înscris într'un semicerc. Dar şi unghiul ADA' e drept. Deci AD e *paralelă* cu BC, ceeace atrage că ABCD e un trapez isoscel.

71. Dacă pe prelungirile catetelor unui triunghiu dreptunghiu BOA, cu unghiul drept O, se iau $OD = \frac{1}{2}OB$ şi $OC = \frac{1}{2}OA$, să se demonstreze că

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2} = \frac{2}{5}.$$

V. Dorneanu.

R. $\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{BC}^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$, $\overline{CD}^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$, $\overline{DA}^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$,

ceeace conduce imediat la relaţia voită.

72. Să se calculeze determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_n & u_{n-k} & u_{n-k-1} & \dots & u_{n-2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_v & u_{v-k} & u_{v-k-1} & \dots & u_{v-2k} \end{vmatrix},$$

unde u_n sunt termenii şirului lui FIBONACCI.

S. WEISS.

R. Avem:

$$u_n = u_{n-k} + C_k^1 u_{n-k-1} + C_k^2 u_{n-k-2} + \dots + u_{n-2k}.$$

Aceasta arată că $\Delta = 0$.

73. Să se găsiască limita expresiei:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)(n+2)\dots(n+p) - x^p]\, x^n}{(n+p)!},$$

când p tinde către infinit.

H. MARCOVICI.

R. Când p e finit,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+p}}{(n+p)!} \right) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^p}{p!}.$$

Când p tinde către ∞, y devine $e^x - 1$.

PROBLEME PROPUSE.

3441. Care este expresiunea numerelor care au la puterea patra a lor, cifra 4 la zeci?

E. ŞTEFĂNESCU.

3442. Să se găsiască un patrat perfect *szu*, aşà ca *s* să fie câtul dintre *zu* şi produsul cifrelor rădăcinii patrate a lui *szu*.

C. C. POPOVICI.

3443. Un punct M se mişcă pe un cerc cu diametru fix AB şi cu centru O. Fie N şi L mijloacele arcelor AM şi BM. Paralela dusă din O la LN taie laturile unghiului AMB în P şi Q. Se cere

locul geometric al acestor din urmă două puncte. Aceiaşi problemă pentru cazul când AB este o coardă fixă a cercului O, PQ trece printr'un punct fix F, iar N şi L împart arcele AM şi MB în arce ale căror lungimi sunt în rapoarte date.

COL. GH. BUICLIU.

3444. Se dă un octogon înscris într'o conică. Să se demonstreze că octogonul format prin intersecţiile laturilor, prima cu a patra, a doua cu a cincea, etc., este de asemenea înscris într'o conică, ambele fiind înscrise într'o infinitate de cuartice.

M. GHERMĂNESCU.

3445. Se consideră două cercuri cu razele egale, cu centrele O şi O_1. Se cere să se găsiască pe linia centrelor OO_1 un punct P, astfel ca tangentele duse din P la cele două cercuri şi de aceeaşi parte a liniei centrelor OO_1, să fie dreptunghiulare.

GH. I. JUJESCU.

3446. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul format de dreptele lui SIMSON ale punctelor unde înălţimile triunghiului ABC taie cercul circumscris acestui triunghiu. Se cere să se demonstreze că:

1. Cercurile circumscrise triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt egale;

2. Aceste triunghiuri au acelaş cerc al lui EULER;

3. Triunghiul ortic al triunghiului ABC este complimentarul triunghiului $A_1B_1C_1$.

NICOLAE I. MANOLESCU.

3447. Care este maximum raportului $\dfrac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^n}$, când variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt toate pozitive?

I. IONESCU.

3448. Dându-se forma patratică

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i\, x_k ,$$

unde avem

$$a_{ik} = a_{ki},$$

să se probeze identitatea

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}x_i\,x_k \sum_{i,\,k} a_{ik}y_i\,y_k - \left(\sum_{i,\,k} a_{ik}x_i\,y_k\right)^2 =$$

$$\sum \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ih} \\ a_{hi} & a_{hh} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_h \\ y_i & y_h \end{vmatrix}^2 + \sum 2a_{ih}a_{ek} \left[\begin{vmatrix} x_i & x_e \\ y_i & y_e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_h & x_k \\ y_h & y_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_h & x_e \\ y_h & y_e \end{vmatrix} \right]$$

ambele sume din partea a doua raportându-se la toate combinările ih ale celor n indici; în suma a doua nu intră termenii din suma întâi, iar termenul de forma $a_{ii}a_{ek}$ va aveà coeficientul unitatea în loc de doi.

Forma dată fiind definită şi pozitivă să se arate că avem

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}x_i\,x_k \sum_{i,\,k} a_{ik}y_i\,y_k - \left(\sum_{i,\,k} a_{ik}x_i\,y_k\right)^2 \geq 0.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

3449. Fie a,b,c laturile unui triunghiu oarecare, S aria triunghiului; a fiind latura cea mai mică şi h_a înălţimea corespunzătoare laturei a, să se demonstreze inegalităţile:

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-48S^2} > 4h_a^2,$$

$$a^2+b^2+c^2-\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-48S^2} < 4h_a^2.$$

Se cere o demonstraţie directă.

V. CRISTESCU.

3450. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x+\sec x+\operatorname{cosec}x = m.$$

N. AGRONOMOF.
(Wladiwostok).

Erată. Page 412, ligne 10 en descendant, lire $-S^2(b^2-c^2)^2$, au lieu de $-S^3(a^2-c^2)^2$.

TABLA DE MATERII

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE.

Aritmetica.

		Pag.
Căpitan I. Linteș.	Formula produsului numerilor prime cu un număr dat și inferioarele lui	81
Col. C. Felix.	Condițiuni de divizibilitate în cazul unei baze de numerație oarecare	281
E. Ștefănescu.	Cuburi terminate cu rădăcina lor	368, 411
Col. Gh. Buicliu.	Patrate pseudogemene	402

Geometria.

N. Blaha.	Proprietăți ale triunghiului	16
M. Grünbaum.	Câtevà teoreme în legătură cu cercurile tritangente	205
N. Abramescu.	Asupra două figuri asemenea	241
N. Abramescu.	Asupra dreptelor ale căror toate punctele sunt depărtate egal de trei drepte date. Drepte echidistante	324
Cristea Mateescu.	Câtevà proprietăți ale unei clase de patrulatere	327
N. Agronomof.	Sur les triangles de M. N. Blaha	361
N. Agronomof.	Les isocentres des triangles	408
C. C. Popovici.	Proprietăți ale triunghiului	417
Mihail I. Focșeneanu.	Asupra ortopolului	447

Geometria diferențială.

N. Abramescu.	Asupra unei chestiuni de geometrie infinitezimală	44
M. Niculescu.	Asupra unei probleme de maxim sau minim	244
M. Niculescu.	Proprietăți ale curbelor plane	287

Algebra.

Vladimir Tunițchi.	Regula pentru desvoltarea unui determinant de ordinul al patrulea	85
Th. Angheluță.	Așezarea în ordine naturală, a rădăcinilor a două ecuații de gradul al treilea	125, 167

Analiza.

M. Ghermănescu.	Asupra polinoamelor ortogonale	201
A. Anghelescu.	Asupra unor clase de ecuațiuni având cel mult o rădăcină reală	284
Șerban A. Gheorghiu.	Asupra unei inegalități	362
Șerban Gheorghiu.	O problemă de calculul variațiunilor	441

Diverse.

		Pag.
Gh. Ţiţeica.	Trei zeci de ani	12
Gh. Nichifor.	Din Corespondent, Membru în Societatea „Gazeta Matematică“	13
Sub-Locot. Vintilă Grigorescu.	† Alexandru Stoica	19
I. Ionescu.	Localul Societăţii „Gazeta Matematică“	20
Ioan Buşilă, Cl. Mititelu.	Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice“	26
* * *	Sărbătorirea a 30 ani dela apariţia „Gazetei Matematice“	41
Gh. Em. Filipescu, C. Malcoci şi G. Borneanu.	Concursul „Gazetei Matematice“	88
Delegaţia Societăţii.	Premiul „Anghel Saligny“	90
Delegaţia Societăţii.	Premiul „Vasile Conta“	90
Locot.-Col. Gh. Buicliu.	Aritmetica şi Algebra lui Gh. Manu	121, 161
Delegaţia Societăţii.	Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare, pe intervalul 1 Septembrie 1924 — 31 August 1925	207
Locot.-Col. Gh- Buicliu.	Revistele Matematice	247
Gh. Ţiţeica.	Rezultatul concursului „Gazetei Matematice“ din anul 1926	321

B. NOTE MATEMATICE.

1.	*Gh. Vasiliu.*	O proprietate a patratelor şi cuburilor	29
2.	*Gh. Vasiliu.*	Asupra numerilor formate cu cifra 1	29
3.	*S. Weiss.*	O proprietate a şirului lui Fibonacci	29
4.	*N. D. Costeanu.*	Asupra triunghiurilor sferice echilaterale	30
5.	*I. Ionescu.*	Alte zece astronomii diverse	47
6.	*B. Ig. Baidaff.*	Asupra unei probleme cunoscute	47
7.	*Căp. I. Linteş.*	Asupra problemei 3184	49
8.	*Marin Ştefan*	O proprietate a simedianei	50
9.	*I. Ionescu.*	Alte zece matematici diverse	91
10.	*O. Popea.*	Asupra notei 24, Anul XXVII	91
11.	*O. Popea.*	Generalizarea problemei 2964	91
12.	*M. A. Dumitrescu.*	Asupra problemei 3094	92
13.	*Const. C. Popovici.*	Raza cercului circumscris în funcţie de laturi	92
14.	*I. Ionescu.*	Alte zece algebre diferite	130
15.	*I. Ionescu.*	Asupra indicatorilor	130
16.	*Ion C. Vasiliu.*	Asupra unei demonstraţii a teoremei ortopolului	130
17.	*Căp. I. Linteş.*	Asupra unor exerciţii	131
18.	*Const. C. Popovici.*	Maximul expresiunii cosA cosB cosC, în care A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu	123
19.	*I. Ionescu.*	Alte zece aritmetici diverse	172
20.	*Gh. Vasiliu.*	Asupra exerciţiului 36	173
21.	*Mihail I. Focşăneanu.*	Asupra teoremei lui Aubert	173
22.	*O. Ţino.*	Asupra notei 65 din „G. M.“ Vol. XXX pag. 379	175
23.	*Căp. I. Linteş.*	Asupra problemei 3158	175
24.	*I. Ionescu.*	Alte zece feluri de calcul	208
25.	*Gh. Tailer.*	Asupra numerilor pitagorice	209
26.	*Ilie Popa.*	Asupra exerciţiului 50 din „G. M.“ Vol. XXIX pag. 198	210

		Pag.
27. *Const. Th. Ionescu-Bujor.*	Câtevà proprietăţi ale triunghiului	210
28. *D. V. I.*	Asupra problemei 3238	211
29. *I. Ionescu.*	Alte zece geometrii diverse	249
30. *I. I. Iliuţă-Dăbuleni.*	Asupra notei No. 17 Vol. XXX	250
31. *I. I. Iliuţă-Dăbuleni.*	Asupra exerciţiului 75 Vol. XXX	250
32. *I. Niculescu-Dobridor.*	Asupra notei No. 1 Anul XXXI	250
33. *M. A. Cernes.*	Asupra problemei 3375	250
34. *Const. C. Popovici.*	Proprietăţi ale triunghiului $a^2=bc$	250
35. *Mihail I. Focşăneanu.*	Asupra patrulaterului	252
36. *Popa Ilie.*	Asupra exerciţiului 63, „G. M.“ Vol. XXXI	253
37. *Căp. I. Linteş.*	Asupra problemei 3100	254
38. *I. Ionescu.*	Alte zece geometrii diverse	291
39. *I. I.* *V. C.* *Loc. Col. Gh. I. L.*	Asupra Numărului Special cu probleme nerezolvate al „Gazetei Matematice“	291
40. *O. N. T.*	Asupra problemei 3093	292
41. *O. Popea.*	Asupra problemei 3184	294
42. *Gh. B.*	Asupra notei No. 41	295
43. *Gh. B.*	Asupra problemei 3295	295
44. *Şerban Gheorghiu.*	Asupra problemei 3105	295
45. *Locot. Col. Gh. Buicliu.*	Cazul general al problemei 2824	296
46. *Valeriu N. Manafu.*	Asupra exerciţiului 44 Anul XXIX „G. M.“	298
47. *W. Solomon.*	Aritmetici şi Algebre diverse	331
48. *I. Ionescu* *N. Abramescu*	Asupra Numărului Special cu probleme nerezolvate	333
49. *O. Popea.*	Asupra articolului: „O problemă de aritmetică“ din „Gazeta Matematică“ Vol. XXIX pag. 368	334
50. *Hulubei Telemac.*	Generalizarea problemei 2261	334
51. *I. Ionescu.*	Alte zece matematici diverse	370
52. *A. M. Cernes.*	Asupra problemei 3381	371
53. *B. V. Gataianţu.*	Asupra problemei 2723	371
54. *I. I.*	Asupra Numărului Special cu probleme nerezolvate	372
55. *Valeriu Manafu.*	Asupra problemei 3193	372
56. *V. Cristescu.*	Asupra problemei 3406	373
57. *Marin Ştefan.*	Asupra unor inegalităţi	373
58. *O. Popea.*	Asupra exerciţiului 10 din „G. M.“ Vol. XXX	375
59. *Ionescu I. Brezuică.*	Asupra notei No. 22, Anul XXX	376
60. *I. Ionescu.*	Alte zece algebre diverse	422
61. *I. I.*	Asupra Numărului Special cu probleme nerezolvate	422
62. *Col. Gh. Buicliu.*	O proprietate a patratelor şi cuburilor	423
63. *N. I. Manolescu.*	Asupra problemei 3346	423
64. *René I. Spathy.*	Asupra problemei 3367	424
65. *Căp. I. Linteş.*	Asupra problemei 3247	424
66. *I. Ionescu.*	Alte zece feluri de calcul	453
67. *I. Ionescu.*	Asupra problemei 3341	453
68. *I. I.*	Asupra numărului cu probleme nerezolvate	454
69. *Col. Gh. Buicliu.*	Asupra numerelor cu cifre identice	454
70. *Tiberiu Popoviciu.*	Fracţii pseudo-simetrice	455
71. *Căp. I. Linteş.*	Indicatori şi factoriale	455
72. *O. Popea.*	Asupra notelor: 7 (XXIX) şi 64 (XXX)	456
73. *I. Ionescu.*	Asupra isocentrelor	456

C. CHESTIUNI DE EXAMEN.

		Pag.
Şcoalele Militare ale Aeronauticei	Examen de admitere	51
Şcoala Politechnică din Bucureşti	Examenele din Iunie 1925	52, 93
Facultatea de Ştiinţe din Cluj	Examenele din Iunie 1925	96, 132
Şcoala Militară de Artilerie	Concursul de admitere din August 1925	134
Şcoala Politechnică din Bucureşti	Examenul de admitere în Anul I, Octombrie 1925	135
Facultatea de Ştiinţe din Cluj	Examenele din Octombrie 1925	176
Gazeta Matematică	Concursul din 1926	300
Şcoala Politechnică din Bucureşti	Examenele parţiale şi generale (1926)	377, 426
Facultatea de Ştiinţe din Cluj	Examenele din Iunie 1926	427
* * *	Examenul de capacitate al profesorilor de matematici.—Iaşi, Iunie 1926	457

D. BIBLIOGRAFII.

Societatea Română de Ştiinţe.—Buletinul de Ştiinţe matematice pure şi aplicate 31
Revista Matematică din Timişoara 31, 55, 100, 137, 215, 254, 298, 335, 381, 431
Foaia Matematică 31, 55, 137, 180, 215, 254, 298, 460
Curierul Matematic . . 31, 55, 100, 137, 180, 215, 255, 298, 336, 381, 431, 459
Natura 31
Dr. Const. Chiricescu.—Pascalia Bisericii creştine ortodoxe de răsărit în conformitate cu calendarul indreptat 31
Bulletin of the American Mathematical Society 54, 55, 335, 336, 380
Journal des Mathématiques élémentaires 55, 100, 137, 180, 215, 254, 298, 335, 381, 431, 460
V. Alaci.— L'approximation des fonctions d'une variable réelle par une classe des sommes trigonométriques 55
M. Grünbaum.—Arta de a fi geometru 55
Mathesis 100, 180, 215, 298, 335, 431, 459
Anales dela Sociedad Cientifica Argentina 100, 335, 431
P. Sergescu.—Monografie asupra ecuaţiilor cu toate rădăcinile reale . . 100
I. Ionescu: Anghel Saligny.—Note Biographique 100
Buletin dela Section scientifique de l'Académie roumaine 180, 335
Raoul Bricard.—Leçons de cinematique 180
L'Abbé P. J. E. Goedseels.—Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés 181
Gheorghe Bratu.—Curs de matematici generale 181
Buletinul Societăţii studenţilor in Matematici 183 215, 254, 299, 335
Kraitchik.—Quelques proprietés des nombres cycliques 184
Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara 215
Revista Matematică Bârlădeană 216
Ziarul Matematic 216, 336
Serge Bernstein.—Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure aproximation des fonctions analytiques d'une variable réelle . . 217, 336

Pag.

B. Hostinscky.—Sur les probabilités géometriques 217
Vaclav Cupr.—Absorbţiunea cloridului de hidrogen gazos de către acidul sulfuric 217
A. Simek & H. Kadlcova.—Un nou fenomen electrocinetic 217
J. Frejka & K. Vsetecka—Cercetări asupra dosajului acidului lactic . . . 217
Dr. Iosef Sabanek.—O explicaţiune a originei undelor electromagnetice . 217
P. Sergesco.—Sur le module minimum des zéros de l'equation trinome . 255
N. Abramescu.—Memoriu de titluri şi lucrări 255
A. Maroger.—Le probléme de Pappus et ses cent premières solutions . . 255
Franco Pastore.—Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina VI Nuestra mineralogia y geologia 256, 336
Nicolas Lozano & Antonio Paitovi.—Evolución de las ciencias en la Republica Argentina. XI. La higiene publica y las obras sanitarias Argentinas 256, 336
Guillermo Hoxmark.—Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina. XIII. La evolucion de la Meteorologia 256
Paul Appell.—Traité de Mécanique Rationnelle 256
J. Neuberg.—Note matematice asupra tetraedrului 298
M. Nicolescu.—Sur une classe de séries dont le cercle de convergence est un ligne singuliére essentielle 299
Comandor Corneliu Buchholtzer.—Telegrafie şi telefonie fără fir 299
R. Deltheil.—Probabilités géometriques 299
Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" 335, 431
Anuarul Şcoalei Politecnice din Timişoara 336
Maurice Lecat.—Coup d'oeil sur la théorie des détérminants supérieurs dans son état actuel 381
Maurice Lecat.—Coup d'oeil sur la théorie de la multiplication des détérminants supérieurs dans son état actuel 381
General Scarlat Panaitescu.—Curs elementar de cartografie 381
Programme de l'école spéciale des Travaux publics 382
Programme de l'ecole d'Ingénieurs de Marseille 382
N. Abramescu.—Introducerea elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene 382
R. Gavrilescu.—Zborul fără Motor 382
E. Chaudet.—La evolucion de la astronomia 431
T. Carleman.—Les fonctions quasi analitiques 431
P. Sergesco.—Quelques remarques sur les courbes unicursales 459
P. Sergesco.—Sur la résolution en entiers de l'équation $ax^2+b^2=y^2$ . . 459
C. C. Teodorescu.—Curs de rezistenţa materialelor 460

E. CERERI.

No. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Dat răspuns
125 . . .	(XXX)	464
128 . . . 33	(XXXI)	
129 . . . 55		
130 . . . 56		
131 . . . 100		
132 . . . 137		
133 . . . 137	218, 300, 337, 431	

No. cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Dat răspus
134 . . . 184		
135 . . . 184		
136 . . . 257		
137 . . . 257		
138 . . . 382		
139 . . . 431		

G. PROBLEME PROPUSE.

a) Repartizarea problemelor propuse după materii.

Pag.

Aritmetica.	2602, 2696, 3331, 3332, 3333, 3341, 3351, 3352, 3353, 3354, 3361, 3362, 3363, 3364, 3371, 3372, 3381, 3382, 3383, 3384, 3391, 3392, 3393, 3401, 3402, 3403, 3404, 3411, 3412, 3413, 3421, 3422. 3432, 3441, 3442.
Geometria.	3335, 3336, 3337, 3344, 3345, 3346, 3355, 3357, 3358, 3366, 3367, 3374, 3375, 3385, 3386, 3387, 3394, 3395, 3405, 3407, 3410, 3414, 3415, 3416, 3417, 3423, 3424, 3425, 3426, 3434, 3443, 3445, 3446.
Algebra.	3334, 3338, 3342, 3343, 3350, 3359, 3360, 3365, 3368, 3373, 3376, 3377, 3378, 3379, 3388, 3389, 3396, 3397, 3398, 3406, 3408, 3418, 3419, 3427, 3431, 3433, 3435, 3436, 3447, 3448.
Trigonometria.	3339, 3347, 3369, 3380, 3399, 3409, 3428, 3437, 3449, 3450.
Geometrie analitică.	3340, 3349, 3356, 3390, 3400, 3420, 3430, 3444.
Mecanica.	3348, 3438, 3439, 3440.
Analiza.	3370, 3429.

b) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată.

No. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
171	76 (II), 198 (XVI)	NR
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
581	148 (VI), 51 (XI), 238 (XVI)	NR
585	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
691	196 (VII), 278 (XVI)	NR
766	124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXXI)	
825	288 (VIII), 358 (XVI)	
866	172 (IX)	NR
887	172 „, 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	NR
944	52 (X)	NR
1000	220 (X), 438 (XVI)	NR
1008	224 (X), 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058	100 „	NR
1083	172 „	218
1092	196 „	NR
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1162	124 „, 372 (XXXI)	NR
1178	172 (XII)	NR
1180	172 „	NR
1188	228 „	
1214	296 „	NR
1236	64 (XIII)	NR
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1287	256 „	NR

1) Numărul latin din paranteză indică volumul colecției, s. ex. 172 (VI), înseamnă că problema 585 a fost propusă la pag. 172 din volumul VI; problemelor mai vechi nerezolvate încă, sau rectificate, li s'a publicat din nou enunțul, s. ex: problema 585 s'a mai publicat la pag. 238 vol. XVI.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora n e trecut niciun număr, redacția posedă soluțiuni bune care nu a fost încă publicate.

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
1297	288 (XIII)	NR
1299	319 „	NR
1307	320 „	
1310	352 „ 372 (XXXI)	
1333	32 (XIV) 198 (XVIII) 372 (XXXI)	
1342	64 (XIV)	
1343	64 „ 372 (XXXI)	
1355	96 (XIV)	NR
1364	128 „	NR
1367	128 „	NR
1377	160 „	NR
1379	160 „	NR
1384	191 „	NR
1386	192 „	NR
1398	224 „	NR
1399	224 „ 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	288 „	
1434	320 „	NR
1450	352 „	NR
1482	64 (XV)	NR
1489	96 „	
1497	128 „	
1500	128 „	
1511	160 „	
1533	224 „	
1534	224 „	
1553	288 „	NR
1563	320 „	
1564	320 „	
1576	352 „	
1577	352 „	
1584	372 „ 158 (XX)	NR
1587	372 (XV)	NR
1591	39 (XVI)	
1626	159 „	NR
1632	159 „	
1637	160 „	NR
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	NR
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „	
1711	399 „ 372 (XXXI)	
1729	440 (XVI)	NR
1733	463 „	NR

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
1734	463 (XVI)	
1735	464 „	NR
1753	80 (XVII)	NR
1764	120 „	NR
1773	160 „	
1878	199 „	
1782	200 „	
1790	240 „	
1799	280 „	
1807	320 „ 422 (XXXI)	NR
1823	400 (XVII)	
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	446 „	
1858	78 (XVIII)	
1876	119 „	NR
1882	120 „	NR
1884	158 „ 200 „	NR
1892	160 „	
1898	199 „	
1905	200 „	NR
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „ 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1933	280 „	
1934	280 „ 320 „	
1937	318 „	
1944	319 „	NR
1945	320 „	
1948	358 „	
1949	358 „	NR
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1968	399 „	
1969	399 „	
1973	400 „ 461 „	
1976	431 „	
1979	431 „	138
1983	432 „	
1987	462 „	NR
1991	38 (XIX)	
2003	40 „	NR
2004	40 „	NR
2016	79 „	NR
2017	80 (XIX)	NR
2018	80 „	
2024	118 „	

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]	
2025	119 (XIX)		
2031	120 „		
2032	120 „	NR	
2035	159 „		
2038	159 „		
2048	198 „		
2055	200 „		
2056	200 „		
2058	200 „		
2063	238 „		
	280 „		
2065	239 „		
2070	240 „	NR	
2074	278 „	NR	
2079	279 „		
2081	279 „		
2083	280 „		
2091	319 „		
2106	358 „		
2108	359 „		
2110	359 „		
2111	360 „	NR	
2112	360 „	NR	
2116	398 „		
2117	398 „		
2118	399 „		
2129	438 „		
2130	460 „		
2133	439 „		
2144	461 „		
2145	462 „		
2147	462 „		
2170	119 (XX)	NR	
2176	120 „		
2187	160 „		
2191	197 „	56	
2194	197 „		
2197	198 „		
2203	199 „		
2217	239 „		
2222	240 „		
2223	422 (XXXI)	NR	
2227	279 (XX)		
2233	280 „		
2234	280 „		
2235	280 „		
2240	318 „		
2247	320 „		
2248	320 „		
2249	320 „		
2250	320 „		
2263	359 „		
2264	360 „		
2265	360 „		

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]	
2266	360 (XX)		
2274	398 „		
2281	400 „		
2282	400 „		
2284	439 „		
2289	439 „		
2290	439 „		
2295	461 „		
2298	462 „		
2300	462 „		
2301	462 „		
2302	462 „		
2308	39 (XXI)		
	80 „		
2311	40 „		
2318	79 „		
	160 „		
2320	79 „		
2329	118 „		
2330	118 „		
2332	119 „		
2337	120 „		
2338	120 „	NR	
	422 (XXXI)		
2343	157 (XXI)		
2344	158 „		
2346	158 „		
2347	158 „	464	
2353	159 „	NR	
2354	198 „		
2356	199 „		
2357	199 „		
2358	199 „	465	
2359	199 „		
2360	199 „		
2365	200 „		
2370	239 „		
2375	240 „		
2381	278 „		
2382	278 „	NR	
	422 (XXXI)		
2383	278 (XXI)		
2386	279 „		
2390	280 „		
2392	280 „	NR	
2394	318 „		
2396	319 „		
2397	319 „		
2398	319 „		
2402	320 „		
2405	320 „	NR	
	423 (XXXI)		
2408	359 (XXI)	NR	
2414	360 „	NR	

No. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
2416	360 (XXI) / 423 (XXXI)	NR
2421	399 (XXI)	
2422	399 „	NR
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2431	439 „	
2434	440 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2440	459 „	NR
2443	459 „	NR
2444	459 „	NR
2448	460 „	NR
2456	31 (XXII)	NR
2458	32 „	
2461	32 „	NR
2462	62 „	NR
2466	63 „	NR
2469	63 „	NR
2477	95 „	NR
2478	95 „	
2479	95 „	NR
2481	96 „	NR
2484	96 „	382
2487	120 „	NR
2497	144 „	
2500	144 „	NR
2501	167 „	NR
2502	167 „	NR
2503	167 „ / 333 (XXXI)	NR
2510	191 (XXII)	NR
2511	191 „ / 292 (XXXI)	466
2524	240 (XXII)	NR
2529	262 „	NR
2537	287 „	
2539	288 „	NR
2543	311 „	NR
2544	311 „	NR
2545	312 „	NR
2546	312 „	NR
2552	47 (XXIII)	
2553	47 „	
2555	48 „	NR
2556	48 „	NR
2560	72 „	NR
2566	120 „	
2569	120 „	NR
2571	144 „	NR
2573	144 „	
2575	168 „	

No. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
2577	168 (XXIII)	NR
2578	168 „	
2580	192 „	NR
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	NR
2593	264 „	NR
2596	288 „	NR
2597	288 „	NR
2598	288 „	
2599	288 „	NR
2602	318 (XXXI)	NR
2605	31 (XXIV)	
2607	31 „	NR
2608	32 „	NR
2609	32 „ / 454 (XXXI)	NR
2610	160 (XXIV)	101
2623	80 „	NR
2631	112 „	
2635	112 „	337
2638	127 „	NR
2640	128 „	
2641	128 „	432
2643	128 „	NR
2645	143 „	NR
2647	143 „	NR
2651	176 „	33
2654	176 „	
2655	191 „	NR
2656	191 „	NR
2658	191 „	NR
2660	191 „	
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2669	24 „	257
2671	48 „	NR
2674	63 „	
2675	63 „	
2682	64 „	
2683	79 „	
2684	80 „	NR
2686	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	
2692	108 „	NR
2694	108 „	
2695	109 „	NR
2696	318 (XXXI)	
2701	141 (XXV)	
2706	142 „	
2709	142 „	NR

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]		Rezolvată [2]
2713	143	(XXV)	NR
2717	143	„	NR
2727	168	„	NR
2731	191	„	
2735	192	„	NR
2738	192	„	NR
2745	216	„	NR
2758	56	(XXVI)	NR
2769	79	„	NR
2773	80	„	
2778	104	„	NR
2780	104	„	NR
2789	135	„	NR
2792	137	„	
2795	159	„	
2796	159	„	
2803	160	„	
2809	192	„	NR
2814	192	„	NR
2818	216	„	
2820	216	„	
2822	216	„	
2827	247	„	
2828	248	„	
2829	248	„	467
2837	279	„	
2838	279	„	57
2850	335	„	
2851	335	„	
2856	38	(XXVII)	58
2860	39	„	
2861	40	„	
2865	70	„	NR
2872	71	„	
2879	102	„	
2886	104	„	NR
2888	104	„	
2889	104 454	„ (XXXI)	NR
2891	143	(XXVII)	104
2895	143	„	
2898	144	„	184
2899	183	„	
2906	184	„	
2909	221	„	NR
2912	222	„	NR
2913	222	„	
2915	222	„	
2916	123	„	223
2918	224	„	61
2920	262	„	
2922	263	„	
2926	264	„	NR
2929	303	„	

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]		Rezolvată [2]
2932	304	(XXVII)	
2936	343	„	NR
2946	375	„	261
2947	376	„	NR
2953	416	„	
2955	416	„	
2956	416	„	NR
2959	448	„	
2960	448	„	
2965	38	(XXVIII)	
2969	39	„	
2971	39	„	
2972	40	„	
2977	79	„	
2978	79	„	104
2980	79	„	
2983	79	„	
2985	80	„	
2986	80	„	
2991	119	„	
2993	119	„	
2995	120	„	NR
2996	120	„	
2998	120	„	
3000	120	„	
3003	159	„	
3005	159	„	NR
3007	159	„	142
3013	199	„	
3017	300	„	265
3019	200	„	NR
3021	239	„	
3024	439	„	340
3031	278	„	
3041	319	„	
3045	319	„	NR
3046	320	„	106
3052	359	„	
3054	360	„	
3059	360	„	
3062	398	„	145
3067	438	„	225
3069	400	„	NR
3070	400	„	
3071	439	„	
3073	439	„	
3075	439	„	
3078	440	„	342
3081	479 454	„ (XXXI)	NR
3082	479	(XXVIII)	
3083	480	„	
3084	480	„	
3085	480	„	

No. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
3086	480 (XXVIII)	
3089	480 „	NR
3090	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3092	39 „	
3095	40 „	
3096	40 „	
3098	40 „	267
3104	79 „	64
3107	80 „ / 292 (XXXI)	NR
3108	80 (XXIX)	
3109	80 „	
3110	80 „	
3112	119 „	346
3113	119 „	
3114	119 „	35
3115	119 „	
3118	120 „	
3122	159 „	
3126	159 „	34
3127	159 „	NR
3129	160 „	
3133	199 „	226
3134	198 „	NR
3136	200 „	186
3140	200 „	NR
3141	238 „ / 438 (XXX)	
3144	239 (XXIX)	189
3145	239 „	111
3150	240 „	NR
3153	318 „	149
3155	279 „	192
3157	280 „	
3160	280 „	NR
3161	318 „	NR
3162	318 „	269
3163	319 „	
3165	319 „	NR
3167	320 „	
3169	320 „	NR
3171	358 „ / 454 (XXXI)	NR
3173	358 (XXIX)	
3174	359 „	469
3177	359 „	
3178	360 „	
3179	360 „	
3180	360 „	NR
3182	399 „	227
3185	399 „ / 70 (XXX)	NR
3186	400 (XXIX)	

No. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
3187	400 (XXIX)	350
3189	400 „	
3192	439 „	151
3194	439 „	385
3195	439 „	387
3197	440 „	
3198	440 „	
3199	440 „	
3200	440 „	65
3202	479 „	
3206	480 „	
3208	480 „	NR
3209	480 „	
3210	480 „	
3212	39 (XXX) / 159 „	
3214	39 „	193
3215	40 „	NR
3216	40 „	351
3218	40 „	
3219	40 „	
3220	40 „	NR
3221	79 „	
3222	79 „	67
3223	79 „	
5226	80 „	
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	NR
3232	119 „	
3233	119 „ / 198 „	470 / 352
3236	119 „	
3238	120 „	70
3239	120 „	
3240	120 „	NR
3241	159 „	228
3242	159 „	
3244	160 „	
3245	160 „	
3248	160 „	
3249	160 „	NR
3250	160 „	
3252	198 „	
3253	199 „	
3254	199 „	232
3255	199 „	NR
3256	199 „	391
3257	200 „	NR
3258	200 „	
3259	200 „	
3260	200 „	NR
3262	238 „	
3263	238 „	196

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]		Rezolvată [2]
3264 . . .	239	(XXX)	
3266 . . .	239	„	72
3267 . . .	239	„	
3268 . . .	240	„	
3269 . . .	240	„	
3270 . . .	240	„	
3271 . . .	278	„	
	358	„	
3272 . . .	278	„	145
3273 . . .	278	„	153
3274 . . .	279	„	75
3275 . . .	279	„	NR
3276 . . .	279	„	NR
3277 . . .	280	„	
3278 . . .	280	„	NR
3279 . . .	289	„	
3282 . . .	318	„	
3283 . . .	319	„	233
3284 . . .	319	(XXX)	395
3285 . . .	319	„	76
3286 . . .	319	„	114
3287 . . .	320	„	
3288 . . .	320	„	
3289 . . .	320	„	
3290 . . .	320	„	
3291 . . .	358	„	
3292 . . .	359	„	NR
3293 . . .	359	„	155
3294 . . .	359	„	155
3295 . . .	359	„	156
3296 . . .	359	„	
3297 . . .	359	„	272
3298 . . .	359	„	NR
3299 . . .	360	„	
3300 . . .	360	„	NR
3301 . . .	398	„	
3302 . . .	398	„	
3303 . . .	399	„	
3304 . . .	399	„	NR
3305 . . .	399	„	NR
3306 . . .	390	„	273
3307 . . .	400	„	NR
3308 . . .	400	„	NR
3309 . . .	400	„	NR
3310 . . .	400	„	NR
3311 . . .	438	„	
3312 . . .	439	„	
3313 . . .	439	„	NR
3314 . . .	439	„	
3315 . . .	439	„	
3316 . . .	439	„	NR
3317 . . .	440	„	471
3318 . . .	440	„	NR
3319 . . .	440	„	

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]		Rezolvată [2]
3320 . . .	449	„	NR
3321 . . .	478	„	
3322 . . .	478	„	
3323 . . .	478	„	115
3324 . . .	479	„	433
3325 . . .	479	„	NR
3326 . . .	479	„	275
3327 . . .	479	„	
3328 . . .	480	„	
3329 . . .	480	„	
3330 . . .	480	„	
3331 . . .	39	(XXXI)	116
3332 . . .	119	„	
3333 . . .	39	„	NR
3334 . . .	39	„	
3335 . . .	40	„	NR
3336 . . .	40	„	156
3337 . . .	40	„	305
3338 . . .	40	„	233
3339 . . .	40	„	
3340 . . .	40	„	
3341 . . .	79	„	NR
3342 . . .	79	„	435
3343 . . .	79	„	NR
3344 . . .	79	„	
3345 . . .	79	„	352
3346 . . .	80	„	308
3347 . . .	80	„	
3348 . . .	80	„	
3349 . . .	80	„	
3350 . . .	80	„	NR
3351 . . .	119	„	
3352 . . .	119	„	
3353 . . .	119	„	
3354 . . .	120	„	NR
3355 . . .	120	„	234
3356 . . .	120	„	
3357 . . .	120	„	235
3358 . . .	120	„	
3359 . . .	120	„	
3360 . . .	120	„	NR
3361 . . .	159	„	NR
3362 . . .	159	„	
3363 . . .	159	„	397
3364 . . .	159	„	
3365 . . .	159	„	
3366 . . .	160	„	
3367 . . .	160	„	310
3368 . . .	160	„	
3369 . . .	160	„	
3370 . . .	160	„	
3371 . . .	199	„	NR
3372 . . .	199	„	NR
3373 . . .	199	„	

No. Problemei propusă [1]	Pagina la care a fost: propusă	Rezolvată [2]	Pagina la care a fost: Rezolvată
3374	196 (XXXI)	354	
3375	199 „	311	
3376	200 „	276	
3377	200 „	436	
3378	200 „		
3379	200 „	NR	
3380	200 „		
3381	238 „	277	
3382	239 „		
3383	239 „		
3384	239 „		
3385	239 „	NR	
3386	239 „	313	
3387	240 „	NR	
3388	240 „		
3389	240 „		
3390	240 „	NR	
3391	279 „	355	
3392	279 „		
3393	279 „		
3394	279 „		
3395	279 „		
3396	280 „	NR	
3397	280 „	NR	
3398	280 „	NR	
3399	280 „		
3400	280 „	NR	
3401	318 „		
3402	318 „	NR	
3403	318 „		
3404	318 „	NR	
3405	319 „	NR	
3406	319 „		
3407	319 „		
3408	320 „		
3409	320 „		
3410	320 „		
3411	358 „	NR	
3412			358 (XXXI) NR
3413			358 „ NR
3414			359 „
3415			359 „ NR
3416			359 „
3417			359 „
3418			360 „
3419			360 „ NR
3420			360 „ NR
3421			398 „ NR
3422			398 „ NR
3423			399 „
3424			399 „ NR
3425			399 „ NR
3426			400 „ NR
3427			400 „ NR
3428			400 „
3429			400 „ NR
3430			400 „ NR
3431			439 „ NR
3432			439 „ NR
3433			439 „ NR
3434			439 „ NR
3435			440 „ NR
3436			440 „ NR
3438			440 „ NR
3439			440 „ NR
3440			440 „ NR
3441			478 „ NR
3442			478 „ NR
3443			478 „ NR
3444			479 „ NR
3445			479 „ NR
3446			479 „ NR
3447			479 „ NR
3448			479 „ NR
3449			480 „ NR
3450			480 „ NR

H. EXERCITII [1].

Aritmetica. 1 (37); 2 (37); 3 (38); 5 (38); 6 (39); 7 (77): 8 (78); 9 (78); 13 (117); 14 (117); 15 (118); 18 (158); 19 (158); 20 (158); 21 (197); 22 (197); 23 (198); 28 (238); 30 (278); 31 (278): 32 (278); 33 (278); 35 (314); 36 (314); 37 (314); 39 (315); 40 (315); 41 (315); 42 (315); 51 (356); 52 (356); 53 (356); 54 (356); 59 (397); 60 (398); 62 (438); 63 (438); 64 (438); 66 (476); 67 (477); 68 (477); 69 (477);

Geometria. 10 (78); 11 (78); 12 (78); 17 (119): 29 (238); 44 (316); 45 (316); 46 (316); 47 (316); 48 (317); 56 (357) 65 (438); 70 (477); 71 (477).

Algebra. 4 (38); 16 (118); 24 (198); 26 (198); 27 (237); 38 (315); 43 (316); 55 (357); 57 (357); 58 (358); 61 (398); 72 (478); 73 (478).

Trigonometria. 25 (198); 34 (278); 49 (317); 50 (317);

1) Numerele din paranteză indică pagina, iar cele din afară numărul ce poartă exercițiul.

I. TABLOUL NUMELOR.

Abason E. 5, 6, 323, 440.
Abramescu N. 5, 6, 47, 80, 143, 160, 189, 223, 241, 244, 255, 258, 280, 327, 333, 337, 360, 382, 464.
Adam M. 33, 56, 57, 58, 60, 62, 64, 65, 69, 104, 105, 106, 118, 148, 149, 190, 192, 193, 202, 205, 227, 235, 264, 271, 292, 294, 316, 345, 352, 468, 470.
Adam R. 33, 235, 313, 353, 354, 393, 394, 435, 470.
Affer S. 472.
Agronomof N. 362, 400, 411, 438, 439, 456, 480.
Akerman C. 475
Alaci V. 6, 31, 41, 43, 55, 100, 215, 467.
Albeaţă E. 277, 356, 435, 474.
Alexandrescu T. 321.
Alexandrini O. 11.
Alexiu N. 468.
Amărăscu G. 60.
Angelescu A. 5, 6, 41, 287, 324, 397, 474.
Angelescu T. 57, 60, 64, 105, 271, 317, 323.
Angheluţă T. 5, 6. 42, 129, 172, 267, 319. 335, 342, 360, 440, 480.
Antonescu E. 41.
Antoniu I. 33, 57, 62, 104, 225.
Apollonius 421.
Appell P. 322, 323, 324.
Arcadian N. 33, 56, 103, 106, 148, 191, 192, 320, 389.
Argeşeanu R. 474.
Aronovici S. 116, 436.
Aschenborn 122.
Atanasiu D. 60, 104.
Aubert 173, 381.
Aubert P. 322, 323, 324.
Avram Lupu 72, 157, 273, 274, 276, 310.
Avramescu C. 6.

Baciu T. 397, 474.
Bădescu R. 223, 234, 337.
Bachman P. 81, 433.
Baidac D. 472, 474.
Baidaff Ig. B. 6. 40, 43, 49, 120, 180, 335.
Balan V. 11.
Bălăşescu C. 315, 474.
Ballan E. 60, 62, 107, 110, 111, 160, 183, 185, 215, 254, 264, 266, 299, 310, 335.
Bănărescu L. 104.
Banciu I. 6.
Barbălatt B. 35, 40, 57, 60, 62, 100, 104, 185, 189, 215, 232, 258, 264, 305.
Barbier, 299.
Bărbulescu C. 64.
Barisien E. 33, 457.
Bârsănescu V. 234, 465, 471.
Bârsu I. 33, 57, 60, 465.
Basacov G. 191.
Bassarab A. 116, 234, 397, 472.
Beleş I. 6.
Bercovici E. 104.
Bercovici M. 33, 468.
Berdan C. 57, 104, 189, 193.
Bernstein M. 68, 76, 158, 470.
Bertrand 81, 299.
Beschea N. 74, 470.
Bickart L. 456, 457.
Blaha N. 19, 113, 191, 239, 313, 314, 352, 361, 395, 396, 431.
Bleiweiss P. 64, 65, 69, 72, 440, 470.
Blumen M. 68, 73, 116, 233, 435, 472.
Blumenfeld D. 64.
Bocancea K. 60.
Bogdan G. 78, 267.
Bogdan M. 191, 193, 232.
Bogdan C. M. 104.
Bolgiu O. 35, 55, 64, 65, 180, 188, 191, 298, 351.
Borneanu, G. 5, 6, 42, 90.
Borneanu G. A. 356, 474.
Botea Gh. E. 116, 155, 233, 235, 352, 472, 474.
Botea N. 34, 60, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 72, 76, 77, 79, 104, 110, 111, 114, 115, 137, 148, 152, 153, 154, 155, 156, 189, 191, 192, 200, 225, 227, 228, 231, 232, 233, 234, 271, 273, 274, 298, 311, 314, 318, 323, 351, 352, 359, 381, 387, 394, 435, 470.
Bouchet 121.
Braiester O. 114, 116, 157, 234, 236, 310, 354. 473, 475.
Brătescu-Danubiu M. 62, 106, 189, 193, 264, 267, 316.
Bratu G. 5, 6, 181, 322, 323, 324.
Brocard 78.
Bruckner V. 6, 41.
Brüll L. 68, 72, 106, 114, 228, 233, 276, 298, 435, 473.
Buchholtzer C. 299.
Buchner V. 468.
Bucică Fl. D-ra. 64.
Budeanu C. 6, 41.
Budişteanu, A. 69, 193.
Buffon 299.
Buga I. 73.
Buicliu G. 5, 6, 42, 43, 79, 111, 114, 120, 124. 149, 160, 166, 196, 208, 239, 249, 254, 275, 279, 298, 318, 359, 376, 387, 391, 399, 408, 423, 435, 440, 455, 460, 473, 479.
Bunescu Al. 5, 6, 41.
Bungetzianu D. 321.
Buradescu T. 6.
Burstin O. 278.
Busuioc Ot. D-ra 183.
Buşilă A. 57, 62, 64, 72, 279.
Buşilă C. 6, 26, 41.
Buşilă I. 6, 29, 41.

Căldăraru L. 64, 68, 77, 114, 275.
Călin G. 65, 68, 72. 75, 114, 116, 157, 197, 234, 235, 273, 274, 278, 295, 352, 353, 354, 436, 470, 472, 474, 475.
Călin T. 72.
Cambureanu V. 7.

Cantacuzino I. 65.
Capello M. 195.
Capriel D. 7.
Capriel I. 7, 26.
Capriel H. 27.
Carabeţeanu G. P. 356, 474.
Caracaş G. 75.
Caracostea A. 356, 474.
Carnot 78, 352.
Castigliano 462.
Caraman E. 7.
Cazacincu V. 68, 69.
Cazacu C. 7.
Cauchy 181.
Cayléy 381.
Cebişef 335.
Cercel C. 236, 472.
Cernes M. 250, 257, 310, 354, 356, 371, 397, 473, 474, 477.
Cesaro 81.
Chiricescu C. 31, 32.
Chiricuţă A. 7.
Chiru-Nanov A. 475.
Chiţulescu I. 7, 41.
Christoffel 256, 257.
Ciffer S. 235.
Cioc M. 7, 41, 43, 44.
Ciorănescu I. C. 35, 56, 57, 58, 62, 65, 68, 69, 106, 110, 111, 148, 152, 189, 191, 192, 199, 233, 266, 267, 271, 351, 352, 354, 387, 432, 470.
Ciorănescu N. 59, 335.
Clausen 335, 465.
Cocea Gh. 312.
Cocea Th. 235, 236, 277, 305, 353, 354, 356, 431, 474, 477.
Cohn H. 64, 68, 72, 234, 236, 310, 352, 435, 473,
Cojoc Gh. 68.
Coman V. 137, 218, 300, 337.
Comberousse Ch. de 119, 173, 194, 241, 308, 420, 424, 465.
Constantinescu A. 33.
Constantinescu I. 62, 104.
Constantinescu M. 236.
Constantinescu Tancred 7, 23, 26.
Conta V. 27, 90.
Coşereanu I. 33, 148, 320, 340, 468.
Coşniţă V. 57, 106, 192, 234, 352, 400, 460.
Costăchescu C. 474.
Costeanu N. 30.
Costinescu D. 7.
Crăciunescu I. 215, 335.
Cristea P. 69, 473.
Cristescu I. 116, 117, 352, 397, 464, 470, 472.
Cristescu V. 5, 7, 41, 43, 193, 195, 196, 280, 373, 385, 386, 387, 391, 395, 412, 452, 480.
Crofton 299.
Cuşută H. 465.

D'Alembert 216.
Dâmboianu Gh. 64, 470.
Dan V. 60.
Dânga V. 73, 473, 475.
Dăscălescu H. 472.
David Emmanuel 323.
David G. 38, 64, 68, 77, 148, 269.
David H. 157, 235, 236' 277, 310, 311, 313, 353, 354, 355, 356, 435, 475.
David I. 117, 472.
Davidescu Em. 11.
Demetrescu G. 323. 324.
Dermer M. 76.
Diaconescu T. 64, 68, 75, 234, 317, 473, 474, 475.
Diaconu M. 68, 352.
Dimitrievici A. 397.
Dinescu F. 435, 470, 472.
Dobrescu-Băbici 57.
Donici Panait 31.
Dordea T. 42, 57, 104, 130 137.
Dorneanu V. 65, 72, 76, 77, 115, 232, 234, 236, 273, 276, 315, 354, 393, 394, 472, 477.
Drăghiceanu M. 76, 470.
Dragomir I. 151, 191, 240.
Dragomir S. 197.
Drâmbă C. 276, 277, 311, 352, 356, 435, 474, 475.
Drogeanu N. P. 356.
Dumitrescu Arg. D. 7.
Dumiţrescu I. G. 7, 223.
Dumitrescu A. M. 64, 92, 148.
Dumitrescu G. M. 64, 68, 69, 148, 475.
Dumitriu E. 235.
Duporcq 185, 189.

Einstein 100.
Epure Şt. 191.
Erbiceanu C. 11.
Espanet G. 395.
Etciu A. 41.
Euler 40, 54, 80, 81, 105, 155, 178, 211, 253, 279, 345, 352, 354, 417, 418, 419, 420, 421, 450, 452, 462, 479.
Evolceanu 41.

Fântâneanu I. 233, 298.
Feldştein S. 199, 236, 250, 435.
Felix C. 7, 26, 209, 283.
Felix C. C. 155.
Fedeleş C. 64, 470.
Férmat 105.
Feuerbach 193, 194, 195, 196, 280, 385, 386, 387, 419, 421.
Fibonacci 29, 478.
Filipescu G. 5, 7, 14, 15, 41, 42, 90, 208.
Finţescu A. 33, 57.
Fitz-Patric 81, 84.
Florea Al. 64, 65, 72, 232, 234, 236, 273, 274, 276, 309, 310, 393, 394, 472, 473.
Florea C. 352.
Florescu D. 68.
Florescu I. 57, 60, 61, 62, 104, 468.
Foca I. 116, 198, 315, 397, 472.
Focşăneanu L. 57, 60.
Focşeneanu M. 35, 62, 110, 111, 120, 143, 156, 175, 187, 189, 191, 192, 193, 215, 253, 258, 267 381, 452, 460.
Fourier 55.
Franke 421.
Frégier 255.
Frenet 245, 246.
Fundăţeanu I. 320.

Gabrielescu R. 7, 382.
Gabrovski E. 64, 475.
Gaiu E. 69, 74, 76, 157, 234, 276, 306, 307, 353, 354, 394, 475.
Gaiu N. 216.
Gâlcă T. 7.
Gârboviceanu P. 25.

Garnier 122.
Gataianţu B. 38, 64, 68, 72, 116, 118, 137, 235, 352, 371, 435, 472, 474.
Gâtan M. 104.
Gauss 55, 184, 459.
Gegenbauer 381.
Genuneanu M. D-ra 60.
Georgescu C. 33.
Georgescu Eug. 64, 68, 72.
Georgescu E. C. 143, 351.
Georgescu F. C. 63.
Georgescu F. E. 64, 104, 106.
Georgescu I. C. 57, 60, 61, 104, 198, 279, 397, 464, 465, 468.
Georgescu D. 40.
Georgescu Fl. 64.
Georgescu I. I. 68, 69, 267, 470.
Georgescu M. 64, 65, 266, 324.
Georgescu N. 215.
Georgescu I. N. 7.
Georgescu N. N. 7.
Georgescu R. 157, 234, 236, 276, 310, 354, 473, 475.
Georgescu-Gorjan St. 60.
Georgescu-Racoviţă I. 60, 62, 72, 148, 271, 317, 352, 475.
Georgescu-Roegen 57, 58, 60, 62, 104, 120, 143, 185, 468.
Georgescu-Val. I. 68.
Gergonne 18, 19, 34, 239, 313, 314, 417, 419, 420.
Ghelber M. 72, 240, 438.
Gheorghiu A. 157, 234, 236, 306, 353, 354.
Gheorghiu G. 237, 474, 475.
Gheorghiu I. 8.
Gheorghiu M. 7, 41.
Gheorghiu Ş. 296, 368, 447.
Gherghiceann C. 472.
Ghermănescu M. 5, 7, 41, 100, 186, 205, 215, 254, 336, 350, 469, 479.
Ghimicescu Gh. 64, 65, 72.
Ghimuş D. 8.
Ghiţescu V. 64.
Giurumescu C. 64, 65, 72, 393, 394.
Godt W. 386, 387.
Goilav C. 60, 62, 104.
Goldstein F. 75, 191, 195, 393, 394, 470.
Goldstein I. 35.
Goldstein M. 62, 193.
Gorciu V. 236.
Grabovschi Eug. 73, 472, 473.
Grigorescu C. 8, 26.
Grigorescu I. 69.
Grigorescu V. 19, 20.
Grofşoreanu G. 110 148.
Gropper S. 74.
Grubenmann Gr. 68.
Grünbaum M. 33, 55, 40, 62, 155, 207, 215, 359, 381, 431, 439, 460.
Grünberg B. 62.
Grünstein E. 76, 114, 157, 233, 236, 399, 436, 472, 473, 474, 475.
Gulian E. 64.
Gutzu A. 143.
Gutzu V. 8.

Haim L. 397, 473, 474.
Hallerstein 122.
Hamburger L. 189.
Hâncu S. D-ra. 400.
Haret Sp. 27.
Harriot 123.
Hartular G. 74, 76.
Hôpital 261, 466, 473.
Huber I. 33, 60, 62, 104, 264.
Hulubei T. 234, 235, 276, 324, 334, 352, 353, 358, 437, 471, 475.

Iacob E. 68, 72, 75, 234, 264, 276, 315, 398, 473, 474.
Ianculescu O. 200, 436.
Ianculescu R. 5, 8, 41.
Ignat Gh. 41.
Iliescu D. 54, 60, 64, 73, 148.
Iliescu E. 33, 57, 60, 62, 104, 172.
Iliescu Gh. 5, 8, 321.
Iliescu M. 470.
Iliescu Tony 25.
Iliuţă I. 37, 68, 116, 137, 218, 250, 277, 278, 279, 397, 472, 474, 476.
Inghirami G. 464.
Ioachim Gr. 72, 77, 114, 234, 235, 236, 310, 323, 356, 435, 436, 471, 473, 475.
Ioachimescu A. 8, 26, 41, 42, 43, 44, 184, 321, 466.
Ioanovici A. 8.
Ionescu A. 64, 69, 235, 397, 472.
Ionescu Al. 26.
Ionescu C. 64, 104, 472.
Ionescu V. D. 8, 70, 79, 200, 280.
Ionescu-Gion G. 33.
Ionescu I. 5, 8, 15, 26, 31, 32, 35, 39, 41, 43, 47, 49, 79, 88, 90, 91, 100, 115, 116, 119, 130, 155, 183, 184, 159, 172, 180, 181, 200, 208, 216, 217, 238, 250, 256, 276, 277, 279, 291, 299, 319, 333, 355, 358, 371, 372, 382, 399, 401, 402, 422, 423, 440, 453, 454, 457, 464, 476, 479.
Ionescu Longin 33, 57, 103, 148.
Ionescu P. 35, 57, 58, 60, 62, 64, 69, 78, 148, 152, 189, 191, 192, 195, 228, 266, 267, 271, 342, 351, 352, 387, 470, 472.
Ionescu-Bega T. 116.
Ionescu-Brezuica I. 57, 60, 64, 191, 192, 377, 398.
Ionescu-Bujor A. 64, 68, 74, 156, 157, 233, 234, 236, 274, 305, 352, 353, 356, 474, 475.
Ionescu-Bujor C. 64, 68, 69, 72, 76, 77, 114, 116, 152, 156, 157, 211, 234, 236, 274, 305, 324, 336, 352, 353, 354, 470, 472, 475.
Ionescu-Zane G. 192, 228.
Ioniţă I. 104.
Iorgulescu C. 62.
Iscovici P. 435.
Istinie C. Brezuică. 68, 72, 116, 156, 184, 233, 234, 235, 236, 277, 278, 300, 306, 314. 352, 353, 354, 397, 472, 474.

Jerabek 251.
Jilie A. 8.
Jojea N. 68.
Jujescu G. 104, 479.

Kahane Arno 69, 73, 76, 77, 157, 234, 235, 236, 472.
Kariya 419, 421.
Katz L. 64, 72, 233, 234, 310, 324.
Katz P. 33, 60, 62, 64, 104, 143, 465.
Katz S. 60 68, 158, 235, 236, 276, 352, 470, 473.
Krakauer I. 474
Kaufmann N. 5, 8, 159, 319, 400.

Lagrange 101, 103.
Laguerre 254.
Lalescu Tr. 8. 23, 24. 26, 31, 211, 218, 298, 309, 323, 449, 470.
Landau 453, 454.
Laplace 442.
Lazanu V. 73.
Lăzărescu E. D-ra. 39, 471.
Lăzărescu I. T. 266.
Lăzărescu Şt. 62, 106, 148, 193, 264, 266, 267.
Lecescu P. 68, 216.
Legendre 181, 417.
Lemeş M. 60.
Lemoine 110, 187, 251, 313, 396, 420, 421, 449.
Lepădatu V. 72.
Levi-Civitta 441.
Linteş I. 8, 41, 50, 65, 80, 84, 120, 132, 153, 159, 175, 184, 228, 231, 240, 254. 294, 295, 318, 349, 352, 358, 425, 432, 435, 440, 455.
Liteanu G. 5. 8. 69, 75, 208, 321.
Longshamps 187, 188, 251,
Lorent H. 454.
Lucas 81.
Lupescu E. 305, 435, 472.
Lupu A. 473.

Măcrineanu Şt. 143.
Majol 457.
Malcoci C. 5, 8, 41, 90 321.
Malla N. 137, 218, 300, 337.
Malo 457.
Manafu V. 62, 64, 69, 77, 114, 156, 232, 234, 236, 271, 275, 298, 322, 352, 353, 354, 373, 395, 470, 472, 475.
Manoil-Roman Al. 64, 68.
Manolache V. 72.
Manolescu E. 33, 57, 60, 62, 468.
Manolescu N. 73, 77, 114, 116, 117, 156, 157, 160, 232, 235, 236, 274, 278, 311, 352, 353, 354, 356, 393, 394, 424, 436, 471, 472, 473, 475, 479.
Manoilescu M. 321.
Manu Gh. (General) 121, 123, 161, 166.
Mannheim 215.
Marcovici H. 60, 64, 68, 74, 196, 233, 276, 310, 352, 357, 435, 473, 478.
Mărculescu Gh. 62.
Mărdărescu R. 64.
Mareş G. 73, 114, 157, 234, 236, 273, 274, 309, 323, 353, 354, 475.
Mareş T. 8, 261.
Marian I. 33.
Marin M. 472.
Marinaş M. 235, 227, 354, 397, 474.
Marinescu I. I. 68.
Mariş M. 235, 397, 474, 475, 476.
Martinian B. 60.
Măru D. 62.
Massler E. 68, 69, 72, 156, 228, 233.
Mateescu C. 5, 8, 321, 331.
Măxinoiu T. 31, 42.
Maxwell 462.
Melinte G 62.
Menelaus 274.
Meusnier 179.
Miclescu A. 60, 227.
Mihăescu C. 40, 64, 148, 159, 189, 223.
Mihăescu Şt. 265.
Mihăilescu C. 72, 232.
Mihăilescu N. 68, 72, 116, 157, 234, 235, 271, 352, 353, 354, 436, 472.
Mihăilescu V. 208.
Mihalopol C. 9.
Mihoc G. 190, 194, 195.
Milculescu D. 68, 394, 470.
Minkowski 299.
Mircea E. 9, 41.
Mirea Şt. 9, 15, 26, 41.
Mirescu P. 183, 191.
Mitescu D. 57.
Mititelu C. 9, 26, 29, 41, 321.
Mititelu I. 9.
Miu I. 64, 68, 72, 75, 76, 77, 148, 152, 156, 233, 275, 324. 352, 435, 439, 466, 472, 475.
Mladenovici Al. 39, 72, 117, 153, 197, 238.
Mohr 461.
Moisil Gr. 33, 34, 35, 57, 60, 143, 183, 254, 264, 299, 335.
Moisil I. 227.
Morţun E. 356, 475.
Moşoiu Tr. 23, 24.
Motoi I. 9.
Munteanu G. 157, 234, 236, 305, 307, 353, 354, 356, 475.

Nagel 109.
Năsturaş D. 9.
Negretzu F. 60, 104, 148, 264, 345.
Negretzu I. 9, 26.
Nestor D. 68, 72, 77, 114, 116. 157, 233, 234, 235, 255, 274, 275, 305, 352, 354, 356, 473.
Neuberg J. 100, 130, 156, 195, 215, 298, 312, 335, 386.
Newton 33, 439.
Nichifor G. 5, 9, 15, 16, 26, 199, 321, 327.
Nicolaescu P. J. 275.
Nicolaevici I. 11.
Nicolau A. 33, 61, 63, 104.
Nicolau C. 240, 465.
Nicolau Gh. 68, 148, 198, 235, 397, 465, 473, 474, 475.
Nicolau M. 9.
Nicolau Dobridor I. 116, 157, 234, 235, 236, 250, 306, 307, 353, 397, 423, 472.
Nicolescu V. Gh. 235, 274, 435, 471.
Nicolescu N. 11, 22, 193.
Nicolescu S. 264.
Niculescu A. 57, 60, 61, 63, 143, 299, 335.
Niculescu C. 9.
Niculescu D. 64, 65.
Niculescu Gh. 9, 41.

Niculescu I. 184.
Niculescu M. 60, 183, 188, 246, 254, 290, 299.
Niculescu N. 64, 372.
Niewenglowski 268.
Novac A. 64, 72, 266.
Novacu Val. 69, 73, 75, 233, 236, 271, 352, 435, 472, 473, 474, 475.

Ocagne M. d', 44, 180.
Octavian F. 72.
Ohm 122.
Onicescu O. 9, 41.
Opran Al. A. 65, 68.
Opran A. 228.
Oprişanu V. 216.
Orănescu O. 107, 239, 385, 399, 470.
Orăşanu C. 5, 9, 26, 41.
Orăşanu Gr. 9.
Ougthred 123.
Ozias M. 435.

Pălărieru E. 64, 69, 152.
Pamula A. 57, 60, 104.
Panaitescu A. 191.
Panaitescu D. 33.
Panaitescu Sc. 9, 208, 381.
Pantazi A. 250,
Papelier G. 322, 323, 334.
Pappus 255.
Paraschiv G. 436.
Pârvănescu Ş. 472.
Pascal 254, 296, 338, 396.
Pârvu A. 438, 472, 474.
Paşcanu S. 9.
Patriciu T. 9.
Pătroianu M. 56, 60, 62. 69, 75, 104, 110, 148, 189, 192, 228, 267, 271, 351, 387, 470.
Păun C. 235, 435, 472.
Pavel 122.
Petersen J. 323.
Petrescu A. 68.
Petrovici D. 62.
Petrovici I. 60.
Petruţiu I. 234,
Philipide M. 9, 26.
Picquet H. M. 114.
Pilat C. 273, 274, 436, 473, 474, 475.
Platon 55.
Poenaru 122.
Poincaré 299.
Pompeiu D. 335.
Popa I. 64, 68, 72, 210, 253, 466, 471.
Popa-Liseanu N. 25.
Popea O. 60, 62, 63, 66, 67, 91, 92, 104, 105, 106, 149, 154, 175, 190, 193, 227, 228, 264, 272, 292, 295, 334, 376, 417, 456, 466, 470.
Popeanu A. 62.
Popescu A. 33.
Popescu Cornelliu 38, 62, 64, 65, 68, 72, 77, 78, 103, 106, 157, 231, 233, 234, 236, 238, 276, 306, 307, 310, 312, 320, 324, 352, 353, 354, 356, 459, 472, 473, 475.
Popescu Dorin 60, 62, 64, 190, 193, 227, 266, 271, 276, 356, 470, 474.
Popescu G. 9, 26.
Popescu D. G. 33, 264, 340, 372, 468.
Popescu G. 25.
Popescu I. 9, 41, 193.
Popescu M. 64, 106,
Popescu Sp. 62, 68, 148, 352.
Popescu V. 236, 337, 397, 431, 438, 472, 474.
Popovici A. 73, 77, 105, 156, 274, 393, 394, 471.
Popovici C. 40, 64, 68, 72, 75, 77, 80, 93, 114, 115, 116, 119, 132, 153, 155, 156, 157, 197, 225, 232, 233, 234, 236, 238, 252, 266, 271, 273, 275, 276, 308, 315, 316, 322, 341, 352, 353, 354, 360, 393, 394, 421, 439, 466, 470, 472, 473, 478.
Popovici C. preot, 32.
Popovici D. 64, 69, 73, 190, 191. 271.
Popovici I. 56, 69, 73, 74, 75, 77, 115, 148, 157, 234, 272, 352, 353, 435, 472.
Popovici-Puiu D. 60, 64, 154, 231.
Popoviciu T. 29, 33, 55, 57, 60, 62, 104, 107, 160, 189, 215, 254, 255, 264, 267, 268, 274, 299, 345, 431, 455, 468.
Potopeanu G. 234, 236.
Profiri N. 42, 43.
Prompt (le D-r) 464.
Protopopescu Gr. 10.
Ptolomeu 466, 467.
Puşcă T. 68, 72, 274, 276, 310, 353, 436, 471, 473.
Pytagora 335.

Rabinovici R. 74, 473.
Radev Ath. 194, 359, 470.
Radu M. 10.
Rădulescu Eliade Ion 122.
Rădulescu M. 106.
Rădulescu T. 64.
Raiciu C. 397.
Râpeanu V. 157, 234, 236, 274, 353, 357, 436, 473.
Răşcanu V. 276.
Record 123.
Reinhorn B. 56, 60, 64, 65, 68, 72, 104.
Revici T. 10, 41.
Riemann 256, 257.
Rizescu I. 57, 60, 62.
Rizescu Gh. 466.
Roco M. 10.
Rolle 138, 141, 142, 144, 437.
Roşculeţ V. A. 353, 354, 435.
Rosenfeld L. 57, 60, 105, 226.
Roşu Al. 11.
Roşu A. 60, 61, 62, 64, 69, 74, 148, 228, 352.
Roşu V. 10.
Rouché E. 119, 173, 194, 241, 308, 420, 421, 424, 465.
Rudolf Cr. 123, 164.
Rusanda G. 73.
Rusu E. 143, 267, 276, 352, 436, 471, 474.

Saligny A. 11, 25, 28, 44, 90, 100, 180, 322.
Saligny M. 10, 42.
Salmon 450.
Săpunaru G. 10, 26.
Sarian M. 33, 59.
Sarrus 85, 88.
Săvescu M. 62.
Schächter O. 69, 73, 234 273, 275, 310, 324, 352, 436.

Schileru D. 62, 64, 235.
Schiopulescu I. 397, 474.
Schor O. 235, 236.
Schlifca E. 148.
Schönfeld C. 57, 60, 62, 64,
Scripcă L. 68, 72, 77, 114.
Selăgeanu A. 330.
Scodrano A. 62.
Segall L. 68, 76, 77, 234, 236, 309, 352, 353, 354, 473.
Segârceanu C. 116, 236, 276, 472, 473, 474.
Şerban P. 277, 397, 473.
Şerbănescu I. 62.
Şerbănescu V. 10.
Şerbescu D. 41.
Şerbescu S. 41.
Sergescu P. 5, 10, 55, 100, 101, 137, 138, 255, 431, 459.
Servais Cl. 196.
Sevastre D. 73, 77, 394.
Sfinţescu C. 10.
Simionescu G. 64, 69, 110, 152, 189, 191, 192, 228, 238, 271, 276, 354, 385, 387, 470.
Simionescu M. 181.
Simson 174, 199, 210, 211, 232, 233, 253, 254, 309, 311, 312, 469.
Smântânescu A. 10.
Solacoglu S. 104.
Solacolu S. C. 267.
Solomon A. 60, 104.
Solomon D. 60, 64, 104, 145.
Solomon W. 33, 60, 61, 62, 104, 106, 110, 191, 193, 267, 332, 333.
Soltisky L. 218, 337.
Sonnet 122.
Soye (de) 121.
Spacu P. 73, 475.
Spathy R. 68, 72, 77, 157, 234, 235, 236, 239, 257, 271, 307, 310, 352, 353, 354, 355, 424, 466, 467, 472, 474, 475, 476.
Spiridonoscu G. 72.
Stamatescu I. 10,
Stamatiu M. 121.
Stan D. 10.
Stănculescu C, 64.
Stănescu N. 60.
Stegaru C. 472.
Ştefan M. 33, 51, 57, 60, 64, 75, 78, 80, 105, 200, 227, 237, 264, 345, 352, 375, 469.
Ştefănescu E. 39, 56, 57, 65, 67, 80, 106, 110, 111, 120, 138, 148, 191, 198, 199, 234, 280, 318, 322, 340, 352, 358, 370, 391, 400, 401, 416, 417, 468, 471, 478.
Sternfeld L. 356.
Sternhell L. 475.
Stewart 272.
Stihl E. 466.
Stoenescu I. 60, 62.
Stoica A. 19, 20.
Stoica Aurelian 68, 72, 101, 152, 354.
Stoicescu T. 64, 68, 235, 273, 274, 352, 353, 437, 466, 471, 473, 475.
Stoienescu Al. 137.
Stroescu G. 60.
Sufleţel A. 104.
Sylvester 299, 381.

Tailer G. 64, 68, 106, 117, 119, 157, 159, 196, 199, 209, 210, 215, 233, 234, 235, 236, 310, 311, 313, 314, 316, 318, 323, 352, 353, 354, 356, 397, 417, 435, 437, 472, 475, 476..
Tailer N. 62, 104.
Tales 55.
Tănase T. 474.
Tănăsescu A. 41, 312.
Tănăsescu G. 27.
Ţânţăreanu P. 267.
Tannery J. 81, 270.
Tăraş V. 73, 76, 157, 234, 236, 472.
Tauber A. 56, 57, 60, 62. 65, 100, 104, 105, 116, 193, 264, 346, 468, 469,
Taylor 80, 308, 309.
Teodor I. 11, 26.
Teodoreanu V. 10, 42, 43.
Teodorescu C. 42, 460, 463,
Teodorescu I. 62, 64, 65, 143, 351, 372.
Teodorescu N. 10.
Teodorescu N. 26, 64, 69, 75, 77, 106, 114, 119, 155, 197, 233, 271, 275, 308, 311, 314, 3.. 436, 437, 468.
Teodorescu I. S. ..
Teodoru N. 60.
Thébault V. 194, 196, 394, 395.
Thierrin G. 10, 14, 15, 321.
Thiry 357.
Thybaut 376.
Ţino O. 5, 10, 175, 321.
Ţiţeica G. 5, 10, 13, 26, 41, 42, 43, 44, 65, 298, 323, 324, 336, 453.
Togo Themo 235, 471.
Trandafirescu N. 41.
Tresse 376.
Tullea G. 223.
Tunaru Tr. 73.
Tunităchi Vl. 88.

Udrisky T. 110, 111, 189, 193, 470.
Ulescu A. 10.
Urzică A. 193.

Văitoianu A. 25.
Vâlcovici V. 31, 80, 362.
Van Aubel 107, 137, 273.
Vardala I. 10, 26, 41.
Vârlan V. 65, 65, 68, 72, 76, 115. 271, 352.
Vasilescu B. 234, 235, 397, 436, 474.
Vasilescu F. 56.
Vasilescu Gr. 10.
Vasilescu I. 5, 11, 41, 143.
Vasilescu M. 193.
Vasiliu G. 29, 64, 68, 120, 173, 235, 239, 423, 454.
Vasiliu C. I. 191, 192, 195, 232, 267, 273, 275, 279, 310, 311, 352, 353, 354, 355, 357, 387, 394, 435, 436, 459, 468, 470.
Vasiliu D. I. 31, 35, 57, 62, 64, 69, 73, 78, 106, 110, 111, 114, 115, 131, 148, 151, 152, 153, 156, 187, 189, 190, 191, 228, 233, 234, 271, 298, 324, 351, 352, 473.
Vasiliu M. 11, 57, 104, 106, 276, 356.
Vasiliu Năsturel P. 31.
Velea M. 73, 356.
Vellescu I. 432.

...73, 77, 114, ...204, 205.
...ici B. 216, 225, ...

Wallace 313
Weinstein I. 314.
Weiss L. 35, 148, 187, 193, 254, 264, 266, 342, 372, 373, 387, 470.
Weiss S. 29. 35, 64, 68, 110, 119, 189, 193, 228, 232, 266, 277, 294, 309, 349, 352. 353, 354, 435, 478.
Weisbuch A. 310, 356, 435. 474.
Welch 457.
Wilson 84.

Zaharia I. 235, 353, 354.
Zamfir I. 277, 337, 352, 397, 474.
Zamfirescu A. 271.
Zamfirescu Gr. 11, 41, 60, 61.
Zamfirescu I. 474.
Zamfirescu M. 68.
Zapan Gh. 5, 11, 42.
Zapan Gr. 5, 11, 57, 58, 61, 63, 104, 106, 227.
Zlatcu C. 11.
Zottu G. 11.

J. UVRAGE CITATE.

Pag.

Gazeta Matematică. 5, 7, 12. 13, 19, 21, 22, 27, 28, 29, 34, 42, 43, 44, 49, 56, 58, 60, 65, 69, 90, 91, 92, 106, 117, 119, 125, 130, 131, 138, 161, 167, 175, 182, 188, 189, 196, 209, 210, 218, 227, 238, 247, 248, 250, 253, 291, 292, 293, 294, 295, 298, 299, 309, 312, 314, 318, 321, 330, 333, 334, 342, 346, 349, 352, 355, 362, 368, 369, 372, 373, 375, 376, 385, 386, 390, 395, 396, 401, 417, 419, 420, 421, 423, 441, 449, 453, 454, 456, 465, 469.

Buletinul de ştiinţe matematice pure şi aplicate 31, 241, 327

Revista matematică din Timişoara 31, 55, 100, 137, 211, 215, 247, 248, 254 298, 335, 381, 341, 470

Foaia Matematică . 31. 55, 137, 180, 215, 247, 248, 254, 298, 312, 354, 460

Curierul Matematic 31, 55, 100, 137, 180, 215, 233, 255, 298, 336, 381, 431 447, 459, 463

Natura 31

Chiricescu C. Pascalia Bisericii creştine ortodoxe de răsărit in conformitate cu calendarul indreptat 31

„ Reforma Calendarului. Armonizarea lunii, săptămânii şi a sărbătorilor 32

Ionescu Gion I. G. Istoria Bucureştilor 33

M. d'Ocagne. Cours de Géométrie pure et appliquée 44

Bulletin of the American Mathematical Society 54, 55, 335, 380

Journal de Mathématiques élémentaires 55, 100, 137, 180, 215, 254, 298, 335 381, 431, 460

Alaci V. L'approximation des fonctions d'une variable réele par une classe des sommes trigonométrique . . 55

Grünbaum M. Arta de a fi geometru 55

Lt.-Col. Pappazoglu. Istoria Fundării oraşului Bucureşti 56

L'Education Mathématique 65

I. Ionescu, G. Ţiţeica
A. Ioachimescu şi V. Cristescu. Culegere de probleme 47, 74, 184, 253, 257, 278, 315

Lucas.
Bachmann.
Fitz-Patric.
Tannery.
Bertrand.
Cesaro. Teoria numerelor 81

Mathesis 100, 156, 180, 194, 195, 196, 215, 235, 298, 312, 335 373, 386, 387, 394, 395, 420, 431, 453, 454, 459, 467

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 100, 335, 431

Pag.

Sergescu P. Monografie asupra ecuațiilor cu toate rădăcinile reale 100
I. Ionescu Anghel Saligny 100
Lagrange. Oeuvres 101, 103
F. G. — M. Exercices d'Arithmétique 106
Picquet M. H. Géométrie Analytique 114
Rouché E. et de Comberousse Ch. Traité de Géométrie 119, 173, 241
Manu Gh. Aritmetica și algebra 121, 161
Nouvelles Annalles de Mathématiques 131, 312
Coman V. și Malla N. Formular de Matematici 137, 218, 299, 337
Neuberg J. Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe 156
Bulletin de la section scientifique de l'Academie roumaine 180, 335
Raoul Bricard. Leçons de cinématique 180
L'abbé P. J, E. Goedseels. Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés 181
Gheorghe Bratu. Curs de matematici generale 181, 322, 323, 324
Buletinul Societății studenților în matematici 183, 215, 254, 299, 335
Kraitchik. Quelques proprietés des nombres cycliques. Sur la factorisation des grandes nombres 184
Duporcq. Premiers principes de Géométrie moderne . . 185, 189
Rouché E. et de Comberousse. Géométrie plane 194, 308, 420, 421, 424, 465
F. G. — M. Exercices de Géométrie . 194, 235, 273, 312, 354, 357, 450, 465
Neuberg J. Géométrie analytique 195
Abramescu N. Sulle serie di polinomi 202
Maior V. Mihăilescu. Calculul corecțiunilor balistice și atmosferice . . . 208
Revista Artileriei 208
Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timișoara 215
Matematica Bârlădeană 216, 247
Ziarul Matematic 216, 247, 336
Bernstein S. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle 217, 336
Hostinsky. Sur les probabilités géométriques 217
Vaclav Čupr. Absorțiunea cloridului de hidrogen gazos de către acidul sulfuric 217
Simek A. & Kadlcova H. Un nou fenomen electrocinetic, studiul electro capilarității oxidului teluros topit 217
Frejka J. & Vsetecka R. Cercetări asupra dosagiului acidului lactic, micro dosagiul în sânge 217
Sahanek Iosef. O explicațiune a originii undelor electromagnetice 217
Compliments de trigonométrie 253
Sergescu P. Snr le module minimum des zéros de l'équation trinome 225
Abramescu N. Memoriu de titluri și lucrări 255
Moroger A. Le problème de Pappus et ses cent premières solutions 255
Pastore Franco. Evolution de las ciencias en la Republica Argentina. Nuestra mineralogia y géologia . . . 256, 336
Losano N. & PaitoviA. Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina. La higiene publica y las obras sanitarias argentinas 256, 336
Hoxmark G. Evolucion de las ciencias en la Republica Argentina. La evolucion de la meteorologia 256

Pag.

Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle 256
Abason E. Chestiuni de examen 257
Niewengloroski. Algébre. 268
Tannery J. Leçons d'Aritméthimetique 270
Neuberg J. Note matematice asupra tetraedrului 298
Niculescu M. Sur une classe de series dont le cercle de convergence et une ligne sigulière essentielle 299
Comandor Buhholtzer C. Telegrafie şi telefonie fără fir 299
Deltheil R. Probabilités géométriques 299
P. Aubert & G. Papelier. Exercices de Mécanique 322
" " " " Géométrie Analytique 322, 323
Appel P. Cours de Mécanique 323
Ţiţeica G. Géométrie Différentielle projective des réseaux . . 323
Lalessu Tr. Calcul algebric 323
Petrescu Julius. Théorie des équatinns algébriques 323
David Emmanuel. Lecţiuni de teoria funcţiunilor 323
Demetrescu G. Distanţele cereşti şi structura universului . . 323, 324
Abasohn E. Exerciţii de mecanică 323
Aubert & Papelier. Exercices et épures de Géométrie descriptive . . . 324
Bulletin de la Société mathématique de France 327
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" 335, 341
American mathematical Society-Catalogue 336
Anuarul Şcoalei Politecnice din Timişoara 336
Culegere de Probleme — Algebra 373, 374, 375
Tresse et Thybaut. Géométrie analytique 376
Maurice Lecat. Coup d'oeil sur la théorie des déterminants supérieurs dans son état actuel 381
Maurice Lecat. Coup d'oeil sur la théorie de la multiplication des déterminants supérieurs dans son état actual . 381
General Sc. Panaitescu. Curs elementar de cartografie 381
Programme de l'école spéciale des Travaux pub.ics 382
Programme de l'école d'ingénieurs de Marseilles 382
Abramescu N. Introducerea elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene 382
Gavrilescu R. Zborul fără motor 382
N. Filimon. Ciocoii vechi şi noi 382
Culégere de Probleme — Trigonometria 395
Intermédiaire des Mathématiciens 395, 456
Periodico di matematica 417
Chaudet E. La evolucion de la astronomia 431
Carleman T. Les fonctions qnasi analytiques 431
Blaha N. Geometria triunghiului 431
Bachmann P. Zahlentheorie 433
P. Sergescu. Quelques remarques sur les courbes unicursales . 459
Sur les résolution en entiers de l'équation $ax^3+b=y^2$ 459
C. C. Teodorescu. Curs de rezistenţa materialelor 460
Vocabular Matematic (Biblioteca G. M.) 463
G. Inghirami. Table des nombres premiers 464
A. Gh. Ioachimescu. Culegere de probleme de Algebră 466

Afară de uvrajele de mai sus, sunt citate:
10 Astronomii diverse 47
20 Matematici diverse 91, 370
24 Algebre diverse 130, 332, 422
25 Aritmetici diverse 172, 331, 332
20 Feluri de Calcul 208, 453
20 Geometrii diverse 249, 291

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam R. (3394, 414, 26); *Angelescu V. A.* (3347, 92, 401, 09); *Braeşter O. I.* (R); *Căldăraru Leon* (3344, 47, 414, 37); *Chiru-Nanov O.* (3399); *Cocea Th.* (3366, 82, 94, N, P); *Costăchescu C. V.* (3392, 401, E, R); *Dângă S. V.* (3218, 89, 344, 410, 28, 37); *Diaconescu Th.* (2895, 342, N); *Dumitrescu G. M.* (3289, 347); *Ettinger A.* (3401); *Foca I.* (R); *Focşeneanu M.* (2599, 3427, N); *Gataianțu V. B.* (3167, 388, 409, 37); *Georgescu C. Const.* (2347); *Grăbovschi E.* (3410, 28, C); *Georgescu I. R.* (3428); *Grünstein E.* (3437); *Iacob St. Eug.* (3392, 99, 417, E); *Iliuță-Dăbuleni I.* (3392, C, N, P, R); *Ionescu-Bujor A.* (3380, 437); *Ionescu-Bujor C.* (3399, 401, 10, 37); *Istinie I. C. Brezuica* (3399); *Livada M. G.* (R); *Lupu Avram* (3416); *Manolescu I. N.* (3174, 399, 417, 28, 32); *Mareş Gr.* (3417); *Marinaş Marin* (3395, 414, P); *Mariş Marius* (3392, 414, 17, 23); *Minasian D. Minas* (3347, 69, 401, 10); *Miu M. I.* (2511, N, P); *Nicolau V. Gh.* (3317, 47, 410, 28, 37, E, N); *Novacu Valeriu* (3319, 27, 83, 410, 37); *Pilat Const.* (3327, 410, 17, 37, E, P); *Popescu N.* (P, R); *Russu Eug.* (3382, 83, 92, 401); *Savu S.* (C); *Schiopulescu I.* (3392); *Schor O.* (3414); *Spathy I. René* (3174, 344, 66, 89, 417, 37, N, P); *Stoica N. A.* (3236, 315, 19, 80, 99, 409, 10); *Stoicescu Th.* (3339, 99, 428); *Togo T.* (3342); *Zaharia O. Ion* (3417, 37).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1287, 379, 2347, 481, 524, 55, 77, 643, 45, 47, 745, 879, 972, 3019, 110, 210, 39, 40, 52, 68, 90, 317, 28, 52, 59, 62, 65, 71, 72, 73, 78, 84, 87, 93, 406, 18, 22, 30, 31 și 36 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

30 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2500,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* . . Lei 180,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

BIBLIOTECA CENTRALĂ
19 AUG 926

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 75 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. G. **Borneanu,** (adresa: Str. Basarabia, 45, Bucureşti).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.